Gentlemen! The views of space and time which I want to present to you arose from the domain of experimental physics, and therein lies their strength. Their tendency is radical. From now onwards space by itself and time by itself will recede completely to become mere shadows and only a type of union of the two will still stand independently on its own.

Hermann Minkowski, Space and Time (1908)

La teoría cuántica de campos que estudiaremos es una teoría invariante ante el grupo de simetrías relativistas. Este grupo es el de Poincaré, el cual contiene al grupo de Lorentz. Gracias al aporte de Minkowski, este grupo puede pensarse como el grupo de transformaciones que deja invariante a una métrica pseudoeculídea que lleva su nombre. En esta guía veremos aspectos de este grupo y su álgebra, comenzando con su análogo euclídeo. Veremos cómo aparecen los espinores como representación del grupo de Lorentz y cómo las ecuaciones de onda relativistas manifiestan la simetría de Poincaré. Todo el análisis de esta guía es estrictamente clásico, por lo que no debe pensarse a ninguno de los campos de las ecuaciones relativistas como funciones de onda en una teoría cuántica.

Preliminares: grupo Euclídeo

1 Considere las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^D$ que dejan invariante la forma cuadrática $x^T x$, siendo $x \in \mathbb{R}^D$.

(a) Muestre que la matriz M que implementa la transformación lineal debe cumplir $M^T M = \mathbb{I}$, y como consecuencia de esto $|\det(M)| = 1$. El grupo de matrices que cumple $M^T M = \mathbb{I}$ se conoce como grupo ortogonal y se lo denota como $O(D)$.

(b) Al subgrupo de matrices de $O(D)$ con determinante $+1$ se lo denomina $SO(D)$ ("S" por "special"). Argumente que para el subgrupo de matrices de $O(D)$ conectadas continuamente con la identidad el determinante debe ser $+1$. (Ocurre que la condición determinante $+1$ garantiza que la matriz se halla en el subgrupo conectado con la identidad, de modo que $SO(D)$ tiene una sola componente conexa que incluye a la identidad).

✓ **Resuelto en la sección 1.1.1 de las notas de la práctica.**

2 Una matriz cualquiera M del grupo $SO(D)$ puede escribirse como la exponencial de otra: $M = e^A$. El conjunto de matrices que aparecen en la exponencial forman un álgebra, tomando el corchete como el conmutador entre matrices.

(a) Muestre que esta matriz A debe ser antisimétrica.

(b) Definimos la *dimensión* de un grupo de Lie como la dimensión del espacio vectorial de su álgebra asociada. A partir del inciso anterior, muestre que la dimensión de $SO(D)$ es $D(D-1)/2$.

(c) Los generadores del espacio vectorial de matrices antisimétricas (cuya exponencial genera el grupo) pueden escribirse convenientemente en términos de una colección de matrices Σ_{IJ} (I, $J = 1$, ..., D), siendo por defínción $\Sigma_{IJ} = -\Sigma_{JI}$ (note que aquí I y J no son las componentes de la matriz sino un doble índice que etiqueta cada matriz). En términos de estas, la matriz M de $SO(D)$ puede escribirse como:

$$M = e^{\frac{1}{2}\Sigma_{IJ}\omega^{IJ}} ,$$

siendo ω^{IJ} parámetros reales sujetos a la relación $\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$. Para el caso $D = 3$, halle un conjunto de matrices Σ_{IJ} y parámetros ω^{IJ} en términos de los generadores y ángulos usuales de rotación que expresan la rotación en torno a un eje. Relacione el indice IJ con el plano de rotación.

✓ **Resuelto en la sección 1.1.3 de las notas de la práctica.**

$\boxed{3}$ De las propiedades del grupo $SO(D)$ se puede ver que las matrices Σ_{IJ} satisfacen:

$$[\Sigma_{IJ}, \Sigma_{MN}] = \delta_{IN}\Sigma_{JM} + \delta_{JM}\Sigma_{IN} - \delta_{IM}\Sigma_{JN} - \delta_{JN}\Sigma_{IM}$$

Verifique en el caso $D = 3$ estas relaciones (en física, suelen redefinirse los generadores multiplicándolos por i de modo que resultan ser matrices hermíticas. Con esta redefinición, aparece un factor i en el miembro derecho y algún signo). Verifique también la antisimetría que debe existir al permutar los índices I, J, M, N.

$\boxed{4}$ Considere ahora una transformación que involucre traslaciones en $\mathbb{R}^D$. Denotando por (M, a) a la transformación $X \to MX + a$, siendo a un vector y M una matriz de rotación:

(a) Halle la ley de composición de dos transformaciones consecutivas $(M_2, a_2) \circ (M_1, a_1)$. Es decir, exprese el resultado de la composición de estas dos como una nueva transformación (M_3, a_3)

(b) Considerando $(M_2, a_2) \circ (M_1, a_1) - (M_1, a_1) \circ (M_2, a_2)$ a primer orden en los parámetros de rotación y traslación, halle las reglas de conmutación entre los generadores de la traslación y rotación.

Una traslación no deja invariante la forma $X^T X$ pero sí la distancia euclídea entre dos puntos: $(X - Y)^T(X - Y)$. Es por eso que al grupo de rotaciones más traslaciones se lo denomina *grupo euclídeo.*

✓ **Un ejercicio similar pero aplicado al grupo de Poincaré es el ejercicio 1.11 del libro de Radovanovic.**

$\boxed{5}$ Las representaciones de $SU(2)$ (que localmente es equivalente a $SO(3)$) se pueden construir a partir de representaciones de otro álgebra, el *álgebra de Clifford*

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}1_{N\times N} ,$$

con $i, j = 1, 2, 3$, siendo γ^i matrices de dimensión $N \times N$. Para el caso $N = 2$ existe una elección única, a menos de cambios de base, para matrices de 2×2, que corresponde a $\gamma_i = \sigma_i$, donde las σ_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ son las matrices de Pauli.

(a) Muestre que $\Sigma_{ij} \equiv \frac{i}{4}[\sigma_i, \sigma_j]$ son generadores del álgebra $su(2) \approx so(3)$. A esa representación del grupo $SU(2)$ por medio matrices de 2×2 se la denomina *espinorial* (aclaración: no hay que hacer mucho en este ejercicio. La motivacion es reescribir los generadores de $su(2)$ en forma similar a los del ejercicio 13b).

(b) Un espinor es una representación de $SU(2)$ dada por una 2-upla $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$, en la que la acción del grupo $SU(2)$ es

$$\xi \to e^{i\frac{1}{2}\omega_{ij}\Sigma_{ij}}\xi$$

Verifique que esa es la ley de transformación de espinores que conoce.

Grupo y álgebra de Poincaré

6 Considere una transformación dada por una matriz Λ

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_{.\nu} x^\nu \, ,$$

que deje invariante la forma $x^T \eta x$, siendo x una coordenada de un punto del espacio-tiempo 4 dimensional y

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

En componentes, $x^T \eta x = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Al grupo de transformaciones lineales que deja esa forma cuadrática invariante se lo llama *grupo de Lorentz*.
Halle la condición análoga a la del grupo de rotaciones (Ejercicio 1.a) para la matriz Λ. Muestre que la matriz λ definida por $\Lambda = e^\lambda$ satisface $\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}$, siendo $\lambda_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\rho} \lambda^\rho_\nu$. Escriba explícitamente las matrices de la base del álgebra.
✓ **Resuelto en la sección 1.4.1 de las notas de la práctica.**

7 Para el caso del grupo de Lorentz, la condición determinante igual a 1 no es suficiente para caracterizar la parte conectada continuamente con la identidad. Busque en la literatura cuáles son las 4 componentes conexas del grupo $SO(3,1)$ y cuál de estas esta conectada continuamente con la identidad.
✓ **Resuelto en la sección 1.4.2 de las notas de la práctica.**

8 Muestre que las relaciones entre los generadores $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ que definen el álgebra de Lorentz

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho})$$

pueden re-escribirse como:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k$$

con $J_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} M_{jk}$ y $K_i \equiv M_{i0}$.
✓ **Resuelto en la sección 1.4.3 de las notas de la práctica.**

9 Definiendo $\bar{A} = \frac{1}{2}(\bar{J} - i\bar{K})$ y $\bar{B} = \frac{1}{2}(\bar{J} + i\bar{K})$ (siendo J_i y K_i los generadores de las rotaciones y boost respectivamente) muestre que el álgebra de Lorentz es suma directa de dos $su(2)$. De aquí se desprende que las representaciones del grupo de Lorentz se etiquetan por el par de semienteros (j_1, j_2), que corresponden al espín de la representación de cada $su(2)$.
✓ **Resuelto en la sección 1.4.3 de las notas de la práctica.**

10 El grupo de Poincaré es el análogo al grupo Euclídeo definido en el Ejercicio 4. Escriba esquemáticamente las relaciones de conmutación del álgebra de Poincaré.
✓ **El resultado está dado en la sección 1.5 de las notas de la práctica. En el video de la práctica subido el 27/04 cómo sacar una representación que puede resultar útil.**

Ecuaciones de onda relativistas

11 Considere la ecuación de (Oskar)Klein - (Walter)Gordon:

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

siendo ϕ una función de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{C}$. ϕ puede considerarse como una representación del grupo de Lorentz del tipo $(0,0)$ (ver Ejercicio 9).

(a) Muestre que si ϕ es solución, también lo es $\phi\circ(\Lambda, a)$ (invariancia de Poincaré de la ecuación).

(b) Verifique que esta ecuación es invariante ante el grupo discreto de transformaciones C y P y T, siendo C la operación de conjugar, P la composición con inversión espacial y T la composición con inversión temporal.

✓ **Resuelto en la sección 2.1 de las notas de la práctica.**

$\boxed{12}$ Considere la ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo.

(a) Muestre que la cantidad (llamada *corriente*, por su interpretación como corriente conservada que se verá en la guía siguiente) $j_\mu \equiv -\frac{i}{2}(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*)$ satisface la ecuación de continuidad $\partial_u j^u = 0$ si φ satisface la ecuación de Klein-Gordon.

(b) Evalúe la corriente para las soluciones de frecuencia positiva y negativa $\varphi_\pm(x,t) = e^{\mp ikx}$, siendo $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

(c) Muestre que la componente j_0 no es definida positiva (o negativa) en el espacio de soluciones generado por soluciones de frecuencia positiva y negativa.

✓ **Resuelto en la sección 2.2 de las notas de la práctica.**

$\boxed{13}$ Considere ahora la ecuación de Dirac:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0$$

siendo Ψ una función del espacio-tiempo en $\mathbb{C}^4$. Las γ^μ son matrices que cumplen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}1_{4\times4}$. Por cada solución Ψ de la ecuación de Dirac, es posible generarse otra solución $\tilde{\Psi}$, definida por $\tilde{\Psi}(x) \equiv S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)$, con $S(\Lambda)$ una matriz asociada a la transformación de Lorentz.

(a) Muestre que S debe cumplir: $S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$.

(b) Compruebe que $S \equiv e^{\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$, con $\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, satisface la condición previa a primer orden en el parámetro $\omega^{\mu\nu}$ de la transformación de Lorentz Λ.

✓ **Resuelto en la sección 2.3 de las notas de la práctica.**

$\boxed{14}$ La representación del grupo de Lorentz (incluyendo paridad) de dimensión más baja es una suma directa de representaciones de espín $\frac{1}{2}$: $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$. Esta es la representación *espinorial.* A fin de ver esto, considere la llamada *representación quiral* de las matrices de Dirac, en las que el único cambio respecto a la representación estandard es en $\gamma^0_{quiral} = \begin{bmatrix} 0 & 1_{2\times2} \\ 1_{2\times2} & 0 \end{bmatrix}$

(a) Muestre que una transformación de Lorentz preserva espinores de la forma $\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix}$.

(b) Calcule los generadores A y B del Ejercicio 9 en esta representación y verifique que los dos tipos de espinores del inciso anterior corresponden a la representación $(\frac{1}{2},0)$ y $(0,\frac{1}{2})$.

✓ **Resuelto en la sección 2.3.1 de las notas de la práctica.**

$\boxed{15}$ Definiendo $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, muestre que:

(a) $(\gamma^5)^2 = 1$ y esta tiene dos autovectores con autovalor ±1. Se dice que cada uno de estos tiene *quiralidad definida.*

(b) Verifique que la operación paridad intercambia espinores con quiralidad opuesta.

(c) Muestre que γ^5 conmuta con S y por tanto la noción de quiralidad es invariante de Lorentz.

(d) Muestre que, en la representación quiral, γ^5 adopta la forma $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, y por tanto, las representaciones del ejercicio anterior corresponden a quiralidad -1 y $+1$ respectivamente.

$\boxed{16}$ Verifique que las matrices Σ satisfacen el álgebra de Lorentz. (Ayuda: use resultados del Ejercicio 14 sobre el conmutador $[\gamma_\mu, \Sigma_{\nu\rho}]$ y utilice la identidad de Jacobi).

$\boxed{17}$ Encuentre las propiedades de transformación de las siguientes formas bilineales:

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi, \quad \bar{\Psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}\Psi.$$

✓ **Discutido en el video de la práctica subido el 04/05.**

$\boxed{18}$ **Conjugación de Carga**:

(a) Muestre que si Ψ es solución de la ecuación de Dirac, también lo es $\Psi^c \equiv C\Psi^*$, siendo C una matriz que cumple:

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^*$$

(b) Verifique que en la representación estandard y quiral, C puede elegirse como $i\gamma^2$.

(c) Existe una representación en la que todas las matrices γ son imaginarias puras, conocida como *representación de Majorana*. Busque en la bibliografía la expresión de las matrices γ en esta reprepresentación y muestre que la operación de conjugación de carga se reduce a la conjugación ordinaria.

$\boxed{19}$ (a) Halle la expresión de la matriz $S(\Lambda)$ para un boost en una dirección determinada.

(b) Construya las soluciones tipo onda plana de la ecuación de Dirac, usando la representación standard para las matrices de Dirac. Para ello, aplique un boost sobre los espinores $\Psi(x) = u(0)e^{-imt}$, $\Psi(x) = v(0)e^{imt}$ correspondientes a una partícula en reposo (Necesitará recordar quienes son $u(0)$ y $v(0)$ para que $\Psi(x)$ sea solución de la ecuación de Dirac). Exprese el resultado en términos del parámetro del boost.

(c) Elimine el parámetro del boost, expresando el resultado en términos del cuadrimomento k^μ que resulta de aplicar el boost al cuadrimomento de la solución en reposo $(m, 0, 0, 0)$. Muestre entonces que las soluciones adoptan la forma

$$\begin{aligned} u(k) &= c(\mathbf{k})e^{-ik^\mu x_\mu} \begin{bmatrix} \xi \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{k^0+m}\,\xi \end{bmatrix}, \\ v(k) &= c(\mathbf{k})e^{+ik^\mu x_\mu} \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{k^0+m}\,\xi \\ \xi \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Siendo $c(\mathbf{k})$ una constante dependiente del cuadrimomento. Verifique que ambas soluciones cumplen la ecuación de Dirac. Halle la constante c a partir de la invariancia de $\bar{\Psi}\Psi$ ante transformaciones de Lorentz.

✓ **Parte de este ejercicio está resuelta en la sección 3.3 del libro de Peskin.**

$\boxed{20}$ Muestre que las soluciones de tipo u y v halladas anteriormenete están relacionadas por la operación conjugación de carga.

✓ **Pueden ver por ejemplo el Ejercicio 4.40 del libro de Radovanovic.**

Conceptos y definiciones relevantes de esta guía: **grupo de Lorentz/Poincaré (álgebra vs grupo), boost, espinor de Dirac, espín, álgebra de Clifford y sus representaciones.**

La formulación Lagrangiana de las ecuaciones relativistas es la base de la construcción usual de modelos de *teorías cuánticas de campos* (QFT). Del Lagrangiano que describe la teoría clásica pueden leerse ciertas simetrías que se preservarán al cuantizar. Además de la simetría ante transformaciones del grupo de Poincaré, los términos típicos de los Lagrangianos que estudiaremos presentan *simetrías internas*, es decir, simetrías ante cambios en los campos que no afectan a sus argumentos (el punto del espacio-tiempo del cual dependen). Las cantidades conservadas que se deducen de la simetría del Lagrangiano tendrán un rol importante a nivel cuántico como generadores de simetrías.

---

21 Considere la densidad Lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2$, con ϕ real.

(a) Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange.

(b) Considere ahora la densidad Lagrangiana $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*$, donde ϕ ahora es un campo complejo. Note que ahora no está el factor $\frac{1}{2}$ en el término cinético y en el de masa. Escribiendo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, con ϕ_1 y ϕ_2 reales, obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange para ϕ_1 y ϕ_2 y muestre que ambos cumplen la ecuación de Klein-Gordon.

(c) Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange considerando ϕ y ϕ^* como variables independientes y verifique que obtiene las mismas ecuaciones de movimiento que en el inciso anterior.

✓ **Resuelto parcialmente en la sección 3.1 de las notas de la práctica.**

22 Escriba la forma más general posible del Lagrangiano invariante de Lorentz para un campo cuadrivectorial con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo. ¿A qué se reduce este Lagrangiano en el caso en que además se requiera invariancia ante transformaciones de gauge? Derive las ecuaciones de movimiento y compare con las de Maxwell.

✓ **Resuelto en la sección 3.1 de las notas de la práctica.**

23 Considere la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -i\psi\partial_t\psi^* - \frac{1}{2m}\nabla\psi^*.\nabla\psi - V\psi\psi^*$$

para un campo ψ con V una función del espacio. Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange para ψ y muestre que es la ecuación de Schrödinger, siendo V el potencial.

24 Considere la densidad Lagrangiana del campo escalar complejo del ejercicio 21.

(a) Halle las corrientes de Noether asociadas a la invariancia ante traslaciones espaciales y temporales.

(b) Halle la expresión de la energía y el momento como integrales de ϕ y sus derivadas.

(c) Escribiendo una solución genérica de la ecuación de Klein-Gordon en términos de ondas planas, reescriba las expresiones anteriores como integrales en los momentos espaciales.

(d) Muestre que la energía es definida positiva para cualquier solución de la ecuación de Klein-Gordon, independientemente del signo de la frecuencia.

✓ **Resuelto en la sección 3.2.1 de las notas de la práctica.**

25 Considere la densidad Lagrangiana $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^* - V(\phi\phi^*)$, siendo V algún polinomio (acotado por debajo).

(a) Halle la modificación que sufren las expresiones de la energía y momento del ejercicio anterior.

(b) Encuentre la corriente y carga de Noether asociada a la simetría $\phi \to e^{i\alpha}\phi$, siendo α una constante real.

$\boxed{26}$ Considere ahora el Lagrangiano de un campo de Dirac con masa m.

(a) Derive la ecuación de Dirac como ecuación de Euler-Lagrange de este Lagrangiano.

(b) Halle la expresión de la energía y observe su carácter definido positivo o negativo en el subespacio de soluciones con frecuencia positiva y negativa respectivamente.

✓ **Resuelto en la sección 3.1 de las notas de la práctica.**

$\boxed{27}$ Halle la expresión de la carga conservada asociada a la invariancia ante rotaciones en el caso del Lagrangiano de Klein-Gordon y Dirac. En el último caso distinga la contribución a la carga conservada de la parte orbital e intrínseca (presencia o ausencia respectivamente de derivadas espaciales de los campos).

✓ **Resuelto parcialmente en la sección 3.2.2 de las notas de la práctica.**

$\boxed{28}$ Considere la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$$

siendo $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

(a) Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange. Muestre que para $m \neq 0$, las ecuaciones de movimiento implican $\partial_\mu A^\mu = 0$.

(b) Halle la expresión de la energía. Para el caso $m = 0$ compare con la expresión conocida en términos del campo eléctrico y magnético (observe la relevancia del signo en el término de masa para el carácter definido positivo de la energía).

(c) ¿Por qué se dice que el campo de Proca ($m \neq 0$) tiene tres grados de libertad mientras que el de Maxwell ($m = 0$) dos?

✓ **Discutido en el video de la práctica subido el 18/05.**

$\boxed{29}$ * La acción de Einstein-Hilbert está dada por

$$S = \kappa \int d^4x \sqrt{-g}\, R\,,$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo (curvo), R es el escalar de curvatura y κ es una constante. En la aproximación de campo gravitatorio débil, la métrica puede escribirse como una perturbación pequeña de la métrica plana η

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)\,.$$

La perturbación $h_{\mu\nu}(x)$ es un tensor simétrico de rango dos. En esta aproximación, la acción de Einstein-Hilbert se convierte en una acción en espacio plano

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\sigma h_{\mu\nu}\, \partial^\sigma h^{\mu\nu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}\, \partial^\nu h^{\mu\sigma} + \partial_\sigma h^{\mu\sigma} \partial_\mu h - \frac{1}{2}\partial_\mu h\, \partial^\mu h \right) \,,$$

con $h = h^\mu_\mu$. Derivar las ecuaciones de movimiento para $h_{\mu\nu}$. Estas son las *ecuaciones de Einstein linealizadas*. Mostrar que la teoría linealizada es invariante ante

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu\,,$$

donde $\Lambda_\mu(x)$ es un campo cuadrivectorial arbitrario.

✓ **Ejercicio 5.9 del libro de Radovanovic.**

En esta guía vamos a explorar la relación general entre campos cuantizados y partículas en el caso simple del campo de Klein-Gordon, que tiene asociado un espacio de Fock para partículas que obedecen la estadística de Bose.

---

30 Considere la cuantización canónica de un campo de Klein-Gordon real de masa m.

(a) Usando la expresión $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\left(\hat{a}_\mathbf{k}e^{-ik^\mu x_\mu}+\hat{a}^\dagger_\mathbf{k}e^{ik^\mu x_\mu}\right)$, verifique que este operador local (dependiente del punto del espacio tiempo) cumple la ecuación de Klein Gordon y que el campo es real (es absolutamente trivial, pero es bueno hacer ambas cuentas al menos una vez. Recuerde que el cuadrivector k en las exponenciales tiene como componente temporal a $k_0 = k^0 = \omega_k \equiv \sqrt{\vec{k}^2+m^2}$)

(b) Utilizando las relaciones de conmutación entre $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$, obtenga las relaciones de conmutación entre los operadores de creación y destrucción.

✓ La parte (a) está comentada en la sección 4.1.3 de las notas de la práctica. Para la parte (b), ver por ejemplo el Ejercicio 7.1 del libro de Radovanovic.

31 Los operadores de creación y destrucción actúan en un espacio de Hilbert (un espacio de Fock), que contiene un estado aniquilado por los de destrucción (el estado de vacío). Las transformaciones de Poincaré $x \to \Lambda x + a$ forman un grupo de simetrías de la teoría cuántica y por tanto cada transformación de este grupo tiene un operador unitario asociado que actúa en ese espacio de Hilbert. Como es usual en el picture de Heisenberg, estos operadores actúan en los campos de operadores de la siguiente forma: $\hat{\phi}(x) \to U(\Lambda,a)\hat{\phi}(x)U^\dagger(\Lambda,a) = \hat{\phi}(\Lambda x + a)$

(a) Escriba la expresión de los operadores $U(1,a)$ asociados a una traslación espacio-temporal de parametro a^μ en términos de los operadores de creación y destrucción.

(b) ¿Cómo construiría los operadores unitarios asociados a boost y rotaciones? No se espera que halle su expresión sino que indique la manera de encontrarlos.

(c) Verifique que $U(\Lambda,a)\hat{\phi}(x)U^\dagger(\Lambda,a) = \hat{\phi}(\Lambda x + a)$ para el caso de una traslación pura y a primer orden en el parámetro a.

(d) Usando que el vacío es aniquilado por el operador de destrucción, argumente por qué espera que el vacío sea invariante de Poincaré en base a la forma general que espera que tengan los operadores unitarios $U(\Lambda,a)$.

32 **Interpretación de partícula.** A partir del estado de mínima energía (denominado *vacío* por su interpretación como estado desprovisto de partículas y denotado por $|0\rangle$) puede construirse todo el espacio de Hilbert mediante la acción de los operadores de creación. A fin de ver esto:

(a) Muestre que un estado de la forma $\prod_{i=1}^n \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle$ es autoestado del Hamiltoniano y el operador momento con autovalores iguales a $\sum_{i=1}^n \omega_{\mathbf{k_i}}$ y $\sum_{i=1}^n \mathbf{k_i}$ respectivamente.

(b) Verifique que el estado anterior es autoestado del operador *número* definido como $\hat{N} = \int d^3\mathbf{k}\,\hat{a}^\dagger_\mathbf{k}\,\hat{a}_\mathbf{k}$ con autovalor n.

✓ Resuelto en la sección 4.1.4 de las notas de la práctica.

33 Un estado de la forma $\hat{a}^\dagger_\mathbf{k}|0\rangle$ puede considerarse como el estado de una partícula de cuadrimomento definido $(\omega_\mathbf{k},\mathbf{k})$. Este tipo de estado no está en el espacio de Hilbert, como puede verse al calcular formalmente su norma. Esto es análogo a lo que ocurre en mecánica cuántica no

relativista (ausencia de estados con momento definido; estos están fuera del Hilbert). Sin embargo, *suavizando* la expresión anterior con una función de los momentos espaciales que decaiga suficientemente rápido para momentos grandes, puede obtenerse un estado del espacio de Hilbert.

(a) Considere ahora dos funciones de $\mathbb{R}^3$ f_1 y f_2 (pensadas como funciones de los momentos espaciales). Halle el producto interno entre los estados: $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{\omega(\mathbf{k})}} f_1(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} |0\rangle$ y $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{\omega(\mathbf{k})}} f_2(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} |0\rangle$. Exprese el resultado como una integral que involucre a f_1 y f_2. (el factor $1/\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}$ podría absorberse en la definición de f pero se escribió así por razones que quedaran claras en el inciso siguiente)

(b) Muestre que este producto es invariante de Lorentz. Es decir, que la integral anterior no se altera si se usa en vez de f una función compuesta con una transformación de Lorentz (ayuda: escriba la integral en los momentos espaciales como una integral en el cuadrimomento pesado con una δ que imponga la condición de *capa de masa*: $k^2 = m^2$).

Observación: pensado como una teoría de partículas, el producto interno en el Hilbert de n partículas (espacio de Fock) es análogo al de la mecánica cuántica no relativista, pero modificando la medida de integración $d^3\mathbf{k}$ por $\frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}}$.

✓ **Para la parte (a) ver por ejemplo el Ejercicio 7.12 del libro de Radovanovic.**

34 El ejercicio anterior permite entender por qué en el enfoque riguroso el campo se trata como una funcional o distribución, siendo su argumento no un punto del espacio-tiempo sino una función de este último. La vinculación entre nuestro enfoque y el riguroso es a través de:

$$\hat{\phi}(f) = \int d^4x \hat{\phi}(x) f(x)$$

siendo f una función arbitaria del espacio-tiempo (con alguna propiedad de decaimiento en infinito). Para el caso de campos libres puede utilizarse una función del espacio solamente, de forma de mantener la dependencia del campo respecto al tiempo:

$$\hat{\phi}(t,h) \equiv \int d^3\mathbf{x}\, \hat{\phi}(\mathbf{x},t) h(\mathbf{x})$$

Muestre que $\hat{\phi}(t,h)|0\rangle$ es un estado del Hilbert como el del ejercicio 33.

35 **Interpretación de partícula.** El objetivo de este problema es analizar en qué medida la teoría del campo escalar real libre, restringida a los estados de una partícula, puede ser considerada como una generalización relativista de la teoría de Schrödinger, y el operador $\hat{\phi}(x)$ puede ser asimilado a un operador de creación de una partícula en un punto del espacio.

(a) Mostrar que los vectores $\hat{\phi}(t,\mathbf{x})$ a tiempo t fijo generan todo el espacio de Hilbert H_1 de una partícula.

(b) Se define $|t,\mathbf{x}\rangle := \hat{\phi}(t,\mathbf{x})|0\rangle$ (supuestos vectores de una partícula localizados) y la función $\Psi(t,\mathbf{x}) := \langle t,\mathbf{x}|\Psi\rangle$, con $|\Psi\rangle \in H_1$ (supuesta función de onda de una partícula). Probar que $\Psi(t,\mathbf{x})$ satisface la ecuación de Klein-Gordon. Mostrar que además contiene sólo frecuencias positivas, y por ello satisface una ecuación más restrictiva, de primer orden en derivadas temporales

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,\mathbf{x}) = +\sqrt{m^2-\nabla^2}\Psi(t,\mathbf{x}) \,.$$

Mostrar que en este caso la corriente conservada de Klein-Gordon da lugar a una probabilidad conservada y positiva, pero la densidad de probabilidad no es definida positiva.

(c) Mostrar que, sin embargo, $\langle t, \mathbf{x} | \, t, \mathbf{y} \rangle$ no es proporcional a la delta de Dirac y que los estados $|t, \mathbf{x}\rangle$ están localizados en un tamaño típico $\Delta x \sim 1/m$ (al restaurar unidades, esta es longitud de Compton $\frac{\hbar}{mc}$). Este resultado ejemplifica la dificultad de definir la noción de localización en una teoría relativista.

✓ **Resuelto en la sección 4.1.6 de las notas de la práctica.**

$\boxed{36}$ El valor de expectación del campo en el vacío es igual a cero. Sin embargo, el hecho de que el vacío es un estado no trivial se manifiesta en el valor expectación en vacío no nulo de productos de campos, evaluados en n puntos del espacio-tiempo diferentes $\langle 0| \hat{\phi}(x_1)...\hat{\phi}(x_n) |0\rangle$. A estos valores de expectación se los denomina *funciones de n-puntos*, siendo funciones de los n-puntos del espacio tiempo $x_1, ...x_n$. Estas funciones de n-puntos (para n par) se pueden descomponer en productos de funciones de dos puntos (en teorías libres).

(a) Calcule formalmente la expresión de $\langle 0| \hat{\phi}(\mathbf{x}, 0)\hat{\phi}(\mathbf{y}, 0) |0\rangle$, dejándola expresada como una integral en una sola variable y muestre que no es posible que la integral sea cero trabajando la expresión a fin de relacionarla con funciones de Bessel modificadas. Observe que el resultado es distinto de cero y apreciable para distancias menores que m (al restaurar unidades, esta es longitud de Compton $\frac{\hbar}{mc}$). Si hicieron el inciso (c) del ejercicio anterior esto ya está resuelto.

(b) Halle análogamente la expresión de la función de dos puntos $\langle 0| \hat{\phi}(\mathbf{x}, t_1)\hat{\phi}(\mathbf{x}, t_2) |0\rangle$ (es decir, la función a puntos espaciales iguales y tiempos distintos).

✓ **Inciso (a) resuelto en la sección 4.1.7 de las notas de la práctica. El resultado del inciso (b) es la ecuación (251) del libro de Peskin.**

$\boxed{37}$ Verifique la invariancia de Poincaré de la función de dos puntos para dos puntos x e y arbitrarios.

(a) Observando la expresión resultante como integral en los momentos espaciales y usando la invariancia de la medida de integración.

(b) Usando la forma en que transforman los operadores de campo

$$\hat{\phi}(\Lambda x + a) = U^\dagger(\Lambda, a)\hat{\phi}(x)U(\Lambda, a)$$

y la invariancia del vacío ante una transformación de Poincaré.

(c) Concluya entonces que la función de dos puntos sólo depende del valor de la distancia Minkowskiana $(x-y)^2$ (y además del signo de $t_2 - t_1$ en el caso en que están temporalmente separados), mostrando comportamientos cualitativamente diferentes según si la distancia es espacial o temporal.

$\boxed{38}$ **Condición de microcausalidad.** Considere un campo de Klein Gordon neutro. Muestre que el conmutador $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$ es un número complejo (es decir, un múltiplo del operador identidad) y por tanto es igual a su valor de expectación en vacío (o cualquier estado). A partir de esta observación y los resultados anteriores, muestre que el conmutador es cero para x e y espacialmente separados, es decir para $(x-y)^2 < 0$. Diga por qué no puede decir lo mismo cuando están temporalmente separados (observación: note que para el caso del campo escalar complejo, los conmutadores entre $\hat{\phi}$ y $\hat{\phi}^\dagger$ serán idénticamente cero).

✓ **Resuelto en la sección 4.1.8 de las notas de la práctica.**

$\boxed{39}$ **Idea de demostración del teorema espín-estadística.** Considere el campo escalar neutro y suponga ahora que los operadores de creación y aniquilación satisfacen reglas de anticonmutación. Muestre que el anticonmutador de los campos es diferente de cero para puntos espacialmente separados. (Sugerencia: considere los puntos x e y a tiempos iguales, escriba la expresión como un integral en los momentos y muestre que no es posible que la integral sea cero trabajando la expresión a fin de relacionarla con funciones de Bessel modificadas). Piense por qué esta condición de conmutación implica que los estados en el espacio de Fock serán simétricos ante permutación de partículas.

✓ **Discutido en el video de la práctica subido el 27/05.**

40 Reconsidere los ejercicios 30 y 36, así como la expresión del operador Hamiltoniano y momento del campo para el caso del campo escalar complejo. Note que ahora algunas funciones de 2-puntos serán nulas.

✓ **Algunos resultados están en el Ejercicio 7.3 del libro de Radovanovic.**

41 Para el caso del campo escalar complejo, hay una cantidad conservada asociada a la invariancia ante multiplicar el campo por una fase. Halle la expresión de esta a nivel cuántico y muestre que este operador cuenta el número de partículas creadas por $a^\dagger$ menos el numero de partículas creadas por $b^\dagger$.

✓ **Resuelto en la sección 4.2.1 de las notas de la práctica.**

42 **Propagador del oscilador armónico cuántico.** El propagador es una cantidad que será relevante para la expresión de la matriz de Scattering cuando se introduzcan interacciones. Considere la cuantización canónica de un oscilador armónico unidimensional X de frecuencia ω (y masa $m = 1$ por simplicidad).

(a) Calcule la función de dos variables $\langle 0| \hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2) |0\rangle$ siendo $\hat{X}$ el operador posición en la representación de Heisenberg, t_1 y t_2 dos instantes arbitrarios y $|0\rangle$ el estado de vacío.

(b) Muestre que la función $i \langle 0| T(\hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2)) |0\rangle$ (donde $T(...)$ significa que los operadores dentro del paréntesis deben estar ordenados temporalmente) es una función de Green del operador diferencial $\partial_t^2 + \omega^2$.

43 **Propagador del campo escalar neutro o complejo**

(a) Exprese

$$D(x-y) \equiv \langle 0|T(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y))|0\rangle$$

como una suma de dos funciones de dos puntos pesadas adecuadamente (en el caso del campo neutro, la expresión final es la misma).

(b) Exprese el resultado como la transformada de Fourier de

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\epsilon \to 0)$$

Muestre esto mediante integrales en el plano complejo, en caminos que esquiven los polos dados por ϵ, ubicados en distintos lugares segun sea ϵ positivo o negativo.

(c) Muestre que se cumple $(\Box_x + m^2)D(x-y) = -i\delta^4(x-y)$.

✓ **Resuelto en la sección 4.2.2 de las notas de la práctica.**

Los campos de Dirac, Proca y Maxwell corresponden a representaciones no triviales del grupo de Lorentz, en el sentido que el grupo de Lorentz actúa no sólo modificando el argumento de los campos sino también mezclando las componentes del mismo. En la versión cuántica, los estados de partículas asociadas transforman en forma no trivial ante rotaciones. En el caso masivo, este grado de libertad se manifiesta en lo que llamamos espín. En esta guía, consideraremos el caso de un campo de Dirac.

---

44 Considere

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \left[\hat{b}^s_{\mathbf{p}} u^s(p)\, e^{-ipx} + \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} v^s(p)\, e^{ipx}\right] .$$

Verificar que $\hat{\psi}(x)$ es una solución de la ecuación de Dirac. Demostrar además que si $\{\hat{b}^r_{\mathbf{p}}, \hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}'}\} = \{\hat{d}^r_{\mathbf{p}}, \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}'}\} = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\mathbf{rs}}$ (y todos los otros nulos) entonces

$$\left\{\hat{\psi}_a(0,\mathbf{x}), \hat{\psi}^\dagger_b(0,\mathbf{y})\right\} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\delta_{ab}\,.$$

✓ **Resuelto en la sección 4.3.2 de las notas de la práctica.**

45 Exprese las cargas conservadas asociadas a invariancia ante traslaciones espacio temporales en términos de operadores de creación y destrucción.

✓ **Hamiltoniano derivado en la sección 4.3.4 de las notas de la práctica.**

46 **Conexión espín-estadística.** Halle $\hat{H}$ pero ahora usando reglas de conmutación entre los b y d (como las del campo escalar complejo) y muestre que el operador no es definido positivo (este fue uno de los primeros indicios que encontró Pauli del teorema Espín-Estadística).

✓ **Resuelto en la sección 4.3.4 de las notas de la práctica.**

47 Halle la cantidad conservada asociada a la simetría $U(1)$ global: $\psi \to e^{i\alpha}\psi$. Muestre que los autovalores de esta carga son opuestos para los estados de 1-partícula creados por $\hat{b}^\dagger$ y $\hat{d}^\dagger$.

✓ **Resuelto en la sección 4.3.5 de las notas de la práctica.**

48 Escriba la expresión clásica de la carga conservada asociada a la simetría de rotación e identifique la parte que genera la rotación intrínseca del espinor. Halle su versión cuántica y verifique que un estado de la forma $\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\,|0\rangle$ o $\hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\,|0\rangle$ transforma como un objeto de espín $\frac{1}{2}$ ante rotaciones.

✓ **Resuelto en la sección 4.3.6 de las notas de la práctica.**

49 Una transformación de Poincaré dada por (Λ, a) tiene asociado un operador unitario que actúa en el campo de Dirac de la siguiente forma:

$$U^\dagger(\Lambda,a)\psi_i(x)U(\Lambda,a) = S_{ij}(\Lambda^{-1})\psi_j(\Lambda x + a)$$

siendo S la matriz que aparece en la transformación de un espinor de Dirac. Muestre a partir de esto que las funciones de dos puntos resultan invariantes ante traslaciones espacio-temporales pero no necesariamente ante transformaciones de Lorentz.

✓ **Resuelto en la sección 4.3.7 de las notas de la práctica.**

50 Mostrar que:

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\Delta(x-y)$$

siendo $\Delta(x-y)$ el conmutador analogo en el caso del campo de Klein-Gordon. Muestre que este se anula para puntos x, y espacialmente separados.

✓ **Resuelto en la página 138 del libro de Greiner.**

51 Considere la función de 2-puntos ordenada temporalmente $S_{\alpha\beta}(x-y) \equiv \langle 0 \mid T\left(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\right) \mid 0\rangle$

(a) Muestre que $S_{\alpha\beta}(x-y) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\Delta_F(x-y)$, siendo $\Delta_F(x-y)$ el propagador de Feynman del campo de Klein Gordon.

(b) Halle la expresión integral en el espacio de momentos del propagador.

✓ **Resuelto en la sección 4.3.7 de las notas de la práctica.**

52 * Cuantizar un campo el campo de Weyl (espinor de masa cero y quiralidad definida).

53 * **Violación de la Condición de Energía Débil.** En la teoría de campos clásica vimos que tanto la energía total como la densidad de energía son positivas. En teoría cuántica de campos la energía total es positiva pero la sustracción de la energía de vacío (orden normal) hace que $\hat{T}^{00}$ no sea un operador positivo. En este ejercicio les proponemos que encuentren algún estado para el cual el valor de expectación de la densidad de energía, que será una función del espacio-tiempo, sea negativo para algunas regiones del espacio-tiempo (probando así que $\hat{T}^{00}$ no es positivo).

Que $\hat{T}^{00}$ no sea positivo viola lo que se conoce como Weak Energy Condition (WEC), que dice que todo observador ve una densidad de energía positiva. La WEC forma parte de un conjunto de desigualdades que uno impone sobre la materia (sobre $T^{\mu\nu}$) y sirven para probar teoremas en relatividad general (como los teoremas de singularidades) o para que las geometrías que aparecen como soluciones de las ecuaciones de Einstein sean físicamente razonables. En las teorías cuánticas todas esas condiciones de energía se violan, ¿pero en qué grado? Esa información se codifica en lo que se conocen como *desigualdades cuánticas de energía*. Si les interesa leer más sobre este tema pueden mirar por ejemplo el review “Lectures on quantum energy inequalities”, de C. J. Fewster (https://arxiv.org/abs/1208.5399).

Los campos de Proca y Maxwell corresponden a representaciones de espín y helicidad (respectivamente) 1. Ambos tienen en común la dificultad de que los 4 campos que aparecen en el Lagrangiano (componentes de un campo cuadrivectorial) no son todos independientes (por razones diferentes) lo que dificulta implementar el procedimiento de cuantización canonica. En esta guía pondremos el foco en cómo aislar los grados de libertad de cada campo y ver la relación entre estos grados de libertad y el espín/helicidad de la especie de partícula que describen.

$\boxed{54}$ Considere el Lagrangiano de Proca $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}Z_\mu Z^\mu$, para un campo Z_μ que es un cuadrivector (real), siendo F la expresión usual: $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$

(a) Muestre que las ecuaciones de movimiento que se desprenden de este Lagrangiano equivalen a estas dos ecuaciones:

$$(i)\ \Box Z^\mu + m^2 Z^\mu = 0 \quad (ii)\ \partial_\nu Z^\nu = 0$$

Observe que el signo del término de masa en el Lagrangiano es opuesto al del Lagrangiano de Klein-Gordon y pese a ello contribuye de la misma forma en la ecuación i).

(b) Verifique que $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})e^{-ikx}$ (y su complejo conjugado) (para $\lambda = 1, 2, 3$) es solución de las ecuaciones, satisfaciendo k la condición $k^2 = m^2$ y siendo los 3 cuadrivectores $\epsilon^{(\lambda)}$ los cuadivectores transversales al k dado en el apéndice.

(c) Verifique que el momento canónico conjugado a Z^0 es idénticamente cero y que Z^0, usando la ecuación (ii), puede escribirse en función de los momentos canónicos asociados a Z^i (observación: esto es relevante para la cuantización canónica, dado que pone de manifiesto que las únicas variables dinámicas son los tres campos A_i y sus momento canónicos conjugados).

✓ **Resuelto en la sección 4.4.1 de las notas de la práctica.**

$\boxed{55}$ La expresión del campo de Proca cuantizado es:

$$\hat{Z}_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \sum_{\lambda=1}^{3} \left[\hat{a}_\mathbf{k}^\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})e^{-ikx} + \hat{a}_\mathbf{k}^{\lambda\dagger}\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})^* e^{ikx}\right]$$

donde $\left[\hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}\right] = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{\lambda\lambda'}$ y todas las demás cero. Hallar la expresión de la función de dos puntos $\langle 0| Z^\mu(x)Z^\nu(y)|0\rangle$ en términos de la de un campo escalar real.

✓ **Resuelto en la sección 4.4.2 de las notas de la práctica.**

$\boxed{56}$ Considere ahora el Lagrangiano de Maxwell, que se obtiene usando el Lagrangiano de Proca con $m = 0$. Ahora la condición ii) no sigue de las ecuaciones de movimiento. En su lugar, aparece ahora invariancia de gauge, que permite imponer, entre otras cosas, $\partial_\mu A^\mu = 0$, subsistiendo aún cierta libertad. El procedimiento de Gupta-Bleuler para cuantizar el sistema consiste en considerar primero el espacio de soluciones de un campo que cumpla:

$$(I) \quad \Box A_\mu = 0\,,$$

y luego imponer la condición

$$(II) \quad \partial_\mu A^\mu = 0\,.$$

(a) Muestre que el campo

$$\hat{A}_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left[\hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})e^{-ikx} + \hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger}\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})^* e^{ikx}\right]$$

satisface las ecuaciones de movimiento (I), pero no las ecuaciones (II), con los cuadrivectores ϵ del apéndice asociados a un vector k nulo.

(b) Considerando la expresión anterior como un campo clásico (con las $a^{\lambda}(k)$ funciones complejas de k), ¿qué relación debería haber entre $a^{(0)}$ y $a^{(3)}$ para que sea solución de (II)?

✓ **Resuelto en la sección 4.5 de las notas de la práctica.**

57 La cuantización del campo de Maxwell posee el problema de que los operadores a y $a^{\dagger}$ no actúan en un Hilbert ya que aparecen estados con norma negativa (y por lo tanto el 'producto interno' del cual deriva dicha norma no es definido positivo, por lo que estrictamente no es un producto interno). Muestre que de las relaciones de conmutación (que siguen de las reglas de conmutación canonicas):

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}\right] = -\eta^{\lambda\lambda'}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

se desprende que existen estados de norma negativa (asumiendo que los $a^{(0)}$ aniquilan el vacío).

✓ **Resuelto en la sección 4.5.1 de las notas de la práctica.**

58 El problema que mencionamos en el ejercicio anterior se resuelve parcialmente imponiendo la condición II) sobre ciertos estados (condición de estado físico), lo cual deja aún estados con norma 0. Estos últimos representan estados que son "puro gauge" (y por lo tanto, uno hace un cociente y los identifica como equivalentes al cero). La versión precisa de esta condición (Gupta-Bleuler) es:

$$\partial_\mu \hat{A}^\mu_+ \left|\Psi\right\rangle = 0$$

siendo $\hat{A}^\mu_+$ la parte de aniquilación (frecuencia positiva) de $\hat{A}^\mu$.

(a) Verifique la condición de Gupta-Bleuler se cumple para para estados $|\Psi\rangle$ que provengan de actuar sobre el vacío con la combinación $\hat{a}^{(3)\dagger} - \hat{a}^{(0)\dagger}$, los cuales contienen pares de modos longitudinal ($\lambda = 3$) y temporal (o escalar) ($\lambda = 0$).

(b) Muestre que el valor de espectación de $\hat{A}$ en $|\Psi\rangle$ y $|\Psi'\rangle \equiv (1 + \int c(k)(\hat{a}_k^{(3)\dagger} - \hat{a}_k^{(1)\dagger}))d^3k\,|\Psi\rangle$ (con $c(k)$ una función de los momentos) difieren en el gradiente de una función.

Observación: este último ítem ilustra que $\int c(k)(\hat{a}_k^{(3)\dagger} - \hat{a}_k^{(1)\dagger})d^3k\,|\Psi\rangle$ corresponde a una estado *puro gauge*, que en efecto es un estado de norma cero. El espacio de Hilbert (con producto interno definido positivo) se obtiene cuando se declaran equivalentes a estados que difieren en un estado nulo.

✓ **Resuelto en la sección 4.5.2 de las notas de la práctica.**

59 Hallar la función de dos puntos y el propagador del campo de Maxwell en el gauge de Lorentz (notar que la cuenta es muy similar a la del campo escalar complejo).

✓ **Resuelto en la sección 4.5.3 de las notas de la práctica.**

60 Considerar el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\lambda\left(\partial\cdot A\right)^2 .$$

Escribir la ecuación de movimiento e invertirla para encontrar la expresión de la función de Green (si se elige la prescripción $i\epsilon$ para sortear los polos se obtiene el propagador de Feynman).

✓ **Discutido en el video de la práctica subido el 03/06.**

$\boxed{61}$ El operador helicidad (proyección del momento angular intrínseco en la dirección de movimiento) $\hat{h}$, en el caso del campo de Proca, puede verse que es:

$$\hat{h} = i \int d^3k (\hat{a}_k^{(2)\dagger} \hat{a}_k^{(1)} - \hat{a}_k^{(1)\dagger} \hat{a}_k^{(2)})$$

(a) Muestre que los estados $(\hat{a}_k^{(3)})^\dagger |0\rangle$ y $(\hat{a}_k^{(2)})^\dagger \pm i(\hat{a}_k^{(1)})^\dagger |0\rangle$ son autoestados de $\hat{h}$. Halle los autovalores y verifique que encajan con el hecho de que el campo describe una partícula de espín 1.

(b) Argumente por qué en el caso del caso de Maxwell, donde se obtiene la misma expresión para los estados transversales, la helicidad se reduce a 1 y -1.

$\boxed{62}$ Comprobar la validez de la microcausalidad para los campos eléctrico y magnético.
✓ **Resuelto en la sección 4.5.3 de las notas de la práctica.**

Apéndice: Base de cuadrivectores de polarización

$\boxed{63}$ Dado un cuadrivector de tipo tiempo, k^μ ($k^2 = m^2$, con k^0 positivo), es posible hallar una terna de cuadrivectores $\epsilon^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, 2, 3$), ortogonales entre sí, de tipo espacio y ortogonales a k^μ. Se puede completar una base ortonormal eligiendo $\frac{k^\mu}{m}$ como el cuarto cuadrivector. Muestre que se verifica la relación de completitud:

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} k_\mu k_\nu$$

$\boxed{64}$ A fin de tratar el caso del campo de Maxwell, considere ahora un cuadrivector k nulo. La base ortonormal sólo puede contener a lo sumo 2 cuadrivectores $\epsilon^{(1)}$ y $\epsilon^{(2)}$ ortogonales a k (que son de tipo espacial). La base se puede completar con dos vectores adicionales $\epsilon^{(3)}$ espacial y $\epsilon^{(0)}$ temporal, tal que $(\epsilon^{(3)} + \epsilon^{(0)})$ sea proporcional a k. Considere la elección en que $\epsilon^{(0)} = n$ (n vector tipo tiempo unitario), $\epsilon^{(3)} = \frac{k-(k.n)n}{k.n}$ y los $\epsilon^{(1)}$ y $\epsilon^{(2)}$ ortogonales a estos y de tipo espacio. Muestre que es posible satisfacer esas condiciones (para ello puede fijar un sistema de coordenadas en el que n esté en el eje temporal).

Al agregar a los Lagrangianos considerados anteriormente términos de orden superior al cuadrático (términos de interacción), las ecuaciones de movimiento resultan ser no lineales y por ende todos los resultados aplicables a la cuantización de los campos libres de Klein-Gordon, Dirac, Proca y Maxwell no aplican. Sin embargo, bajo algunas hipótesis, puede garantizarse el fenómeno no intuitivo de que la interacción es *apagada asintóticamente* para $t \to \pm\infty$ en el sentido de que existen estados (llamados asintóticos) que evolucionan (en el picture de Schrödinger) como los de la teoría libre. Esto permite plantear la matriz de Scattering entre estados de la teoría libre. Estos estados iniciales y finales se denominan *in* y *out*. Esta amplitud puede hallarse perturbativamente como expansión en torno a la (o las) constante(s) de acoplamiento igual a 0. El objetivo principal de esta guía es ver cómo implementar ese cálculo perturbativo mediante las reglas de Feynman.

$\boxed{65}$ Considere el caso simple e ilustrativo del Lagrangiano que resulta de agregar un término $-\frac{\lambda_n}{n!}\phi^n$ (con $\lambda_n > 0$ y $n \geq 3$) al Lagrangiano de Klein-Gordon para un campo real.

(a) Halle la ecuación de movimiento y vea que ahora una onda plana no es solución.

(b) ¿Para qué valor de n la constante de acoplamiento es adimensional?

✓ **Resuelto en la sección 5 de las notas de la práctica.**

$\boxed{66}$ **Representación de Källen-Lehmann.** Para una teoría interactuante, la función de dos puntos ya no tiene la forma hallada para el caso del campo libre. Sin embargo, bajo ciertas hipótesis sobre el espectro de la teoría cuántica, puede verse que tendra la siguiente representación espectral

$$W(x-y) \equiv \langle 0| \phi(x)\phi(y) |0\rangle = \int_0^\infty \rho(s) W_{F,\sqrt{s}}(x-y) ds$$

siendo $W_{F,\sqrt{s}}(x-y)$ la función de dos puntos del campo libre de masa $\sqrt{s}$, y ρ una función de s (que satisfará algunas propiedades generales). Demostrar esta relación enfocándose en el caso de una teoría interactuante de campos (arbitraria) del campo escalar real.

✓ **Resuelto en la sección 5.1.2 de las notas de la práctica.**

$\boxed{67}$ Usando el teorema de Wick, exprese la función de 4 puntos $\langle 0 \mid \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\gamma(x_3)\bar{\psi}_\delta(x_4) \mid 0\rangle$ en terminos de la de 2 puntos

✓ **Resuelto en la sección 5.2.1 de las notas de la práctica.**

$\boxed{68}$ Enunciar las reglas de Feynmann para la teoría $\lambda\phi^4$. Ver qué modificaciones deberia hacer si el campo fuese complejo.

✓ **Resuelto en la sección 5.2.3 de las notas de la práctica.**

$\boxed{69}$ En la teoría anterior, dibuje los diagramas hasta orden 2 en la constante de acoplamiento para el proceso de dos partículas iniciales y dos finales, distinguiendo aquellos:

(a) Diagramas desconexos (burbujas). Es decir, aquellos en que las patas externas no se conectan a ningún vértice. ¿Por qué no son relevantes para el cálculo de la matriz de scattering?

(b) Diagramas con correcciones radiativas (es decir, aquellos en los que hay vértices en las patas externas). ¿Por qué no suelen incluirse estos diagramas en el cálculo de la amplitud?

(c) Diagramas restantes.

$\boxed{70}$ Utilizando consideraciones geométricas sobre los grafos totalmente conexos (y sin las correcciones radiativas) muestre que para la teoría $\lambda\phi^4$ vale la siguiente relación entre número de patas externas E y número de vértices n:

$$2(n+1) = E.$$

De esto se desprende que la amplitud para un proceso con un número de patas externas impares debe ser cero.

✓ **Resuelto en la sección 5.2.5 de las notas de la práctica usando resultados de teoría de grafos, y de forma alternativa en la sección 5.2.3.**

71 ¿Por qué motivo en la electrodinámica cuántica (QED) no es posible el proceso en el que un electrón y un positrón se aniquilan dando lugar a un solo fotón?

✓ **Resuelto en la sección 5.3 de las notas de la práctica.**

72 Enuncie las reglas de Feynman de QED.

✓ **Las reglas están en la sección 5.3.1 de las notas de la práctica (la derivación figura en todos los libros de QFT).**

73 Usando las reglas anteriores halle la amplitud de scattering para los siguientes procesos al orden más bajo no trivial, dibujando los diagramas de Feynman que contribuyen al proceso:

(a) Scattering de Bhabha $e^+e^- \to e^+e^-$

(b) Scattering de Møller: $e^-e^- \to e^-e^-$

(c) Aniquilación de pares

(d) Creación de pares

(e) Scattering de Compton (scattering elástico electrón-fotón)

✓ **Incisos (a), (b) y (c) resueltos en las secciones 5.3.2, 5.3.3 y 5.3.4 de las notas de la práctica. El inciso (d) debería salir si entendieron el (c). El resultado del inciso (e) es la ecuación 6.94 de las notas de Tong.**

74 Enunciar las reglas de Feynman para la electrodinámica escalar, descripta por el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = D_\mu\varphi^\dagger D^\mu\varphi - m^2\varphi^\dagger\varphi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,, \quad \text{con} \quad D_\mu\varphi \equiv (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi\ .$$

✓ **La derivación se puede ver por ejemplo en el ejemplo 8.6 del libro de Greiner.**

En esta guía estudiaremos la vinculación entre las amplitudes calculadas en la guía anterior y cantidades observables en experimentos de física de partículas, tales como la sección eficaz y vida media.

---

75 Para el cálculo posterior de la sección eficaz, es útil aislar una cantidad invariante de Lorentz de la expresión de la matriz de Scattering, aislando factores dependientes del momento de las partículas iniciales y finales. Si S es la matriz de Scattering y S_{fi} su elemento de matriz para estados iniciales y finales i y f, la cantidad M_{fi} se define a partir de:

$$(S-1)_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^4(k_f - k_i) M_{fi} \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_i}}$$

siendo N el numero total de partículas.
Verifique que en los casos de la guía anterior esta cantidad es invariante de Lorentz y que en esos casos (procesos del tipo $1+2 \to 3+4$) puede escribirse en términos de las *variables de Mandelstan*, invariantes de Lorentz:

$$\begin{aligned} s &= (k_1+k_2)^2 = (k_3+k_4)^2 \\ t &= (k_1-k_3)^2 = (k_2-k_4)^2 \\ u &= (k_1-k_4)^2 = (k_2-k_3)^2 \end{aligned}$$

✓ **Resuelto en la sección 5.4 de las notas de la práctica.**

76 **Sección eficaz.** La sección eficaz se define para un proceso de N particulas, con dos particulas iniciales y $N-2$ finales. Su expresión se obtiene a partir de un cálculo relativamente simple pero feo (aunque en algunos libros se hace con prolijidad, ver por ejemplo las páginas 232-234 del libro de Ryder) y se expresa en terminos de la amplitud M_{fi} de Feynman de la siguiente manera (la expresión asume que se usa un sistema de referencia *colineal* en que las partículas incidentes tienen sus velocidades en la misma dirección):

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \mid M_{fi} \mid^2 \delta^4(k_f - k_i)}{4\sqrt{(k_1 k_2)^2 - {m_1}^2 {m_2}^2}} \prod_{i=3}^{N} \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2\omega_i}$$

Considere el caso particular en que $N=2$ (es decir, dos partículas iniciales y dos finales) y que las partículas son bosónicas.

(a) Muestre que para el caso de un proceso *elástico* (partículas finales iguales a las iniciales) la expresión de la sección $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ en el sistema centro de masa es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 (E_1+E_2)^2} \mid M_{fi} \mid^2$$

siendo E_1 y E_2 las energías de las partículas en el sistema centro de masa y Ω el ángulo sólido asociado al momento de una de las partículas elegidas para parametrizar el estado final.

(b) Repita el cálculo para el caso general de un proceso inelástico. Puede considerar para simplificar que se trata de un proceso en que tanto las partículas inciales como las finales tienen la misma masa.

(c) En la deducción de la sección eficaz, en realidad aparece el factor $\frac{1}{E_1 E_2 |\vec{V_2} - \vec{V_1}|}$ que no es explícitamente invariante de Lorentz. De todas formas, si bien las energías y la velocidad relativa $| \vec{V_2} - \vec{V_1} |$ no son invariantes de Lorentz, este producto resulta ser el mismo para todo sistema colieneal, es decir, para todo sistema en que las partículas incidentes se muevan en una misma línea, incluyendo el caso especial en que una de ellas está en reposo. Muestre que en efecto para tales sistemas: $E_1 E_2 \mid \vec{V_2} - \vec{V_1} \mid = \sqrt{(k_1 k_2)^2 - {m_1}^2 {m_2}^2}$.
La inversa de esta cantidad tiene dimensiones de área y su invariancia ante cambios de sistemas colineales es consistente con su interpretación de área de una superficie transversal a la dirección de las partículas. ¿A qué se reduciría este factor en el caso del efecto Compton?

✓ Resuelto en la sección 5.5 de las notas de la práctica.

77 Halle la sección eficaz diferencial para el orden más bajo para los procesos:

(a) Scattering de Bhabha.

(b) Scattering de Møller.

(c) Aniquilación y creación de pares.

Considere en todos los casos que las polarizaciones de los estados finales e iniciales están sumadas y promediadas, respectivamente.

✓ Inciso (a) resuelto en la sección 5.5 de las notas de la práctica.

78 Discutir los límites ultrarelativista y no-relativista para la sección eficaz de dispersión electrón-positrón en el sistema centro de masa al orden perturbativo más bajo.

79 En el caso del proceso de creación de electrón-positrón a partir de dos fotones, discutir los casos de energía próxima al umbral o mucho mayor que el umbral.

80 Analizar la sección eficaz de Compton en el sistema centro de masa y pasarla al sistema en que el electrón inicial está en reposo. En ese caso, discutir los límites de alta y baja energía del fotón incidente.

✓ Límite de bajas energías resuelto antes de la sección 5.5.3 de las notas de la práctica. Límite de altas energías resuelto en la sección 13.5.4 del libro de Schwartz.

81 **Crossing Symmetry.** Sabiendo que un proceso $A + B \to C + D$ tiene amplitud no nula para una elección de momentos k_1, k_2, k_3, k_4 asociados a A, B, C, D respectivamente, también es posible el proceso $A + \overline{C} \to \overline{B} + D$ (donde $\overline{(.)}$ se usa para notar a la antipartícula). Para convencerse de esto:

(a) Vea en general que si era posible satisfacer la conservación de cuadrimomentos en el primer caso, también será posible satisfacerlas en el segundo.

(b) Reconsidere los procesos de Møller y Bhabha. Vea cómo ambos se relacionan por el intercambio de partículas finales y cómo se obtienen los diagramas vistos en la guía anterior (de uno o otro proceso) mediante un pasaje de patas iniciales a finales.

(c) Vea qué regla de sustitución sencilla para los momentos iniciales y finales debe hacer a fin de obtener una sección eficaz a partir de la otra. Esa relación es un ejemplo de lo que se conoce como *crossing symmetry*.

✓ Discutido en la sección 5.5.3 de las notas de la práctica.

82 **Simetría CPT.** A partir de la invariancia ante transformaciones de (la parte conectada continuamente conectada con la identidad del grupo de) Poincaré, se puede ver que toda teoría cuántica de campos relativista (en el sentido de Wightman) en $3+1$ dimensiones tiene de yapa una simetría discreta denominada CPT que consiste en la operación simultánea de cambiar

partícula por antipartícula (C), invertir la dirección del tiempo (T) y hacer una reflexión espacial (P) (estas operaciones se pueden definir sin hacer alusión a la interpretación de partícula). QED en particular es simétrica ante cada operación por separado, pero en el modelo standard por ejemplo ninguna de estas operaciones por separado es simetría.

Para el caso de QED, verifique que la amplitud de Feynman es invariante ante C y T (note que estas simetrías relacionan procesos diferentes). La dificultad mayor del ejercicio reside en entender en qué se traduce la operación de simetría a verificar.

✓ **Resuelto en la sección 6.4 de las notas de la práctica.**

$\boxed{83}$ **Tasa de decaimiento.** La tasa de decaimiento (o *decay rate*) se define para un proceso en el cual una partícula inicia decae o se transforma en N partículas. Esta tasa es un número que dice cu'al es la probabilidad por unidad de tiempo de que la partícula inicial decaiga en otras. Su expresión es similar a la sección eficaz:

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2E_i} \int \prod_{i=2}^{N} \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3 2\omega_i} \mid M_{fi} \mid^2 \delta^4(k_f - k_i)$$

La *vida media* τ se define como $\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}$.

Verifique que esa cantidad tiene unidades de tiempo y que transforma como debe ante un boost de Lorentz. Busque los valores de vidas medias de algunas partículas elementales y piense en la razon posible de su diferencia.

$\boxed{84}$ Argumente por qué el vacío debe ser estable (es decir, por qué no puede decaer a nada). ¿Cuáles serían los diagramas de Feynman asociados a este decaimiento y por qué no contribuyen? (piense en $\lambda\phi^4$ para fijar ideas). De la misma manera, argumente que no puede haber decaimiento para la partícula de menor masa en el espectro.

$\boxed{85}$ Considere el caso de una teoría de dos campos escalares reales, ϕ_1 y ϕ_2, de masa M y m respectivamente, acoplados con un termino de la forma [1]

$$L_{\text{int.}} = -\frac{\lambda}{2!}\phi_1 {\phi_2}^2 \,.$$

Asumiendo que $M > 2m$, halle la vida media de las partículas asociadas al campo ϕ_1 al orden más bajo en potencias de λ. Diga qué ocurre en el límite $M \to 2m$ y considere el caso $M < 2m$.

✓ **Resuelto en la sección 5.6 de las notas de la práctica.**

Relaciones útiles para el cálculo de la sección eficaz cuando hay campos de Dirac

(a) Demostrar (o al menos entender qué significan) las siguientes identidades para las trazas de matrices gamma, útiles para el cálculo de la sección eficaz:

(I) $Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$

(II) $Tr(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0$

(III) $Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$

(IV) $Tr(\not{a}_1\not{a}_2..\not{a}_{2n}) = a_1a_2Tr(\not{a}_3...\not{a}_{2n}) - a_1a_3Tr(\not{a}_2...\not{a}_{2n}) + a_1a_{2n}Tr(\not{a}_2...\not{a}_{2n-1})$

[1] Este modelo tiene un pequeno problema con la energía. No debe tomarse en serio, lo utilizamos sólo para ejemplificar el cálculo de τ.

(b) Demuestre que:

$$\sum_{s,s'=1,2} \mid \bar{u}(\mathbf{k}, s) M u(\mathbf{k}', s') \mid^2 = Tr\left(\gamma_0 M^\dagger \gamma_0 \frac{\not{k} + m}{2m} M \frac{\not{k}' + m}{2m}\right)$$

donde M es una matriz de 4×4 cualquiera y k y k' son momentos arbitrarios que satisfacen $k^2 = m^2$ (Nota: esta relación es crucial para el cálculo de la sección eficaz y permite sacar provecho a las relaciones del ejercicio precedente).

Esta una guía introductoria al uso de integrales de camino en mecánica cuántica no relativista.

---

86 Obtener una representación mediante una integral de camino para la amplitud de transición $\langle p'', t''|\, p', t'\rangle$, correspondiente a una partícula en una dimensión espacial, tal que su momento a los tiempos t' y t'' es p' y p'', respectivamente.

87 Considere un Lagrangiano de la forma $L = \frac{1}{2} f(q)\dot{q}^2 - V(q)$. Muestre que

$$\langle q_f,\, t_f | q_i,\, t_i\rangle \neq \int \mathcal{D}q\, e^{i\int_{t_i}^{t_f} dt\, L}\,.$$

Encuentre la expresión correcta.

88 Considere un Lagrangiano de la forma

$$L = a(t)\dot{x}^2 + b(t)x\dot{x} + c(t)x^2 + d(t)\dot{x} + e(t)x + f(t)\,.$$

Definiendo el propagador

$$K(b,a) = \langle q_b,\, t_b | q_a,\, t_a\rangle \theta(t_b - t_a)\,,$$

demuestre que

$$K(b,a) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{cl.}}[b,a]} F(t_b - t_a)\,,$$

donde $S_{\text{cl.}}[b,a]$ es la acción evaluada en la trayectoria clásica .

89 Evaluar la función F del problema anterior para el caso de un oscilador armónico forzado.

90 Verificar que, si $T' > T$,

$$\langle Q'\, T' | \mathbf{T}\left(\hat{p}(t_1)\hat{p}(t_2)\right) | Q\, T\rangle = \int \mathcal{D}q\, \mathcal{D}p\, p(t_1)p(t_2) e^{i\int_T^{T'} dt\, (p\dot{q} - H)}\,,$$

donde $\mathbf{T}(...)$ denota el producto temporalmente ordenado.

91 Considerar una partícula no relativista cuyo hamiltoniano es de la forma

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \lambda V(\hat{q})\,, \tag{1}$$

donde λ es una constante. Partiendo de la serie perturbativa (en λ) para la amplitud de transición $\langle q', t'|\, q, t\rangle$, muestre que ésta es la función de Green para la ecuación de Schrödinger correspondiente.

92 Considere el Lagrangiano de un oscilador forzado

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2 + Jq\,.$$

(a) Agregando el término $i\epsilon q^2$ al Lagrangiano, muestre que

$$\langle q_f\,, +\infty | q_i\,, \infty\rangle_J = \langle q_f\,, +\infty | q_i\,, \infty\rangle_{J=0} e^{-\frac{i}{2} JDJ}\,,$$

donde

$$JDJ = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, dt'\, J(t) D(t-t') J(t')\,,$$

y

$$D(t) = -\frac{i}{2\omega}\left[\theta(t)e^{-i\omega t} + \theta(-t)e^{i\omega t}\right]\,.$$

(b) Repita los cálculos trabajando en tiempo imaginario $\tau = it$. Muestre que la amplitud de probabilidad es proporcional a

$$e^{\frac{1}{2}\int d\tau\, d\tau'\, J(\tau) D_E(\tau-\tau') J(\tau')} .$$

Calcule explícitamente la función $D_E(\tau)$ y obtenga $D(t)$ a través de una continuación analítica.

$\boxed{93}$ La integral de camino para $\langle q'', t''|\, q', t'\rangle$ en el espacio de fases es formalmente invariante ante cambios de variables $(q, p) \longrightarrow (Q, P)$ que correspondan a transformaciones canónicas. Discutir la validez de esta invariancia formal.

$\boxed{94}$ Considere una partícula de masa m sometida a un potencial V que se mueve en una dimensión. La coordenada (cartesiana) de la partícula es x. ¿Cómo será la representación funcional para el propagador $K(b, a)$ si se utiliza una coordenada generalizada $q = q(x)$?

$\boxed{95}$ Considere una partícula que puede moverse libremente sobre un anillo. Calcule el propagador $K(b, a)$ utilizando el formalismo de Schrödinger. Realice también el cálculo usando integrales funcionales. *Ayuda: Considere trayectorias que van desde la posición inicial a la final dando un número arbitrario de vueltas).*

$\boxed{96}$ Repita el problema anterior para una partícula que puede moverse libremente dentro de una caja unidimensional de ancho L (ver por ejemplo: M. Goodman, An. J. Phys. **49**, 843 (1981)).

$\boxed{97}$ Considere el Lagrangiano $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + L_{\text{int}}$ con

$$L_{\text{int}} = -\frac{\lambda_3}{3!}q^3 - \frac{\lambda_4}{4!}q^4 .$$

(a) Deducir las reglas de Feynman para el cálculo perturbativo de la funcional generatriz $Z[J]$ en potencias de λ_3 y λ_4.

(b) Obtener expresiones para las primeras correcciones no triviales a la función de dos puntos $\langle 0|\mathbf{T}\,(q(t_1)q(t_2)|0\rangle$.

(c) Calcular la corrección al valor de la energía del nivel fundamental.

Esta es una guía muy breve e introductoria al uso de integrales de camino en teoría de campos.

$\boxed{98}$ Sea $\mathcal{Z}(j)$ la función definida como

$$\mathcal{Z}(j) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-\frac{1}{2}m^2q^2 - \frac{\lambda^4}{4!}q^4 + jq}, \tag{2}$$

con $\mathcal{N} = \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-\frac{1}{2}m^2q^2 - \frac{\lambda^4}{4!}q^4}$ (m y λ son constantes reales). Suponiendo que $\mathcal{Z}(j)$ es desarrollable como una serie (doble) en potencias de j y de λ, evalúe los términos de orden 4 en j hasta el orden 2 en λ.

$\boxed{99}$ Considere un sistema descripto por dos campos escalares reales ϕ y σ con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}\mu^2\sigma^2 - \lambda\phi^2\sigma\,. \tag{3}$$

(a) Derive las reglas de Feynman para las funciones de Green en tiempo imaginario.

(b) Suponga ahora que la masa m es suficientemente grande como para despreciar el término $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ en $\mathcal{L}$. Obtenga en esta aproximación $\mathcal{Z}[J]$ para las funciones de Green del campo σ.

$\boxed{100}$ Calcular el propagador para el campo vectorial cargado masivo.

$\boxed{101}$ Considere un campo real de N componentes, cuya acción euclídea es

$$S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a + \frac{1}{2}m^2\phi_a\phi_a + \frac{g}{4!}(\phi_a\phi_a)^2\right]. \tag{4}$$

(a) Obtenga las reglas de Feynman.

(b) Deduzca las ecuaciones de movimiento cuánticas para $\mathcal{Z}[J]$.

Esta es una guía muy breve e introductoria al estudio de la renormalización de las teorías de campos.

Grados de divergencias y criterios de renormalizabilidad

102 Considere el Lagrangiano de un campo de Klein Gordon neutro en un espacio tiempo de d dimensiones con un término de interacción $\lambda\phi^4$ y el diagrama de Feynman con n vertices, L lineas internas, E lineas externas y L loops.

(a) Muestre que el grado de divergencias D es igual a $dL - 2I$.

(b) Muestre que valen las siguientes relaciones: $L - I + n = 1$ y $4n = E + 2I$

(c) Usando las relaciones precedentes, halle la expresión del grado de divergencia en términos de las lineas externas E y el número de vertices n. Analice la renormalizabilidad y superenormalizabilidad de esta teoría para distintos valores de d, incluyendo $d = 4$

103 Repita el análisis anterior para QED en $d = 4$

104 Considere un campo de Klein-Gordon en d dimensiones con una interacción del tipo $g\phi^r$ (r entero positivo ≥ 4), siendo g la constante de acoplamiento.

(a) Halle las dimensiones de masa δ de la constante g.

(b) Halle la expresión de el grado superficial de divergencia en términos de δ, el número de vertices y el numero de patas externas.

(c) Analice la renormalizabilidad de cada modelo de acuerdo al signo de δ

105 Dibuje diagramas divergentes irreducibles de:

(a) QED

(b) $\lambda\phi^4$

106 Suponga que un diagrama de Feynman tiene grado de divergencia D negativo. Significa eso que es convergente? Para responder a esta pregunta considere ejemplos de diagramas a uno y dos loops el caso de QED.

Regularización de integrales divergentes

107 Muestre las siguientes identidades de integrales en d dimensiones para los valores de d en que estan bien definidas (el producto entre vectores que aparece en los integrandos es con la metrica de Minkowski):

(a) $\int d^dk \frac{1}{(k^2+2p.k-m^2)^2} = \frac{i(-1)^n\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(n)(m^2+p^2)^{n-\frac{D}{2}}}\Gamma(n - \frac{D}{2})$

(b) $\int d^dk \frac{k^\mu}{(k^2+2p.k-m^2)^2} = \frac{-i(-1)^n\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(n)(m^2+p^2)^{n-\frac{D}{2}}}p^\mu\Gamma(n - \frac{D}{2})$

108 Considere la contribución en el canal s a la función de 4 puntos de la teoría del ejercicio 1, a orden λ^2.

(a) Muestre que, a menos de factores, esta contribución esta dada por la integral divergente $\int^4 d^4p \frac{1}{p^2-m^2}\frac{1}{(p-q)^2-m^2}$, siendo q la suma de los momentos iniciales.

(b) Mediante la siguiente identidad $\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{z}{(az+b(1-z))^2}$ escriba la generalización de la integral precedente a d dimensiones en la forma $\int_0^1 dz \int d^dp \frac{1}{(p^2-m^2+q^2z(1-z))^2}$

(c) Usando la expansión $\Gamma(-n+\epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}(\frac{1}{\epsilon} + \psi(n+1) + o(\epsilon))$, con n natural y $\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + ... \frac{1}{n} - \gamma$ (siendo γ la constante de Euler-Mascheroni) halle la expresión de la integral anterior en el limite $d \to 4$

$\boxed{109}$ Mediante el metodo de regularización dimensional, halle la expresión regularizada de los siguientes diagramas (a un loop):

(a) Autonergía del electrón.

(b) Auto energía del fotón (o polarización del vacio)

(c) Grafo del vertice.

Renormalización

$\boxed{110}$ Usando las amplitudes a 1-loop regularizadas, formule los pasos que hay que seguir para obtener la expresión de la constantes de acoplamiento en función de los momentos externos tanto en QED como en $\lambda\phi^4$. Usando las expresiones que encuentre en la bibliograía, muestre que en ambos casos hay un *polo de Landau*.

$\boxed{111}$ Grafique la solución a la ecuación diferencial para la constante de acoplemiento g, función de la escala μ: $\mu\frac{dg}{d\mu} = \beta g^2$, con β constante, para los casos $\beta = 0$, $\beta > 0$ y $\beta < 0$