

Esta es una guía muy breve e introductoria al estudio de la renormalización de las teorías de campos.

Grados de divergencias y criterios de renormalizabilidad

- 102 Considere el Lagrangiano de un campo de Klein Gordon neutro en un espacio tiempo de d dimensiones con un término de interacción $\lambda\phi^4$ y el diagrama de Feynman con n vertices, L líneas internas, E líneas externas y I loops.
- Muestre que el grado de divergencias D es igual a $dL - 2I$.
 - Muestre que valen las siguientes relaciones: $L - I + n = 1$ y $4n = E + 2I$
 - Usando las relaciones precedentes, halle la expresión del grado de divergencia en términos de las líneas externas E y el número de vertices n . Analice la renormalizabilidad y superrenormalizabilidad de esta teoría para distintos valores de d , incluyendo $d = 4$
- 103 Repita el análisis anterior para QED en $d = 4$
- 104 Considere un campo de Klein-Gordon en d dimensiones con una interacción del tipo $g\phi^r$ (r entero positivo ≥ 4), siendo g la constante de acoplamiento.
- Halle las dimensiones de masa δ de la constante g .
 - Halle la expresión de el grado superficial de divergencia en términos de δ , el número de vertices y el numero de patas externas.
 - Analice la renormalizabilidad de cada modelo de acuerdo al signo de δ
- 105 Dibuje diagramas divergentes irreducibles de:
- QED
 - $\lambda\phi^4$
- 106 Suponga que un diagrama de Feynman tiene grado de divergencia D negativo. Significa eso que es convergente? Para responder a esta pregunta considere ejemplos de diagramas a uno y dos loops el caso de QED .

Regularización de integrales divergentes

- 107 Muestre las siguientes identidades de integrales en d dimensiones para los valores de d en que estan bien definidas (el producto entre vectores que aparece en los integrandos es con la metrica de Minkowski):

$$(a) \int d^d k \frac{1}{(k^2 + 2p \cdot k - m^2)^2} = \frac{i(-1)^n \pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(n)(m^2 + p^2)^{n - \frac{D}{2}}} \Gamma(n - \frac{D}{2})$$

$$(b) \int d^d k \frac{k^\mu}{(k^2 + 2p \cdot k - m^2)^2} = \frac{-i(-1)^n \pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(n)(m^2 + p^2)^{n - \frac{D}{2}}} p^\mu \Gamma(n - \frac{D}{2})$$

- 108 Considere la contribución en el canal s a la función de 4 puntos de la teoría del ejercicio 1, a orden λ^2 .

- Muestre que, a menos de factores, esta contribución esta dada por la integral divergente $\int^4 d^4 p \frac{1}{p^2 - m^2} \frac{1}{(p - q)^2 - m^2}$, siendo q la suma de los momentos iniciales.
- Mediante la siguiente identidad $\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{z}{(az + b(1-z))^2}$ escriba la generalización de la integral precedente a d dimensiones en la forma $\int_0^1 dz \int d^d p \frac{1}{(p^2 - m^2 + q^2 z(1-z))^2}$

(c) Usando la expansión $\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{\epsilon} + \psi(n+1) + o(\epsilon) \right)$, con n natural y $\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma$ (siendo γ la constante de Euler-Mascheroni) halle la expresión de la integral anterior en el límite $d \rightarrow 4$

109 Mediante el método de regularización dimensional, halle la expresión regularizada de los siguientes diagramas (a un loop):

- (a) Autonergía del electrón.
- (b) Autoenergía del fotón (o polarización del vacío)
- (c) Grafo del vértice.

Renormalización

110 Usando las amplitudes a 1-loop regularizadas, formule los pasos que hay que seguir para obtener la expresión de las constantes de acoplamiento en función de los momentos externos tanto en QED como en $\lambda\phi^4$. Usando las expresiones que encuentre en la bibliografía, muestre que en ambos casos hay un *polo de Landau*.

111 Grafique la solución a la ecuación diferencial para la constante de acoplamiento g , función de la escala μ : $\mu \frac{dg}{d\mu} = \beta g^2$, con β constante, para los casos $\beta = 0$, $\beta > 0$ y $\beta < 0$