En esta guía estudiaremos la vinculación entre las amplitudes calculadas en la guía anterior y cantidades observables en experimentos de física de partículas, tales como la sección eficaz y vida media.

---

75 Para el cálculo posterior de la sección eficaz, es útil aislar una cantidad invariante de Lorentz de la expresión de la matriz de Scattering, aislando factores dependientes del momento de las partículas iniciales y finales. Si S es la matriz de Scattering y S_{fi} su elemento de matriz para estados iniciales y finales i y f, la cantidad M_{fi} se define a partir de:

$$(S-1)_{fi} = i(2\pi)^4\delta^4(k_f - k_i)M_{fi}\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_i}}$$

siendo N el numero total de partículas.
Verifique que en los casos de la guía anterior esta cantidad es invariante de Lorentz y que en esos casos (procesos del tipo $1+2 \to 3+4$) puede escribirse en términos de las *variables de Mandelstan*, invariantes de Lorentz:

$$\begin{aligned}
s &= (k_1+k_2)^2 = (k_3+k_4)^2 \\
t &= (k_1-k_3)^2 = (k_2-k_4)^2 \\
u &= (k_1-k_4)^2 = (k_2-k_3)^2
\end{aligned}$$

76 **Sección eficaz.** La sección eficaz se define para un proceso de N particulas, con dos particulas iniciales y $N-2$ finales. Su expresión se obtiene a partir de un cálculo relativamente simple pero feo (aunque en algunos libros se hace con prolijidad, ver por ejemplo las páginas 232-234 del libro de Ryder) y se expresa en terminos de la amplitud M_{fi} de Feynman de la siguiente manera (la expresión asume que se usa un sistema de referencia *colineal* en que las partículas incidentes tienen sus velocidades en la misma dirección):

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \mid M_{fi}\mid^2 \delta^4(k_f-k_i)}{4\sqrt{(k_1k_2)^2 - {m_1}^2{m_2}^2}}\prod_{i=3}^{N}\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3 2\omega_i}$$

Considere el caso particular en que $N=2$ (es decir, dos partículas iniciales y dos finales) y que las partículas son bosónicas.

(a) Muestre que para el caso de un proceso *elástico* (partículas finales iguales a las iniciales) la expresión de la sección $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ en el sistema centro de masa es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2(E_1+E_2)^2}\mid M_{fi}\mid^2$$

siendo E_1 y E_2 las energías de las partículas en el sistema centro de masa y Ω el ángulo sólido asociado al momento de una de las partículas elegidas para parametrizar el estado final.

(b) Repita el cálculo para el caso general de un proceso inelástico. Puede considerar para simplificar que se trata de un proceso en que tanto las partículas inciales como las finales tienen la misma masa.

(c) En la deducción de la sección eficaz, en realidad aparece el factor $\frac{1}{E_1E_2|\vec{V_2}-\vec{V_1}|}$ que no es explícitamente invariante de Lorentz. De todas formas, si bien las energías y la velocidad relativa $\mid \vec{V_2} - \vec{V_1} \mid$ no son invariantes de Lorentz, este producto resulta ser el mismo para todo sistema colieneal, es decir, para todo sistema en que las partículas incidentes se muevan en una misma línea, incluyendo el caso especial en que una de ellas está en reposo. Muestre que en efecto para tales sistemas: $E_1 E_2 \mid \vec{V_2} - \vec{V_1} \mid = \sqrt{(k_1 k_2)^2 - m_1{}^2 m_2{}^2}$.

La inversa de esta cantidad tiene dimensiones de área y su invariancia ante cambios de sistemas colineales es consistente con su interpretación de área de una superficie transversal a la dirección de las partículas. ¿A qué se reduciría este factor en el caso del efecto Compton?

77 Halle la sección eficaz diferencial para el orden más bajo para los procesos:

(a) Scattering de Bhabha.

(b) Scattering de Møller.

(c) Aniquilación y creación de pares.

Considere en todos los casos que las polarizaciones de los estados finales e iniciales están sumadas y promediadas, respectivamente.

78 Discutir los límites ultrarelativista y no-relativista para la sección eficaz de dispersión electrón-positrón en el sistema centro de masa al orden perturbativo más bajo.

79 En el caso del proceso de creación de electrón-positrón a partir de dos fotones, discutir los casos de energía próxima al umbral o mucho mayor que el umbral.

80 Analizar la sección eficaz de Compton en el sistema centro de masa y pasarla al sistema en que el electrón inicial está en reposo. En ese caso, discutir los límites de alta y baja energía del fotón incidente.

81 **Crossing Symmetry.** Sabiendo que un proceso $A + B \to C + D$ tiene amplitud no nula para una elección de momentos k_1, k_2, k_3, k_4 asociados a A, B, C, D respectivamente, también es posible el proceso $A + \overline{C} \to \overline{B} + D$ (donde $\overline{(.)}$ se usa para notar a la antipartícula). Para convencerse de esto:

(a) Vea en general que si era posible satisfacer la conservación de cuadrimomentos en el primer caso, también será posible satisfacerlas en el segundo.

(b) Reconsidere los procesos de Møller y Bhabha. Vea cómo ambos se relacionan por el intercambio de partículas finales y cómo se obtienen los diagramas vistos en la guía anterior (de uno o otro proceso) mediante un pasaje de patas iniciales a finales.

(c) Vea qué regla de sustitución sencilla para los momentos iniciales y finales debe hacer a fin de obtener una sección eficaz a partir de la otra. Esa relación es un ejemplo de lo que se conoce como *crossing symmetry.*

82 **Simetría CPT.** A partir de la invariancia ante transformaciones de (la parte conectada continuamente conectada con la identidad del grupo de) Poincaré, se puede ver que toda teoría cuántica de campos relativista (en el sentido de Wightman) en $3+1$ dimensiones tiene de yapa una simetría discreta denominada CPT que consiste en la operación simultánea de cambiar partícula por antipartícula (C), invertir la dirección del tiempo (T) y hacer una reflexión espacial (P) (estas operaciones se pueden definir sin hacer alusión a la interpretación de partícula). QED en particular es simétrica ante cada operación por separado, pero en el modelo standard por ejemplo ninguna de estas operaciones por separado es simetría.

Para el caso de QED, verifique que la amplitud de Feynman es invariante ante C y T (note que estas simetrías relacionan procesos diferentes). La dificultad mayor del ejercicio reside en entender en qué se traduce la operación de simetría a verificar.

83 **Tasa de decaimiento.** La tasa de decaimiento (o *decay rate*) se define para un proceso en el cual una partícula inicia decae o se transforma en N partículas. Esta tasa es un número que dice cu'al es la probabilidad por unidad de tiempo de que la partícula inicial decaiga en otras. Su expresión es similar a la sección eficaz:

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2E_i} \int \prod_{i=2}^{N} \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3 2\omega_i} \mid M_{fi} \mid^2 \delta^4(k_f - k_i)$$

La *vida media* τ se define como $\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}$.
Verifique que esa cantidad tiene unidades de tiempo y que transforma como debe ante un boost de Lorentz. Busque los valores de vidas medias de algunas partículas elementales y piense en la razon posible de su diferencia.

84 Argumente por qué el vacío debe ser estable (es decir, por qué no puede decaer a nada). ¿Cuáles serían los diagramas de Feynman asociados a este decaimiento y por qué no contribuyen? (piense en $\lambda\phi^4$ para fijar ideas). De la misma manera, argumente que no puede haber decaimiento para la partícula de menor masa en el espectro.

85 Considere el caso de una teoría de dos campos escalares reales, ϕ_1 y ϕ_2, de masa M y m respectivamente, acoplados con un termino de la forma [1]

$$L_{\text{int.}} = -\frac{\lambda}{2!}\phi_1{\phi_2}^2 \, .$$

Asumiendo que $M > 2m$, halle la vida media de las partículas asociadas al campo ϕ_1 al orden más bajo en potencias de λ. Diga qué ocurre en el límite $M \to 2m$ y considere el caso $M < 2m$.

Relaciones útiles para el cálculo de la sección eficaz cuando hay campos de Dirac

(a) Demostrar (o al menos entender qué significan) las siguientes identidades para las trazas de matrices gamma, útiles para el cálculo de la sección eficaz:

(I) $Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$

(II) $Tr(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0$

(III) $Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$

(IV) $Tr(\not{a}_1\not{a}_2..\not{a}_{2n}) = a_1a_2Tr(\not{a}_3...\not{a}_{2n}) - a_1a_3Tr(\not{a}_2...\not{a}_{2n}) + a_1a_{2n}Tr(\not{a}_2...\not{a}_{2n-1})$

(b) Demuestre que:

$$\sum_{s,s'=1,2} \mid \bar{u}(\mathbf{k},s)Mu(\mathbf{k}',s') \mid^2 = Tr\left(\gamma_0 M^\dagger \gamma_0 \frac{\not{k}+m}{2m} M \frac{\not{k}'+m}{2m}\right)$$

donde M es una matriz de 4×4 cualquiera y k y k' son momentos arbitrarios que satisfacen $k^2 = m^2$ (Nota: esta relación es crucial para el cálculo de la sección eficaz y permite sacar provecho a las relaciones del ejercicio precedente).

[1]Este modelo tiene un pequeno problema con la energía. No debe tomarse en serio, lo utilizamos sólo para ejemplificar el cálculo de τ.