Esta una guía introductoria al uso de integrales de camino en mecánica cuántica no relativista.

---

86 Obtener una representación mediante una integral de camino para la amplitud de transición $\langle p'', t''|\, p', t'\rangle$, correspondiente a una partícula en una dimensión espacial, tal que su momento a los tiempos t' y t'' es p' y p'', respectivamente.

87 Considere un Lagrangiano de la forma $L = \frac{1}{2} f(q)\dot{q}^2 - V(q)$. Muestre que

$$\langle q_f,\, t_f | q_i,\, t_i\rangle \neq \int \mathcal{D}q\, e^{i\int_{t_i}^{t_f} dt\, L}\, .$$

Encuentre la expresión correcta.

88 Considere un Lagrangiano de la forma

$$L = a(t)\dot{x}^2 + b(t)x\dot{x} + c(t)x^2 + d(t)\dot{x} + e(t)x + f(t)\, .$$

Definiendo el propagador

$$K(b, a) = \langle q_b,\, t_b | q_a,\, t_a\rangle \theta(t_b - t_a)\, ,$$

demuestre que

$$K(b, a) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{cl.}}[b,a]} F(t_b - t_a)\, ,$$

donde $S_{\text{cl.}}[b, a]$ es la acción evaluada en la trayectoria clásica .

89 Evaluar la función F del problema anterior para el caso de un oscilador armónico forzado.

90 Verificar que, si $T' > T$,

$$\langle Q'\, T' | \mathbf{T}\left(\hat{p}(t_1)\hat{p}(t_2)\right) | Q\, T\rangle = \int \mathcal{D}q\, \mathcal{D}p\, p(t_1)p(t_2) e^{i\int_T^{T'} dt\, (p\dot{q} - H)}\, ,$$

donde $\mathbf{T}(...)$ denota el producto temporalmente ordenado.

91 Considerar una partícula no relativista cuyo hamiltoniano es de la forma

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \lambda V\left(\hat{q}\right)\, , \tag{1}$$

donde λ es una constante. Partiendo de la serie perturbativa (en λ) para la amplitud de transición $\langle q', t'|\, q, t\rangle$, muestre que ésta es la función de Green para la ecuación de Schrödinger correspondiente.

92 Considere el Lagrangiano de un oscilador forzado

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2 + Jq\, .$$

(a) Agregando el término $i\epsilon q^2$ al Lagrangiano, muestre que

$$\langle q_f\,, +\infty | q_i\,, \infty\rangle_J = \langle q_f\,, +\infty | q_i\,, \infty\rangle_{J=0} e^{-\frac{i}{2} JDJ}\, ,$$

donde

$$JDJ = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, dt'\, J(t) D(t - t') J(t')\, ,$$

y

$$D(t) = -\frac{i}{2\omega}\left[\theta(t)e^{-i\omega t} + \theta(-t)e^{i\omega t}\right]\, .$$

(b) Repita los cálculos trabajando en tiempo imaginario $\tau = it$. Muestre que la amplitud de probabilidad es proporcional a

$$e^{\frac{1}{2}\int d\tau\, d\tau' J(\tau) D_E(\tau-\tau') J(\tau')} .$$

Calcule explícitamente la función $D_E(\tau)$ y obtenga $D(t)$ a través de una continuación analítica.

$\boxed{93}$ La integral de camino para $\langle q'', t'' | \, q', t' \rangle$ en el espacio de fases es formalmente invariante ante cambios de variables $(q, p) \longrightarrow (Q, P)$ que correspondan a transformaciones canónicas. Discutir la validez de esta invariancia formal.

$\boxed{94}$ Considere una partícula de masa m sometida a un potencial V que se mueve en una dimensión. La coordenada (cartesiana) de la partícula es x. ¿Cómo será la representación funcional para el propagador $K(b, a)$ si se utiliza una coordenada generalizada $q = q(x)$?

$\boxed{95}$ Considere una partícula que puede moverse libremente sobre un anillo. Calcule el propagador $K(b, a)$ utilizando el formalismo de Schrödinger. Realice también el cálculo usando integrales funcionales. *Ayuda: Considere trayectorias que van desde la posición inicial a la final dando un número arbitrario de vueltas).*

$\boxed{96}$ Repita el problema anterior para una partícula que puede moverse libremente dentro de una caja unidimensional de ancho L (ver por ejemplo: M. Goodman, An. J. Phys. **49**, 843 (1981)).

$\boxed{97}$ Considere el Lagrangiano $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + L_{\text{int}}$ con

$$L_{\text{int}} = -\frac{\lambda_3}{3!}q^3 - \frac{\lambda_4}{4!}q^4 .$$

(a) Deducir las reglas de Feynman para el cálculo perturbativo de la funcional generatriz $Z[J]$ en potencias de λ_3 y λ_4.

(b) Obtener expresiones para las primeras correcciones no triviales a la función de dos puntos $\langle 0|\mathbf{T}\,(q(t_1)q(t_2)|0\rangle$.

(c) Calcular la corrección al valor de la energía del nivel fundamental.