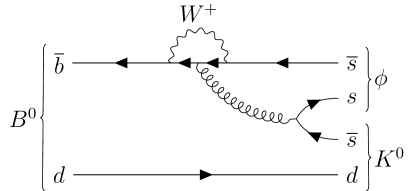
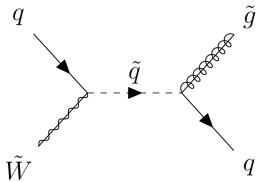
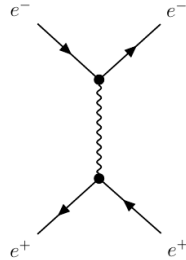
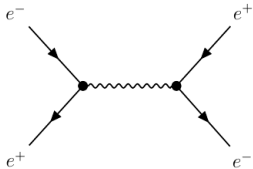


Teoría de Campos 2020 - Práctica

Reglas de Feynman

Diagramas de Feynman

Grafos a los cuales les vamos a asignar una contribución.



$$\alpha \longrightarrow \text{---}\!\!\!\!{\overrightarrow{\hspace{0.6cm}}}\!\!\!\!-\beta = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

A Feynman diagram showing a wavy line representing a photon with momentum p entering a shaded circular vertex. The vertex is labeled $= \epsilon_\mu(p)$.

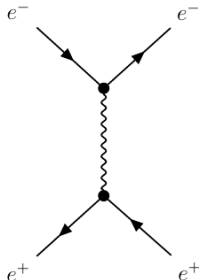
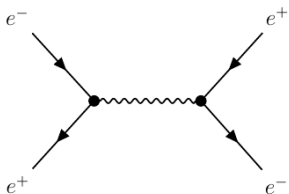
Proceso para calcular \mathcal{M} usando diagramas de Feynman

1. Determinar el orden al cual se va a hacer el cálculo.
2. Dibujar todos los diagramas que contribuyen hasta ese orden.
3. Usar las reglas de Feynman para asignarle una contribución a cada diagrama.
4. Sumar todas las contribuciones.

Ejemplo: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

Scattering de Bhabha: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

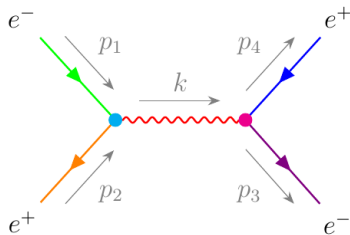
Diagramas que contribuyen a la amplitud a orden e^2 :



$$i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_{\text{patas salientes}} p_i - \sum_{\text{patas entrantes}} p_i\right) = \Xi_1 + \Xi_2.$$

Ejemplo: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

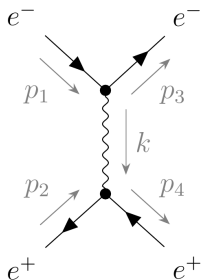
Contribución del primer diagrama:



$$\begin{aligned}\Xi_1 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [(2\pi)^4 \delta^4(k - p_1 - p_2)] [(2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - k)] \times \\ &\times \bar{v}^{s_2}(p_2) [-ie\gamma^\mu] u^{s_1}(p_1) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \right) \bar{u}^{s_3}(p_3) [-ie\gamma^\nu] v^{s_4}(p_4) = \\ &= (2\pi)^4 ie^2 \frac{[\bar{v}^{s_2}(p_2) \gamma^\mu u^{s_1}(p_1)] [\bar{u}^{s_3}(p_3) \gamma_\mu v^{s_4}(p_4)]}{(p_1 + p_2)^2} \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2).\end{aligned}$$

Ejemplo: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

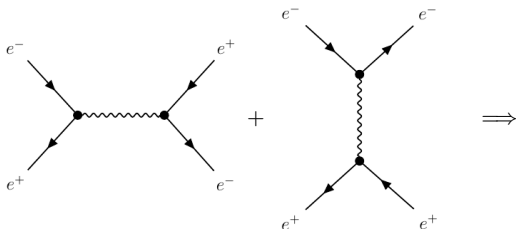
Contribución del segundo diagrama:



$$\begin{aligned}\Xi_2 &= - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [(2\pi)^4 \delta^4(k + p_3 - p_1)] [(2\pi)^4 \delta^4(p_4 - k - p_2)] \times \\ &\times \bar{u}^{s_3}(p_3) [-ie\gamma^\mu] u^{s_1}(p_1) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \right) \bar{v}^{s_2}(p_2) [-ie\gamma^\nu] v^{s_4}(p_4) = \\ &= -(2\pi)^4 ie^2 \frac{[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)] [\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)]}{(p_1 - p_3)^2} \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2).\end{aligned}$$

Ejemplo: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

Contribución total:

$$i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_{\text{sal.}}p_i - \sum_{\text{entr.}}p_i\right) =$$


$$\mathcal{M} = e^2 \left\{ \frac{[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)][\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)]}{(p_1 + p_2)^2} - \frac{[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)][\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)]}{(p_1 - p_3)^2} \right\}$$

Límite no relativista para la amplitud de $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

Suponemos que $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ (entonces $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4$). Teniendo en cuenta esto, se puede ver que

$$(p_1 + p_2)^2 \approx 2m^2, \quad (p_1 - p_3)^2 = \mathcal{O}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) \ll m^2$$

$$\mathcal{M} = e^2 \left\{ \frac{[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)][\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)]}{(p_1 + p_2)^2} - \frac{[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)][\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)]}{(p_1 - p_3)^2} \right\}$$

Límite no relativista para la amplitud de $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

Suponemos que $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ (entonces $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4$). Teniendo en cuenta esto, se puede ver que

$$(p_1 + p_2)^2 \approx 2m^2, \quad (p_1 - p_3)^2 = \mathcal{O}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) \ll m^2$$

$$\mathcal{M} = -e^2 \frac{[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)] [\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)]}{(p_1 - p_3)^2}$$

Límite no relativista para la amplitud de $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

$$\mathcal{M} = -e^2 \frac{[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)] [\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)]}{(p_1 - p_3)^2}$$

Límite no relativista: $|\mathbf{p}| \ll m$

$$\bar{u}^{s'}(p')\gamma^0 u^s(p) \rightarrow 2m\delta_{s's}, \quad \bar{v}^{s'}(p')\gamma^0 v^s(p) \rightarrow 2m\delta_{s's}$$

$$\bar{u}^{s'}(p')\gamma^i u^s(p) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \ll m, \quad \bar{v}^{s'}(p')\gamma^i v^s(p) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \ll m$$

Entonces:

$$\mathcal{M} = -e^2 \frac{4m^2}{-(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2} \delta_{s_1, s_3} \delta_{s_2, s_4} \xrightarrow{\text{norm.}} e^2 \frac{2m}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2}$$

Aproximación de Born

Mecánica cuántica no relativista: podemos pensar en que la interacción está producida por un potencial V

La amplitud de QFT va a estar asociada a:

$$\mathcal{M} \leftrightarrow \langle \mathbf{p} | V | \mathbf{p}' \rangle$$

$\langle \mathbf{p} | V | \mathbf{p}' \rangle$ se puede calcular usando la fórmula de Born. La relación es

$$\mathcal{M} = -\frac{m}{2\pi} \tilde{V}(\mathbf{q}),$$

donde

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tilde{V}(\mathbf{q})$$

Potencial de Coulomb

En nuestro caso $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$, entonces

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tilde{V}(\mathbf{q}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{(-2\pi)}{m} \mathcal{M} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{(-2\pi)}{m} \left[e^2 \frac{2m}{(\mathbf{q})^2} \right] \\ &= -e^2 \frac{1}{2\pi^2} \int d^3\mathbf{q} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2} = -\frac{e^2}{|\mathbf{r}|} \end{aligned}$$

Potencial de Coulomb atractivo