En esta guía vamos a explorar la relación general entre campos cuantizados y partículas en el caso simple del campo de Klein-Gordon, que tiene asociado un espacio de Fock para partículas que obedecen la estadística de Bose.

---

30 Considere la cuantización canónica de un campo de Klein-Gordon real de masa m.

(a) Usando la expresión $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\left(\hat{a}_\mathbf{k}e^{-ik^\mu x_\mu}+\hat{a}^\dagger_\mathbf{k}e^{ik^\mu x_\mu}\right)$, verifique que este operador local (dependiente del punto del espacio tiempo) cumple la ecuación de Klein Gordon y que el campo es real (es absolutamente trivial, pero es bueno hacer ambas cuentas al menos una vez. Recuerde que el cuadrivector k en las exponenciales tiene como componente temporal a $k_0 = k^0 = \omega_k \equiv \sqrt{\vec{k}^2+m^2}$)

(b) Utilizando las relaciones de conmutación entre $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$, obtenga las relaciones de conmutación entre los operadores de creación y destrucción.

31 Los operadores de creación y destrucción actúan en un espacio de Hilbert (un espacio de Fock), que contiene un estado aniquilado por los de destrucción (el estado de vacío). Las transformaciones de Poincaré $x \to \Lambda x + a$ forman un grupo de simetrías de la teoría cuántica y por tanto cada transformación de este grupo tiene un operador unitario asociado que actúa en ese espacio de Hilbert. Como es usual en el picture de Heisenberg, estos operadores actúan en los campos de operadores de la siguiente forma: $\hat{\phi}(x) \to U(\Lambda,a)\hat{\phi}(x)U^\dagger(\Lambda,a) = \hat{\phi}(\Lambda x + a)$

(a) Escriba la expresión de los operadores $U(1,a)$ asociados a una traslación espacio-temporal de parametro a^μ en términos de los operadores de creación y destrucción.

(b) ¿Cómo construiría los operadores unitarios asociados a boost y rotaciones? No se espera que halle su expresión sino que indique la manera de encontrarlos.

(c) Verifique que $U(\Lambda,a)\hat{\phi}(x)U^\dagger(\Lambda,a) = \hat{\phi}(\Lambda x + a)$ para el caso de una traslación pura y a primer orden en el parámetro a.

(d) Usando que el vacío es aniquilado por el operador de destrucción, argumente por qué espera que el vacío sea invariante de Poincaré en base a la forma general que espera que tengan los operadores unitarios $U(\Lambda,a)$.

32 **Interpretación de partícula.** A partir del estado de mínima energía (denominado *vacío* por su interpretación como estado desprovisto de partículas y denotado por $|0\rangle$) puede construirse todo el espacio de Hilbert mediante la acción de los operadores de creación. A fin de ver esto:

(a) Muestre que un estado de la forma $\prod_{i=1}^n \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle$ es autoestado del Hamiltoniano y el operador momento con autovalores iguales a $\sum_{i=1}^n \omega_{\mathbf{k_i}}$ y $\sum_{i=1}^n \mathbf{k_i}$ respectivamente.

(b) Verifique que el estado anterior es autoestado del operador *número* definido como $\hat{N} = \int d^3\mathbf{k}\,\hat{a}^\dagger_\mathbf{k}\,\hat{a}_\mathbf{k}$ con autovalor n.

33 Un estado de la forma $\hat{a}^\dagger_\mathbf{k}|0\rangle$ puede considerarse como el estado de una partícula de cuadrimomento definido $(\omega_\mathbf{k},\mathbf{k})$. Este tipo de estado no está en el espacio de Hilbert, como puede verse al calcular formalmente su norma. Esto es análogo a lo que ocurre en mecánica cuántica no relativista (ausencia de estados con momento definido; estos están fuera del Hilbert). Sin embargo, *suavizando* la expresión anterior con una función de los momentos espaciales que decaiga suficientemente rápido para momentos grandes, puede obtenerse un estado del espacio de Hilbert.

(a) Considere ahora dos funciones de $\mathbb{R}^3$ f_1 y f_2 (pensadas como funciones de los momentos espaciales). Halle el producto interno entre los estados: $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{\omega(\mathbf{k})}} f_1(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} |0\rangle$ y $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{\omega(\mathbf{k})}} f_2(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} |0\rangle$. Exprese el resultado como una integral que involucre a f_1 y f_2. (el factor $1/\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}$ podría absorberse en la definición de f pero se escribió así por razones que quedaran claras en el inciso siguiente)

(b) Muestre que este producto es invariante de Lorentz. Es decir, que la integral anterior no se altera si se usa en vez de f una función compuesta con una transformación de Lorentz (ayuda: escriba la integral en los momentos espaciales como una integral en el cuadrimomento pesado con una δ que imponga la condición de *capa de masa*: $k^2 = m^2$).

Observación: pensado como una teoría de partículas, el producto interno en el Hilbert de n partículas (espacio de Fock) es análogo al de la mecánica cuántica no relativista, pero modificando la medida de integración $d^3\mathbf{k}$ por $\frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}}$.

34 El ejercicio anterior permite entender por qué en el enfoque riguroso el campo se trata como una funcional o distribución, siendo su argumento no un punto del espacio-tiempo sino una función de este último. La vinculación entre nuestro enfoque y el riguroso es a través de:

$$\hat{\phi}(f) = \int d^4x \hat{\phi}(x) f(x)$$

siendo f una función arbitaria del espacio-tiempo (con alguna propiedad de decaimiento en infinito). Para el caso de campos libres puede utilizarse una función del espacio solamente, de forma de mantener la dependencia del campo respecto al tiempo:

$$\hat{\phi}(t,h) \equiv \int d^3\mathbf{x}\, \hat{\phi}(\mathbf{x},t) h(\mathbf{x})$$

Muestre que $\hat{\phi}(t,h)|0\rangle$ es un estado del Hilbert como el del ejercicio 33.

35 **Interpretación de partícula.** El objetivo de este problema es analizar en qué medida la teoría del campo escalar real libre, restringida a los estados de una partícula, puede ser considerada como una generalización relativista de la teoría de Schrödinger, y el operador $\hat{\phi}(x)$ puede ser asimilado a un operador de creación de una partícula en un punto del espacio.

(a) Mostrar que los vectores $\hat{\phi}(t,\mathbf{x})$ a tiempo t fijo generan todo el espacio de Hilbert H_1 de una partícula.

(b) Se define $|t,\mathbf{x}\rangle := \hat{\phi}(t,\mathbf{x})|0\rangle$ (supuestos vectores de una partícula localizados) y la función $\Psi(t,\mathbf{x}) := \langle t,\mathbf{x}|\,\Psi\rangle$, con $|\Psi\rangle \in H_1$ (supuesta función de onda de una partícula). Probar que $\Psi(t,\mathbf{x})$ satisface la ecuación de Klein-Gordon. Mostrar que además contiene sólo frecuencias positivas, y por ello satisface una ecuación más restrictiva, de primer orden en derivadas temporales

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,\mathbf{x}) = +\sqrt{m^2-\nabla^2}\Psi(t,\mathbf{x}) \;.$$

Mostrar que en este caso la corriente conservada de Klein-Gordon da lugar a una probabilidad conservada y positiva, pero la densidad de probabilidad no es definida positiva.

(c) Mostrar que, sin embargo, $\langle t,\mathbf{x}|\,t,\mathbf{y}\rangle$ no es proporcional a la delta de Dirac y que los estados $|t,\mathbf{x}\rangle$ están localizados en un tamaño típico $\Delta x \sim 1/m$ (al restaurar unidades, esta es longitud de Compton $\frac{\hbar}{mc}$). Este resultado ejemplifica la dificultad de definir la noción de localización en una teoría relativista.

$\boxed{36}$ El valor de expectación del campo en el vacío es igual a cero. Sin embargo, el hecho de que el vacío es un estado no trivial se manifiesta en el valor expectación en vacío no nulo de productos de campos, evaluados en n puntos del espacio-tiempo diferentes $\langle 0|\,\hat{\phi}(x_1)...\hat{\phi}(x_n)\,|0\rangle$. A estos valores de expectación se los denomina *funciones de n-puntos*, siendo funciones de los n-puntos del espacio tiempo $x_1, ...x_n$. Estas funciones de n-puntos (para n par) se pueden descomponer en productos de funciones de dos puntos (en teorías libres).

(a) Calcule formalmente la expresión de $\langle 0|\,\hat{\phi}(\mathbf{x},0)\hat{\phi}(\mathbf{y},0)\,|0\rangle$, dejándola expresada como una integral en una sola variable y muestre que no es posible que la integral sea cero trabajando la expresión a fin de relacionarla con funciones de Bessel modificadas. Observe que el resultado es distinto de cero y apreciable para distancias menores que m (al restaurar unidades, esta es longitud de Compton $\frac{\hbar}{mc}$). Si hicieron el inciso (c) del ejercicio anterior esto ya está resuelto.

(b) Halle análogamente la expresión de la función de dos puntos $\langle 0|\,\hat{\phi}(\mathbf{x},t_1)\hat{\phi}(\mathbf{x},t_2)\,|0\rangle$ (es decir, la función a puntos espaciales iguales y tiempos distintos).

$\boxed{37}$ Verifique la invariancia de Poincaré de la función de dos puntos para dos puntos x e y arbitrarios.

(a) Observando la expresión resultante como integral en los momentos espaciales y usando la invariancia de la medida de integración.

(b) Usando la forma en que transforman los operadores de campo

$$\hat{\phi}(\Lambda x + a) = U^\dagger(\Lambda, a)\hat{\phi}(x)U(\Lambda, a)$$

y la invariancia del vacío ante una transformación de Poincaré.

(c) Concluya entonces que la función de dos puntos sólo depende del valor de la distancia Minkowskiana $(x-y)^2$ (y además del signo de $t_2 - t_1$ en el caso en que están temporalmente separados), mostrando comportamientos cualitativamente diferentes según si la distancia es espacial o temporal.

$\boxed{38}$ **Condición de microcausalidad.** Considere un campo de Klein Gordon neutro. Muestre que el conmutador $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$ es un número complejo (es decir, un múltiplo del operador identidad) y por tanto es igual a su valor de expectación en vacío (o cualquier estado). A partir de esta observación y los resultados anteriores, muestre que el conmutador es cero para x e y espacialmente separados, es decir para $(x-y)^2 < 0$. Diga por qué no puede decir lo mismo cuando están temporalmente separados (observación: note que para el caso del campo escalar complejo, los conmutadores entre $\hat{\phi}$ y $\hat{\phi}^\dagger$ serán idénticamente cero).

$\boxed{39}$ **Idea de demostración del teorema espín-estadística.** Considere el campo escalar neutro y suponga ahora que los operadores de creación y aniquilación satisfacen reglas de anticonmutación. Muestre que el anticonmutador de los campos es diferente de cero para puntos espacialmente separados. (Sugerencia: considere los puntos x e y a tiempos iguales, escriba la expresión como un integral en los momentos y muestre que no es posible que la integral sea cero trabajando la expresión a fin de relacionarla con funciones de Bessel modificadas). Piense por qué esta condición de conmutación implica que los estados en el espacio de Fock serán simétricos ante permutación de partículas.

$\boxed{40}$ Reconsidere los ejercicios 30 y 36, así como la expresión del operador Hamiltoniano y momento del campo para el caso del campo escalar complejo. Note que ahora algunas funciones de 2-puntos serán nulas.

$\boxed{41}$ Para el caso del campo escalar complejo, hay una cantidad conservada asociada a la invariancia ante multiplicar el campo por una fase. Halle la expresión de esta a nivel cuántico y muestre que este operador cuenta el número de partículas creadas por $a^\dagger$ menos el numero de partículas creadas por $b^\dagger$.

$\boxed{42}$ **Propagador del oscilador armónico cuántico.** El propagador es una cantidad que será relevante para la expresión de la matriz de Scattering cuando se introduzcan interacciones. Considere la cuantización canónica de un oscilador armónico unidimensional X de frecuencia ω (y masa $m = 1$ por simplicidad).

(a) Calcule la función de dos variables $\langle 0| \hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2) |0\rangle$ siendo $\hat{X}$ el operador posición en la representación de Heisenberg, t_1 y t_2 dos instantes arbitrarios y $|0\rangle$ el estado de vacío.

(b) Muestre que la función $i \langle 0| T(\hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2)) |0\rangle$ (donde $T(...)$ significa que los operadores dentro del paréntesis deben estar ordenados temporalmente) es una función de Green del operador diferencial $\partial_t^2 + \omega^2$.

$\boxed{43}$ **Propagador del campo escalar neutro o complejo**

(a) Exprese

$$D(x-y) \equiv \langle 0|T(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y))|0\rangle$$

como una suma de dos funciones de dos puntos pesadas adecuadamente (en el caso del campo neutro, la expresión final es la misma).

(b) Exprese el resultado como la transformada de Fourier de

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\epsilon \to 0)$$

Muestre esto mediante integrales en el plano complejo, en caminos que esquiven los polos dados por ϵ, ubicados en distintos lugares segun sea ϵ positivo o negativo.

(c) Muestre que se cumple $(\Box_x + m^2)D(x-y) = -i\delta^4(x-y)$.