> Gentlemen! The views of space and time which I want to present to you arose from the domain of experimental physics, and therein lies their strength. Their tendency is radical. From now onwards space by itself and time by itself will recede completely to become mere shadows and only a type of union of the two will still stand independently on its own.
>
> *Hermann Minkowski, Space and Time (1908)*

La teoría cuántica de campos que estudiaremos es una teoría invariante ante el grupo de simetrías relativistas. Este grupo es el de Poincaré, el cual contiene al grupo de Lorentz. Gracias al aporte de Minkowski, este grupo puede pensarse como el grupo de transformaciones que deja invariante a una métrica pseudoeculídea que lleva su nombre. En esta guía veremos aspectos de este grupo y su álgebra, comenzando con su análogo euclídeo. Veremos cómo aparecen los espinores como representación del grupo de Lorentz y cómo las ecuaciones de onda relativistas manifiestan la simetría de Poincaré. Todo el análisis de esta guía es estrictamente clásico, por lo que no debe pensarse a ninguno de los campos de las ecuaciones relativistas como funciones de onda en una teoría cuántica.

Preliminares: grupo Euclídeo

1 Considere las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^D$ que dejan invariante la forma cuadrática $x^T x$, siendo $x \in \mathbb{R}^D$.

(a) Muestre que la matriz M que implementa la transformación lineal debe cumplir $M^T M = \mathbb{I}$, y como consecuencia de esto $|\det(M)| = 1$. El grupo de matrices que cumple $M^T M = \mathbb{I}$ se conoce como grupo ortogonal y se lo denota como $O(D)$.

(b) Al subgrupo de matrices de $O(D)$ con determinante $+1$ se lo denomina $SO(D)$ ("S" por "special"). Argumente que para el subgrupo de matrices de $O(D)$ conectadas continuamente con la identidad el determinante debe ser $+1$. (Ocurre que la condición determinante $+1$ garantiza que la matriz se halla en el subgrupo conectado con la identidad, de modo que $SO(D)$ tiene una sola componente conexa que incluye a la identidad).

2 Una matriz cualquiera M del grupo $SO(D)$ puede escribirse como la exponencial de otra: $M = e^A$. El conjunto de matrices que aparecen en la exponencial forman un álgebra, tomando el corchete como el conmutador entre matrices.

(a) Muestre que esta matriz A debe ser antisimétrica.

(b) Definimos la *dimensión* de un grupo de Lie como la dimensión del espacio vectorial de su álgebra asociada. A partir del inciso anterior, muestre que la dimensión de $SO(D)$ es $D(D-1)/2$.

(c) Los generadores del espacio vectorial de matrices antisimétricas (cuya exponencial genera el grupo) pueden escribirse convenientemente en términos de una colección de matrices Σ_{IJ} ($I = 1...D$), siendo por defineión $\Sigma_{IJ} = -\Sigma_{JI}$ (Note que aquí I y J no son las componentes de la matriz sino un doble índice que etiqueta cada matriz). En términos de estas, la matriz M de $SO(D)$ puede escribirse como:

$$M = e^{\frac{1}{2}\Sigma_{IJ}\omega^{IJ}}$$

siendo ω^{IJ} parámetros reales sujetos a la relación $\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$. Para el caso $D = 3$, halle un conjunto de matrices Σ_{IJ} y parámetros ω^{IJ} en términos de los generadores y ángulos usuales de rotación que expresan la rotación en torno a un eje. Relacione el indice IJ con el plano de rotación.

$\boxed{3}$ De las propiedades del grupo $SO(D)$ se puede ver que las matrices Σ_{IJ} satisfacen:

$$[\Sigma_{IJ}, \Sigma_{MN}] = \delta_{IN}\Sigma_{JM} + \delta_{JM}\Sigma_{IN} - \delta_{IM}\Sigma_{JN} - \delta_{JN}\Sigma_{IM}$$

Verifique en el caso $D = 3$ estas relaciones (en física, suelen redefinirse los generadores multiplicándolos por i de modo que resultan ser matrices hermíticas. Con esta redefinición, aparece un factor i en el miembro derecho y algún signo). Verifique también la antisimetría que debe existir al permutar los índices I, J, M, N.

$\boxed{4}$ Considere ahora una transformación que involucre traslaciones en $\mathbb{R}^D$. Denotando por (M, a) a la transformación $X \to MX + a$, siendo a un vector y M una matriz de rotación:

(a) Halle la ley de composición de dos transformaciones consecutivas $(M_2, a_2) \circ (M_1, a_1)$. Es decir, exprese el resultado de la composición de estas dos como una nueva transformación (M_3, a_3)

(b) Considerando $(M_2, a_2) \circ (M_1, a_1) - (M_1, a_1) \circ (M_2, a_2)$ a primer orden en los parámetros de rotación y traslación, halle las reglas de conmutación entre los generadores de la traslación y rotación.

Una traslación no deja invariante la forma $X^T X$ pero sí la distancia euclídea entre dos puntos: $(X - Y)^T (X - Y)$. Es por eso que al grupo de rotaciones más traslaciones se lo denomina *grupo euclídeo.*

$\boxed{5}$ Las representaciones de $SU(2)$ (que localmente es equivalente a $SO(3)$) se pueden construir a partir de representaciones de otro álgebra, el *álgebra de Clifford*

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}1_{N\times N}\,,$$

con $i, j = 1, 2, 3$, siendo γ^i matrices de dimensión $N \times N$. Para el caso $N = 2$ existe una elección única, a menos de cambios de base, para matrices de 2×2, que corresponde a $\gamma_i = \sigma_i$, donde las σ_i ($i = 1,\ 2,\ 3$) son las matrices de Pauli.

(a) Muestre que $\Sigma_{ij} \equiv \frac{i}{4}[\sigma_i, \sigma_j]$ son generadores del álgebra $su(2) \approx so(3)$. A esa representación del grupo $SU(2)$ por medio matrices de 2×2 se la denomina *espinorial* (aclaración: no hay que hacer mucho en este ejercicio. La motivacion es reescribir los generadores de $su(2)$ en forma similar a los del ejercicio 13b).

(b) Un espinor es una representación de $SU(2)$ dada por una 2-upla $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$, en la que la acción del grupo $SU(2)$ es

$$\xi \to e^{i\frac{1}{2}\omega_{ij}\Sigma_{ij}}\xi$$

Verifique que esa es la ley de transformación de espinores que conoce.

Grupo y álgebra de Poincaré

6 Considere una transformación dada por una matriz Λ

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_{.\nu} x^\nu \,, \tag{1}$$

que deje invariante la forma $x^T \eta x$, siendo x una coordenada de un punto del espacio-tiempo 4 dimensional y

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \tag{2}$$

En componentes, $x^T \eta x = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Al grupo de transformaciones lineales que deja esa forma cuadrática invariante se lo llama *grupo de Lorentz*.

Halle la condición análoga a la del grupo de rotaciones (Ejercicio 1.a) para la matriz Λ. Muestre que la matriz λ definida por $\Lambda = e^\lambda$ satisface $\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}$, siendo $\lambda_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\rho}\lambda^\rho_\nu$. Escriba explícitamente las matrices de la base del álgebra.

7 Para el caso del grupo de Lorentz, la condición determinante igual a 1 no es suficiente para caracterizar la parte conectada continuamente con la identidad. Busque en la literatura cuáles son las 4 componentes conexas del grupo $SO(3,1)$ y cuál de estas esta conectada continuamente con la identidad.

8 Muestre que las relaciones entre los generadores $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ que definen el álgebra de Lorentz

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho})$$

pueden re-escribirse como:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k$$

con $J_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}$ y $K_i \equiv M_{i0}$.

9 Definiendo $\bar{A} = \frac{1}{2}(\bar{J} - i\bar{K})$ y $\bar{B} = \frac{1}{2}(\bar{J} + i\bar{K})$ (siendo J_i y K_i los generadores de las rotaciones y boost respectivamente) muestre que el álgebra de Lorentz es suma directa de dos $su(2)$. De aquí se desprende que las representaciones del grupo de Lorentz se etiquetan por el par de semienteros (j_1, j_2), que corresponden al espín de la representación de cada $su(2)$.

10 El grupo de Poincaré es el análogo al grupo Euclídeo definido en el Ejercicio 4. Escriba esquemáticamente las relaciones de conmutación del álgebra de Poincaré.

Ecuaciones de onda relativistas

11 Considere la ecuación de (Oskar)Klein - (Walter)Gordon:

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

siendo ϕ una función de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{C}$. ϕ puede considerarse como una representación del grupo de Lorentz del tipo $(0,0)$ (ver Ejercicio 9).

(a) Muestre que si ϕ es solución, también lo es $\phi \circ (\Lambda, a)$ (invariancia de Poincaré de la ecuación).

(b) Verifique que esta ecuación es invariante ante el grupo discreto de transformaciones C y P y T, siendo C la operación de conjugar, P la composición con inversión espacial y T la composición con inversión temporal.

12 Considere la ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo.

(a) Muestre que la cantidad (llamada *corriente*, por su interpretación como corriente conservada que se verá en la guía siguiente) $j_\mu \equiv -\frac{i}{2}(\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*)$ satisface la ecuación de continuidad $\partial_u j^u = 0$ si φ satisface la ecuación de Klein-Gordon.

(b) Evalúe la corriente para las soluciones de frecuencia positiva y negativa $\varphi_\pm(x,t) = e^{\mp ikx}$, siendo $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

(c) Muestre que la componente j_0 no es definida positiva (o negativa) en el espacio de soluciones generado por soluciones de frecuencia positiva y negativa.

13 Considere ahora la ecuación de Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0$$

siendo Ψ una función del espacio-tiempo en $\mathbb{C}^4$. Las γ^μ son matrices que cumplen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} 1_{4\times4}$. Por cada solución Ψ de la ecuación de Dirac, es posible generarse otra solución $\tilde{\Psi}$, definida por $\tilde{\Psi}(x) \equiv S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)$, con $S(\Lambda)$ una matriz asociada a la transformación de Lorentz.

(a) Muestre que S debe cumplir: $S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$.

(b) Compruebe que $S \equiv e^{\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$, con $\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, satisface la condición previa a primer orden en el parámetro $\omega^{\mu\nu}$ de la transformación de Lorentz Λ.

14 La representación del grupo de Lorentz (incluyendo paridad) de dimensión más baja es una suma directa de representaciones de espín $\frac{1}{2}$: $(\frac{1}{2}, 0) + (0, \frac{1}{2})$. Esta es la representación *espinorial*. A fin de ver esto, considere la llamada *representación quiral* de las matrices de Dirac, en las que el único cambio respecto a la representación estandard es en $\gamma^0_{quiral} = \begin{bmatrix} 0 & 1_{2\times2} \\ 1_{2\times2} & 0 \end{bmatrix}$

(a) Muestre que una transformación de Lorentz preserva espinores de la forma $\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix}$.

(b) Calcule los generadores A y B del Ejercicio 9 en esta representación y verifique que los dos tipos de espinores del inciso anterior corresponden a la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$.

15 Definiendo $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, muestre que:

(a) $(\gamma^5)^2 = 1$ y esta tiene dos autovectores con autovalor ± 1. Se dice que cada uno de estos tiene *quiralidad definida.*

(b) Verifique que la operación paridad intercambia espinores con quiralidad opuesta.

(c) Muestre que γ^5 conmuta con S y por tanto la noción de quiralidad es invariante de Lorentz.

(d) Muestre que, en la representación quiral, γ^5 adopta la forma $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, y por tanto, las representaciones del ejercicio anterior corresponden a quiralidad -1 y $+1$ respectivamente.

16 Verifique que las matrices Σ satisfacen el álgebra de Lorentz. (Ayuda: use resultados del Ejercicio 14 sobre el conmutador $[\gamma_\mu, \Sigma_{\nu\rho}]$ y utilice la identidad de Jacobi).

17 Encuentre las propiedades de transformación de las siguientes formas bilineales:

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi, \quad \bar{\Psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}\Psi.$$

18 **Conjugación de Carga**:

(a) Muestre que si Ψ es solución de la ecuación de Dirac, también lo es $\Psi^c \equiv C\Psi^*$, siendo C una matriz que cumple:

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^*$$

(b) Verifique que en la representación estandard y quiral, C puede elegirse como $i\gamma^2$.

(c) Existe una representación en la que todas las matrices γ son imaginarias puras, conocida como *representación de Majorana*. Busque en la bibliografía la expresión de las matrices γ en esta reprepresentación y muestre que la operación de conjugación de carga se reduce a la conjugación ordinaria.

19 (a) Halle la expresión de la matriz $S(\Lambda)$ para un boost en una dirección determinada.

(b) Construya las soluciones tipo onda plana de la ecuación de Dirac, usando la representación standard para las matrices de Dirac. Para ello, aplique un boost sobre los espinores $\Psi(x) = u(0)e^{-imt}$, $\Psi(x) = v(0)e^{imt}$ correspondientes a una partícula en reposo (Necesitará recordar quienes son $u(0)$ y $v(0)$ para que $\Psi(x)$ sea solución de la ecuación de Dirac). Exprese el resultado en términos del parámetro del boost.

(c) Elimine el parámetro del boost, expresando el resultado en términos del cuadrimomento k^μ que resulta de aplicar el boost al cuadrimomento de la solución en reposo $(m, 0, 0, 0)$. Muestre entonces que las soluciones adoptan la forma

$$\begin{aligned} u(k) &= c(\mathbf{k})e^{-ik^\mu x_\mu} \begin{bmatrix} \xi \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{k^0+m}\,\xi \end{bmatrix}, \qquad (3) \\ v(k) &= c(\mathbf{k})e^{+ik^\mu x_\mu} \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{k^0+m}\,\xi \\ \xi \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Siendo $c(\mathbf{k})$ una constante dependiente del cuadrimomento. Verifique que ambas soluciones cumplen la ecuación de Dirac. Halle la constante c a partir de la invariancia de $\bar{\Psi}\Psi$ ante transformaciones de Lorentz.

20 Muestre que las soluciones de tipo u y v halladas anteriormenete están relacionadas por la operación conjugación de carga.

Conceptos y definiciones relevantes de esta guía: **grupo de Lorentz/Poincaré (álgebra vs grupo), boost, espinor de Dirac, espín, álgebra de Clifford y sus representaciones.**