TEORÍA DE CAMPOS

NOTAS DE LA PRÁCTICA

Docentes:
David Blanco, Nicolás Del Grosso

Primer cuatrimestre 2020

Actualizadas al 27/04/2020

Estas notas cubren los temas de la práctica de Teoría de Campos. La idea es actualizar este material semanalmente a medida que avancemos con los temas. Tengan en cuenta que estas notas están en pleno desarrollo y por lo tanto pueden tener errores, typos, etc. Por este motivo, les pedimos que las lean críticamente. Se agradecen todo tipo de comentarios, sugerencias y correcciones.

Índice

1. Grupo de Poincaré **2**

1.1. Generalidades sobre grupos y álgebras 2

1.1.1. Grupos 2

1.1.2. Representaciones de grupos 4

1.1.3. Álgebra de Lie asociada a un grupo 6

1.2. Grupo Euclídeo 11

1.3. Representaciones irreducibles 12

1.4. Grupo de Lorentz 13

1.4.1. Transformaciones de Lorentz 13

1.4.2. Componentes del grupo de Lorentz 15

1.4.3. Álgebra del grupo de Lorentz 16

1.4.4. Espinores 20

1.5. Grupo de Poincaré 21

1. Grupo de Poincaré

La teoría cuántica de campos que estudiaremos es una teoría invariante ante el grupo de simetrías relativistas, que se conoce como grupo de Poincaré, y contiene al llamado grupo de Lorentz. Gracias al aporte de Minkowski, este grupo puede pensarse como el grupo de transformaciones que deja invariante a la métrica pseudoeculídea que lleva su nombre. En esta primera parte veremos aspectos de este grupo y su álgebra, comenzando con su análogo euclídeo. Veremos además cómo aparecen los espinores como representación del grupo de Lorentz.

1.1. Generalidades sobre grupos y álgebras

1.1.1. Grupos

Antes de comenzar con el estudio de los grupos mencionados, vamos a decir primero lo que es un grupo.

Definición: Un **grupo** es un conjunto G con una operación de multiplicación "$\cdot$" *cerrada* en el grupo, es decir tal que $g_1 \cdot g_2 \in G$ si g_1, $g_2 \in G$, y tal que

(a) Cumple *asociatividad*: $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$, para todo g_1, g_2, $g_3 \in G$;

(b) Existe *elemento neutro*: Existe $\mathbb{1} \in G$ tal que $\mathbb{1} \cdot g = g \cdot \mathbb{1} = g$, para todo $g \in G$;

(c) Existe *elemento inverso*: Dado $g \in G$, existe $g' \in G$ tal que $g \cdot g' = g' \cdot g = \mathbb{1}$.

Un ejemplo de grupo es el conjunto de los números reales tomando el producto del grupo como la operación suma entre números reales. La suma entre reales da un número real, es asociativa, tiene elemento neutro (el 0), y tiene elemento inverso (el elemento opuesto). En general, todo espacio vectorial define un grupo con respecto a su suma.

Noten que el conjunto de los números reales tomando la multiplicación como el producto entre reales no es un grupo: si bien el producto es asociativo y tiene elemento neutro (el 1), no todo elemento de $\mathbb{R}$ tiene inverso (el cero no lo tiene, ya que no existe $g' \in \mathbb{R}$ tal que $g'.0 = 1 = \mathbb{1}$). Sin embargo, como pueden fácilmente verificar, $\mathbb{R} - \{0\}$ sí es un grupo con respecto al producto usual.

Los grupos que mencionamos en los párrafos anteriores tienen **orden** (cantidad de elementos) infinito. Un ejemplo de grupo de orden finito es el dado por el conjunto de las potencias enteras de la unidad imaginaria i, tomando la multiplicación del grupo como el producto usual entre números complejos. Este grupo es una realización del llamado *grupo cíclico de* 4 *elementos*. El conjunto de elementos del grupo es $\{1, i, -1, -i\}$, por lo que el grupo tiene orden 4.

Todos los grupos que mencionamos hasta este punto son grupos **abelianos**. Esto significa que la multiplicación entre dos elementos del grupo da el mismo resultado independientemente del orden en el cual se multiplique. Cuando el orden de la multiplicación en un grupo altera el resultado decimos que el grupo es **no abeliano**. El grupo de simetrías del modelo estándar (que está construido a partir de un producto directo de grupos unitarios que veremos más adelante) es un ejemplo de grupo no abeliano relevante en física. Los ejemplos más comunes de grupos no abelianos están dados por grupos de matrices. Uno de ellos se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: (Práctica 1, Ejercicio 1) *Considere las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^D$ que dejan invariante la forma cuadrática $x^T x$, siendo $x \in \mathbb{R}^D$.*

(a) *Muestre que la matriz M que implementa la transformación lineal debe cumplir $M^T M = \mathbb{I}$, y como consecuencia de esto $|\det(M)| = 1$. El grupo de matrices que cumple $M^T M = \mathbb{I}$ se conoce como grupo ortogonal y se lo denota como $O(D)$.*

Sea $x' = Mx$ (el elemento x transformado por M). Imponiendo que la forma cuadrática sea invariante, es decir que $x^T x = x'^T x'$, resulta $x^T x = x'^T x' = x^T M^T M x$. Por lo tanto,

$$M^T M = \mathbb{I}\,. \tag{1}$$

lo que implica que $M^T = M^{-1}$. Tomando el determinante a ambos lados de esta última ecuación, y teniendo en cuenta que el determinante no cambia al trasponer la matriz, resulta $|\det(M)| = 1$.

Es sencillo ver que el conjunto de matrices invertibles que cumplen $M^T M = \mathbb{I}$ es un grupo tomando la multiplicación del grupo como el producto usual entre matrices. Verifiquemos esto:

- La multiplicación es cerrada: dados dos elementos M_1 y M_2 que cumplen la condición dada por la ecuación (1), $M_1 M_2$ también la cumple. En efecto,

$$(M_1 M_2)^T (M_1 M_2) = M_2^T M_1^T M_1 M_2 = M_2^T \mathbb{I} M_2 = M_2^T M_2 = \mathbb{I}\,. \tag{2}$$

- La multiplicación es asociativa (ya que el producto de matrices es asociativo);
- Existe el elemento neutro dentro del conjunto. Para la multiplicación entre matrices, el elemento neutro es la matriz identidad $\mathbb{I}$, que pertenece al conjunto ya que $\mathbb{I}^T \mathbb{I} = \mathbb{I}$;
- Existe el elemento inverso dentro del conjunto. Como partimos de considerar matrices invertibles sólo tenemos que ver que si M cumple (1), entonces M^{-1} también lo cumple. En efecto,

$$\left(M^{-1}\right)^T M^{-1} = (M^T)^{-1} M^{-1} = (M^{-1})^{-1} M^{-1} = M M^{-1} = \mathbb{I}\,, \tag{3}$$

donde en la penúltima igualdad utilizamos que M cumple (1) y por lo tanto $M^T = M^{-1}$.

(b) *Al subgrupo de matrices de $O(D)$ con determinante $+1$ se lo denomina $SO(D)$ ("S" por "special"). Argumente que para el subgrupo de matrices de $O(D)$ conectadas continuamente con la identidad el determinante debe ser $+1$. (Ocurre que la condición determinante $+1$ garantiza que la matriz se halla en el subgrupo conectado con la identidad, de modo que $SO(D)$ tiene una sola componente conexa que incluye a la identidad).*

Un **subgrupo** de un grupo dado es un subconjunto del conjunto original que es en sí mismo un grupo (con la multiplicación heredada del grupo original). Pueden probar que efectivamente las matrices del grupo ortogonal que tienen determinante $+1$ forman un grupo. Que una matriz M_0 dada esté "conectada continuamente con la identidad" significa que existe al menos una función continua $M(s_i)$ (que dados ciertos números reales s_i me da una matriz $M(s_i)$), y tal que las matrices M_0 y la matriz identidad están en la imagen de dicha función $M(s)$. Pueden imaginar que, en el espacio de las matrices, dicha función nos permiter construir una curva continua que conecta a la matriz M_0 con la identidad. Como la función $M(s)$ es continua, y la función determinante también lo es (ya que consiste en multiplicar y sumar entradas de la matriz), $\det[M(s)]$ también es continua. Dado que las matrices de $O(D)$ tienen determinante ± 1, y como $\det[\mathbb{I}] = 1$, para que $\det[M(s)]$ sea continua debe ser $\det[M(s)] = 1$. Las matrices de $O(D)$ que tienen ese determinante son justamente las matrices de $SO(D)$ que constituyen el grupo ortogonal especial o *grupo de rotaciones* en D dimensiones.

1.1.2. Representaciones de grupos

En esta sección vamos a presentar el concepto de representación de un grupo. Si bien este concepto va a ser relevante para nosotros recién en la próxima clase, es natural introducirlo mientras estamos hablando de grupos. En la definición que vamos a dar aparece el conjunto $gl(V)$, que es simplemente el conjunto de transformaciones lineales (biyectivas) que van de V en V, es decir

$$gl(V) = \{T : V \to V\,,\ \text{con } T \text{ biyectiva}\}\ .$$

Definición: Una **representación** de un grupo G sobre un espacio vectorial V es una aplicación $\pi : G \to gl(V)$ que cumple

$$\pi\left(g_1 \cdot g_2\right) = \pi\left(g_1\right)\pi\left(g_2\right)\ ,$$

para todo g_1, g_2 en G y tal que $\pi(\mathbb{1}) = \mathbb{I}_V$ (identidad sobre V) .

Tomemos un poco de tiempo para analizar esta definición. Si g es un elemento del grupo, y π es una representación, entonces $\pi(g)$ es un elemento de $gl(V)$. Es decir que $\pi(g)$ actúa sobre V y

me devuelve un elemento de V. Para no ser tan abstractos, si V es por ejemplo $\mathbb{C}^2$, $\pi(g)$ es una matriz de 2×2 cuyos coeficientes dependerán en general del elemento g del grupo. Pero para constituir una representación del grupo, estas matrices tienen que respetar la multiplicación del grupo: la matriz asociada a la multiplicación de dos elementos del grupo es el producto de las matrices asociadas a cada uno de ellos.

Observaciones:

(a) Dado V siempre existe una representación de G sobre V: si se toma $\pi(g) = \mathbb{I}_V$ (la identidad sobre V) para todo $g \in G$ es trivial ver que π es una representación de G. Cuando $V = \mathbb{C}$ (o $V = \mathbb{R}$) dicha representación se conoce como **representación trivial**.

(b) Si V tiene producto interno, se dice que una dada representación π de G en V es **unitaria** si $\pi(g)^\dagger \pi(g) = \mathbb{I}_V$ para todo g en G.

(c) Se dice que una representación es **fiel** si $\pi(g)$ es distinto para cada elemento g del grupo.

(d) V no tiene por qué ser necesariamente un espacio de dimensión finita. De hecho, como comentaremos más adelante, no existen representaciones unitarias de dimensión finita (no triviales) del grupo de Poincaré.

Ejercicio: *Considerar el grupo cíclico de cuatro elementos en la realización vista anteriormente en la cual el conjunto de elementos es $G = \{1,\, i,\, -1,\, -i\}$. Verificar que $\pi : G \to \mathbb{R}^2$ definido por*

$$\pi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pi(i) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi(-1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \pi(-i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

es una representación sobre $\mathbb{R}^2$ del grupo cíclico de cuatro elementos. Notar que esta representación no es trivial, es unitaria y es fiel. Intentar encontrar una representación del grupo pero ahora sobre $\mathbb{R}^3$.

Noten que podemos interpretar a cada una de las matrices anteriores como matrices de rotación de los vectores de $\mathbb{R}^2$ alrededor del eje z en ángulos de 0, $3\pi/2$, π y $\pi/2$, respectivamente. Quizás esto hace que sospechen algo que es efectivamente correcto: el grupo cíclico de cuatro elementos es un subgrupo del grupo de rotaciones en 2 dimensiones $SO(2)$ (cuyo orden es infinito). Esto puede servirles como ayuda para pensar cómo encontrar representaciones sobre $\mathbb{R}^3$, como se pide en el ejercicio.

El grupo de rotaciones en tres dimensiones $SO(3)$, que será de relevancia por ser un subgrupo del grupo de Poincaré que estudiaremos más adelante, está estrechamente relacionado con otro grupo

matricial importante en física denominado $SU(2)$ (grupo de matrices unitarias de dimensión 2 que tienen determinante $+1$). Aunque $SO(3)$ surge naturalmente al considerar las rotaciones espaciales, $SU(2)$ es más sencillo[1] y más fácilmente visualizable: $SU(2)$ es la esfera S^3 (para ver esto pueden mirar por ejemplo el artículo de Wikipedia que habla sobre la 3-esfera). Cuando decimos que el grupo es "visualizable" estamos haciendo referencia al hecho de que tanto $SO(3)$ como $SU(2)$, además de tener estructura de grupo, tienen estructura de variedad diferenciable.

Los grupos que tienen una estructura de variedad diferenciable compatible con la estructura de grupo se denominan **grupos de Lie**. Cada elemento de un grupo de Lie se puede reescribir como la exponencial de lo que se conoce como generador, y el conjunto de generadores forman un *álgebra de Lie*. A continuación veremos la definición de álgebra de Lie y estudiaremos cuál es el álgebra de Lie del grupo de rotaciones.

1.1.3. Álgebra de Lie asociada a un grupo

Definición: Un **álgebra de Lie** es un espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) con una operación corchete (o conmutador) "$[,]$" que cumple las siguientes propiedades

(a) Es *bilineal*:

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]\,,$$

$$[x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z]\,,$$

para todo x, y, $z \in V$ y α, $\beta \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$);

(b) Es *antisimétrica*: $[x, y] = -[y, x]$, para todo x, $y \in V$.

(c) Cumple la *identidad de Jacobi*: $[[x, y], z]+[[z, x], y]+[[y, z], x] = 0$, para todo x, y, $z \in V$.

Vean que lo que esencialmente diferencia la estructura de grupo de la de un álgebra es que esta última tiene, además de la multiplicación (corchete), una suma (por ser un espacio vectorial). Además, el producto de las álgebras de Lie no es asociativo, a diferencia de lo que sucede con los grupos. Esta falta de asociatividad se expresa a través de la identidad de Jacobi.

Un ejemplo que todos conocen de álgebra de Lie está dado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, donde se define el corchete como el producto vectorial entre dos vectores (pueden verificar que cumple las propiedades mencionadas arriba).

[1] Esto no quiere decir que $SU(2)$ no surja naturalmente en física. De hecho, la libertad de la elección en la fase de la función de onda en mecánica cuántica hace que sean de interés las llamadas representaciones bivaluadas de $SO(3)$, es decir, tanto las verdaderas representaciones unitarias de $SO(3)$ así como también aquellas que están determinadas salvo un factor de fase (y que se denominan *representaciones proyectivas*). Las representaciones bivaluadas de $SO(3)$ son justamente las representaciones de $SU(2)$.

Vamos a utilizar una propiedad, que no vamos a demostrar, que dice que dado un elemento del álgebra x, el conjunto $\{e^{tx}\}$ con $t \in \mathbb{R}$ es un subgrupo monoparamétrico (porque depende sólo del parámetro t) del grupo de Lie asociado al álgebra. Para que esto no suene tan abstracto piensen en el grupo de rotaciones en 3 dimensiones: los elementos del álgebra van a estar asociados a los operadores de momento angular en una dirección determinada y el parámetro t estaría asociado al ángulo de la rotación alrededor de esa dirección; estas rotaciones alrededor de un eje son claramente un subgrupo del grupo total de rotaciones y están caracterizadas por un sólo parámetro.

A continuación, vamos a estudiar con más detalle el álgebra del grupo de rotaciones. Para caracterizar dicho álgebra vamos a utilizar como guía el siguiente ejercicio de la práctica.

Ejercicio: (Práctica 1, Ejercicio 2) *Una matriz cualquiera M del grupo $SO(D)$ puede escribirse como la exponencial de otra: $M = e^A$. El conjunto de matrices que aparecen en la exponencial forman un álgebra, tomando el corchete como el conmutador entre matrices.*

(a) *Muestre que esta matriz A debe ser antisimétrica.*

En este inciso queremos comenzar a caracterizar el álgebra asociada al grupo de Lie $SO(D)$, que se denota $so(D)$ (en general se utilizan mayúsculas para denotar a los grupos y minúsculas para sus respectivas álgebras). Teniendo en cuenta la discusión previa a este ejercicio, sabemos que el conjunto de matrices dadas por e^{tA} con $t \in \mathbb{R}$ es un subgrupo de $SO(D)$, por lo que tiene que valer

$$\left(e^{tA}\right)^T \left(e^{tA}\right) = \mathbb{I}\,, \tag{5}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Noten que la traspuesta de la exponencial es la exponencial de la traspuesta (esto se puede ver recordando la definición de la exponencial de una matriz), así que

$$\left(e^{tA^T}\right) \left(e^{tA}\right) = \mathbb{I}\,. \tag{6}$$

Derivando respecto de t y tomando $t = 0$ llegamos a

$$A^T + A = 0\,, \tag{7}$$

lo que nos dice que A es antisimétrica.

(b) *Definimos la dimensión de un grupo de Lie como la dimensión del espacio vectorial de su álgebra asociada. A partir del inciso anterior, muestre que la dimensión de $SO(D)$ es $D(D-1)/2$.*

Sabemos que la matriz A es antisimétrica, por lo que sus elementos diagonales son nulos, y los de la supra-diagonal quedan determinados a partir de los de la sub-diagonal. La dimensión del espacio vectorial de las matrices antisimétricas es entonces la cantidad de elementos que hay en la sub-diagonal, que son $D(D-1)/2$.

(c) *Los generadores del espacio vectorial de matrices antisimétricas (cuya exponencial genera el grupo) pueden escribirse convenientemente en términos de una colección de matrices Σ_{IJ} (I, $J = 1, ..., D$), siendo por definción $\Sigma_{IJ} = -\Sigma_{JI}$ (note que aquí I y J no son las componentes de la matriz sino un doble índice que etiqueta cada matriz). En términos de estas, la matriz M de $SO(D)$ puede escribirse como:*

$$M = e^{\frac{1}{2}\Sigma_{IJ}\omega^{IJ}} \tag{8}$$

siendo ω^{IJ} parámetros reales sujetos a la relación $\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$. Para el caso $D = 3$, halle un conjunto de matrices Σ_{IJ} y parámetros ω^{IJ} en términos de los generadores y ángulos usuales de rotación que expresan la rotación en torno a un eje. Relacione el indice IJ con el plano de rotación.

Comenzamos aclarando que en la ecuación (8) hay una suma doble implícita sobre los índices I y J. Siempre que aparezcan índices repetidos consideren que hay una suma implícita, a menos que se indique lo contrario.

Para el caso $D = 3$ la cantidad de generadores es $3 \times (3-1)/2 = 3$. Veamos por ejemplo cuál es el generador Σ_{xy} asociado a la matriz de rotación en ángulo θ alrededor del eje z $R_z(\theta)$. Recuerden que

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{9}$$

Estamos buscando una matriz Σ_{xy} de 3×3 y una constante ω_{xy} tales que resulte

$$e^{\omega_{xy}\Sigma_{xy}} = R_z(\theta) . \tag{10}$$

Noten que no incluimos en la exponencial el término $\omega_{yx}\Sigma_{yx}$, ya que $\omega_{yx}\Sigma_{yx} = (-\omega_{xy})(-\Sigma_{xy}) = \omega_{xy}\Sigma_{xy}$ y esto cancela el factor $1/2$ que aparece en el exponente de la ecuación (8). Como $R_z(\theta)$ es una matriz por bloques, el bloque de un solo elemento (donde aparece el valor 1) se podrá obtener fácilmente haciendo la exponencial de una matriz con la misma estructura de bloques y cuyo elemento diagonal inferior es un 0. Es decir, la estructura de Σ_{xy} debe ser la siguiente

$$\Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{11}$$

Ahora nos queda determinar los coeficientes α_{ij} para que resulte

$$\exp\left(\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \tag{12}$$

Para esto, es útil recordar la propiedad

$$e^{i\theta\hat{n}\cdot\bar{\sigma}} = \cos\theta\,\mathbb{I} + i\text{sen}\theta\,\hat{n}\cdot\bar{\sigma} , \tag{13}$$

donde $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ es un versor y $\bar{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, siendo σ_i las matrices de Pauli. Noten que para obtener los sen en la antidiagonal de la matriz de la ecuación (12) tenemos que elegir $\hat{n} = (0, 1, 0)$. En efecto, resulta

$$e^{i\theta\sigma_y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \tag{14}$$

por lo que vamos a tomar

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = i\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Finalmente, tenemos entonces

$$\Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

y $\omega_{xy} = \theta$. Noten que Σ_{xy} es antisimétrica, como debía serlo. Tenemos aquí un ejemplo concreto de un subgrupo monoparamétrico de $SO(3)$ (el parámetro es θ y el generador Σ_{xy}): las matrices de rotación alrededor del eje z. La resolución se tornó un poco larga porque trabajamos a fuerza bruta. Noten que el procedimiento de hallar los generadores se simplifica mucho si recordamos que el conjunto de las matrices $R_z(\theta)$ es un subgrupo monoparamétrico de $SO(3)$, donde el parámetro es θ. Escribiendo $R_z(\theta) = e^{\theta\,\Sigma_{xy}}$, vemos que debe ser

$$\Sigma_{xy} = \left.\frac{dR_z(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0}. \tag{17}$$

Por esta última ecuación se suele decir que "el álgebra es la aproximación lineal del grupo"; el álgebra puede pensarse como el espacio tangente al grupo en la identidad. Retomando el ejercicio, podemos calcular Σ_{xy} del siguiente modo

$$\Sigma_{xy} = \left.\frac{dR_z(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta}\left.\begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

que coincide con el resultado que ya habíamos obtenido. De forma similar, pueden ustedes hallar los dos generadores restantes

$$\Sigma_{yz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y } \Sigma_{zx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Ya determinamos los elementos del álgebra de Lie asociada al grupo de rotaciones. En el Ejercicio 3 de la práctica les pedimos a ustedes que vean que el corchete entre los generadores es

$$[\Sigma_{IJ}, \Sigma_{MN}] = \delta_{IN}\Sigma_{JM} + \delta_{JM}\Sigma_{IN} - \delta_{IM}\Sigma_{JN} - \delta_{JN}\Sigma_{IM} \,. \tag{20}$$

Esto determina completamente el álgebra $so(D)$ asociada al grupo de rotaciones. Definiendo

$$J_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_{jk} \,, \tag{21}$$

la relación (20) nos da (esta cuenta se pide en el Ejercicio 8)

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \,, \tag{22}$$

que deben reconocer como el álgebra de momento angular $su(2)$. Esto nos dice que $so(3) = su(2)$. Ustedes ya conocen representaciones de este álgebra[2]. Una representación de $su(2)$ sobre $\mathbb{C}^2$ está dada por las matrices de Pauli

$$J_1 \to \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \,, \quad J_2 \to \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \,, \quad J_3 \to \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \,. \tag{23}$$

Esta representación la conocen como la de momento angular $j = 1/2$. También conocen representaciones sobre espacios de mayor dimensión. Por ejemplo, una representación de $su(2)$ sobre $\mathbb{C}^3$ queda definida tomando

$$J_1 \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \,, \quad J_2 \to \frac{1}{\sqrt{2}i}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \,, \quad J_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \,. \tag{24}$$

Esta es la representación asociada a $j = 1$. En general, las representaciones irreducibles (ya veremos mejor qué significa esto) de $su(2)$ están caracterizadas por un semientero j y actúan sobre $\mathbb{C}^{2j+1}$ (es decir, son matrices cuadradas de tamaño $2j + 1$).

Si bien $so(3) = su(2)$, como mencionamos anteriormente los grupos $SO(3)$ y $SU(2)$ no coinciden. Anteriormente mencionamos que $SU(2)$ se puede visualizar como una esfera. $SO(3)$ es en efecto una esfera pero con los puntos antipodales identificados. Si tomamos un pedazo pequeño de esa esfera, el punto antipodal de uno dado no nos interesa, está fuera del pedazo tomado. Localmente, la esfera y la esfera con los puntos antipodales identificados son iguales. Esto es justamente lo que nos dice la igualdad entre las álgebras asociadas: localmente los grupos son iguales.

[2] La definición de representación de un álgebra es análoga a la de representación de un grupo. En esencia, la representación de un elemento del álgebra será una matriz, y el producto y suma de matrices da la matriz asociada al producto y suma de elementos del álgebra.

1.2. Grupo Euclídeo

El grupo Euclídeo es el grupo de transformaciones que dejan invariantes a la distancia euclídea entre dos puntos. Dicho grupo está compuesto por el grupo de rotaciones y el grupo de traslaciones, y se denota por $ISO(3)$ (o $ISO(D)$ en D dimensiones). En el ejercicio 4 les pedimos que estudien el álgebra asociada al grupo Euclídeo.

La clase que viene vamos a estudiar lo que sería el análogo al grupo Euclídeo en relatividad especial, es decir, el grupo de transformaciones que deja invariante la "distancia" entre dos puntos en el espacio-tiempo. A las rotaciones y traslaciones se van agregar otras transformaciones que mezclan tiempo y espacio y se denominan *boosts*.

Algunas cosas para llevarse de esta clase

- Un grupo es un conjunto de elementos con una multiplicación asociativa entre elementos del grupo, y que tiene elemento neutro e inverso.
- Un álgebra de Lie es un espacio vectorial donde además hay un producto entre elementos del álgebra (corchete) que es bilineal, antisimétrico y que cumple Jacobi.
- Para los llamados grupos de Lie (que son los que más nos van interesar), dado g en el grupo, existe x en un álgebra de Lie tal que $g = e^x$. x se conoce como generador.
- En el contexto del inciso anterior, el conjunto $g(t) = e^{tx}$ con $t \in \mathbb{R}$ define un subgrupo. Noten que $x = g'(t)|_{t=0}$.
- Lista de grupos para recordar: $O(D)$, $SO(D)$, $U(D)$, $SU(D)$, $ISO(D)$. Las álgebras asociadas se notan con minúsculas.
- Las representaciones *irreducibles* (ya veremos qué significa esta palabra) de $su(2)$ quedan clasificadas por un semientero $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$. Fijado j, la dimensión de la representación es $2j + 1$ (son las matrices de momento angular que ya han visto).

1.3. Representaciones irreducibles

Al estudiar las distintas representaciones de un grupo es importante poder descomponer una dada representación en "partes" más simples. Una manera de conseguir esto es buscar cuáles son los menores subespacios invariantes (no triviales) de la representación.

Consideremos una representación $\pi : G \to gl(V)$. Decimos que un subespacio de W de V es invariante por π si $\pi(g)(W) \subseteq W$ para todo elemento g del grupo. Visto esto, podemos definir lo que significa que una representación sea irreducible (que suele abreviar como irrep).

Definición: Una representación $\pi : G \to gl(V)$ dada es **irreducible** si V no posee subespacios invariantes por π no triviales.

Toda representación de dimensión 1 es irreducible ya que los únicos subespacios de un espacio de dimensión 1 son los subespacios triviales. Veamos un ejemplo menos trivial que nos permitan entender mejor esta definición.

Consideremos el grupo de rotaciones en dos dimensiones $SO(2)$. Una representación de este grupo sobre $V = \mathbb{R}^3$ está dada por la asignación de elementos del grupo a matrices de la forma dada por la ecuación (9). Veamos que esta representación de $SO(2)$ es reducible. Para ello, consideremos el subespacio W de V generado por el vector $(0, 0, 1)$, o sea, el eje z. Las rotaciones alrededor de este eje dejan obviamente al eje invariante,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R}), \tag{25}$$

Por lo tanto, $W = \langle (0, 0, 1) \rangle$ es un subespacio invariante por la representación dada (y es no trivial, es decir, no es ni el espacio total ni el nulo). La representación es entonces reducible. Una estructura en bloques como la de la matriz de la ecuación (9) es sinónimo de que la representación es reducible.

Les dejamos como ejercicio que prueben que la aplicación que a un elemento $R(\theta)$ de $SO(2)$ le asigna la matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{26}$$

define una representación irreducible (o irrep) de $SO(2)$ sobre $\mathbb{R}^2$.

Toda representación reducible puede descomponerse como suma directa de representaciones irreducibles. Las representaciones irreducibles son en cambio bloques indivisibles, *elementales*. Se suele decir que "las partículas elementales transforman como las representaciones unitarias irreducibles del grupo de Poincaré". A lo largo del curso vamos a ir dándole sentido y precisión a esta

frase. Por lo pronto, sepan que la propia definición de lo que en nuestra teoría es una partícula elemental va a estar fuertemente relacionada con las irreps del grupo de Poincaré.

Sobre el final de la clase de hoy presentamos el grupo de Poincaré y les dejamos un ejercicio que introduce los dos operadores de Casimir de su álgebra, que servirán para clasificar la acción de las representaciones del grupo sobre los estados de una partícula. Con esta perspectiva en mente, vamos a comenzar estudiando varios aspectos de un subgrupo del grupo de Poincaré: el grupo de Lorentz.

1.4. Grupo de Lorentz

1.4.1. Transformaciones de Lorentz

La clase pasada estudiamos el grupo de rotaciones. Vamos a ver ahora lo que sería el análogo a este grupo para la geometría Minkowskiana.

Ejercicio: (Práctica 1, Ejercicio 6) *Considere una transformación dada por una matriz* Λ

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_{\cdot\nu} x^\nu \,, \tag{27}$$

que deje invariante la forma $x^T \eta x$*, siendo* x *una coordenada de un punto del espacio-tiempo 4 dimensional y*

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \tag{28}$$

En componentes, $x^T \eta x = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$*,* $\mu = 0, 1, 2, 3$*. Al grupo de transformaciones lineales que deja esa forma cuadrática invariante se lo llama grupo de Lorentz.*

Halle la condición análoga a la del grupo de rotaciones (Ejercicio 1.a) para la matriz Λ*. Muestre que la matriz* λ *definida por* $\Lambda = e^\lambda$ *satisface* $\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}$*, siendo* $\lambda_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\rho}\lambda^\rho_\nu$*.*

Sea $x' = \Lambda x$ (el elemento x transformado por Λ). Imponiendo que la forma cuadrática sea invariante, es decir que $x^T \eta x = x'^T \eta x'$, resulta $x^T \eta x = x'^T \eta x' = x^T \Lambda^T \eta \Lambda x$. Por lo tanto,

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \,. \tag{29}$$

Veamos ahora cómo queda caracterizada el álgebra asociada a este grupo. Escribimos un elemento genérico Λ del grupo en términos de un elemento del álgebra

$$\Lambda = e^\lambda \,. \tag{30}$$

Luego, sabemos que el conjunto $\Lambda(t) = e^{t\lambda}$ con $t \in \mathbb{R}$ es un subgrupo monoparamétrico del Lorentz, por lo que vale

$$\Lambda^T(t)\eta\Lambda(t) = \eta\,. \tag{31}$$

Desarrollando esta expresión análogamente a como hicimos en el Ejercicio 1, derivando respecto a t y evaluando en $t = 0$, se obtiene

$$\lambda^T = -\lambda\,, \tag{32}$$

que en componentes se escribe como

$$\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}\,. \tag{33}$$

Vean que el resultado es completamente análogo al del Ejercicio 1, con la diferencia de que aquí aparece una métrica η no trivial (la del espacio de Minkowski). Noten que la dimensión del álgebra es $4 \times (4-1)/2 = 6$.

Veamos algunos ejemplos de transformaciones de Lorentz. Después de lo visto la clase anterior, seguramente están pensando en las rotaciones alrededor de los ejes x, y y z

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_x & \text{sen}\theta_x \\ 0 & 0 & -\text{sen}\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_y & 0 & \text{sen}\theta_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\text{sen}\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_z & \text{sen}\theta_z & 0 \\ 0 & -\text{sen}\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{34}$$

También tenemos los boosts en las direcciones x, y y z

$$\begin{bmatrix} \cosh\beta_x & \sinh\beta_x & 0 & 0 \\ \sinh\beta_x & \cosh\beta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cosh\beta_y & 0 & \sinh\beta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh\beta_y & 0 & \cosh\beta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cosh\beta_z & 0 & 0 & \sinh\beta_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\beta_z & 0 & 0 & \cosh\beta_z \end{bmatrix}, \tag{35}$$

donde β_i está relacionada con la velocidad v_i del boost en la dirección i por

$$\cos\beta_i = \frac{1}{\sqrt{1-v_i^2}}\,, \quad \text{sen}\beta_i = \frac{v_i}{\sqrt{1-v_i^2}}\,. \tag{36}$$

La reflexión total

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{37}$$

es también una transformación de Lorentz, así como también lo es la inversión temporal

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{38}$$

La elección de los ejemplos que mostramos no es aleatoria: cualqueier transformación de Lorentz puede descomponerse como un producto de estos cuatro tipos de transformaciones.

Las matrices de los ejemplos anteriores dan una representación del grupo de Lorentz sobre $\mathbb{C}^4$. En esta clase vamos a hacer un estudio más general de las representaciones del grupo de Lorentz y para ello estudiaremos su álgebra de Lie. Pero antes de eso, hablemos un poco de la estructura de este grupo (esta discusión que sigue responde al Ejercicio 7 de la práctica).

1.4.2. Componentes del grupo de Lorentz

Noten que si toman el determinante de ambos miembros de la ecuación (29) se obtiene

$$\det(\Lambda) = \pm 1 \,. \tag{39}$$

Esto define dos subconjuntos de las transformaciones de Lorentz

- $\det \Lambda = +1$: **transformaciones propias**.
- $\det \Lambda = -1$: **transformaciones impropias**.

Ejemplos de transformaciones propias son la identidad, las rotaciones, la reflexión total. La reflexión espacial ($\Lambda = \eta$) es un ejemplo de una transformación impropia.

Hay una clasificación adicional dentro del grupo de Lorentz, que sale de escribir la componente 00 de la ecuación (29)

$$(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{j=1}^{3} (\Lambda^j_0)^2 = 1 \implies \Lambda^0_0 \geq 1 \quad \text{ó} \quad \Lambda^0_0 \leq -1 \,. \tag{40}$$

Podemos clasificar entonces a las transformaciones de acuerdo a lo siguiente.

- $\Lambda^0_0 \geq 1$: **transformaciones ortócronas**.
- $\Lambda^0_0 \leq -1$: **transformaciones no ortócronas** (invierten el sentido del tiempo).

El grupo de Lorentz consiste entonces de cuatro componentes conexas (ver figura 1):

$$\begin{aligned} L^{\uparrow}_{+} \quad &: \quad \det \Lambda = +1 \;\; \Lambda^0_0 \geq 1 \,; \\ L^{\downarrow}_{+} \quad &: \quad \det \Lambda = +1 \;\; \Lambda^0_0 \leq -1 \,; \\ L^{\uparrow}_{-} \quad &: \quad \det \Lambda = -1 \;\; \Lambda^0_0 \geq 1 \,; \\ L^{\downarrow}_{-} \quad &: \quad \det \Lambda = -1 \;\; \Lambda^0_0 \leq -1 \,. \end{aligned}$$

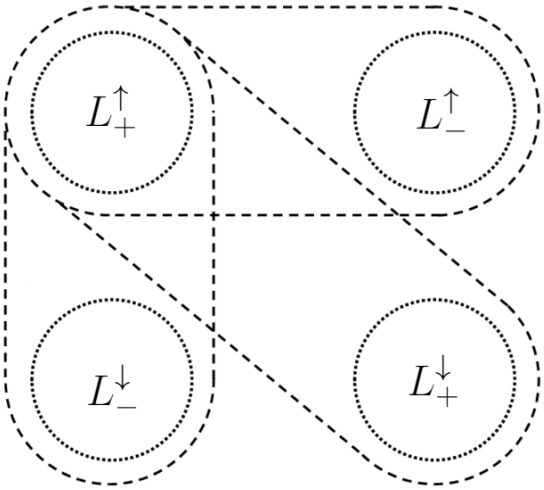

Fig. 1: **Grupo de Lorentz.** Las cuatro componentes conexas del grupo de Lorentz se esquematizan con círculos punteados en la figura, mientras que las líneas de trazos encierran a los tres subgrupos del grupo de Lorentz (noten que todo grupo debe contener a $L_+^\uparrow$ ya que dicha componente es la que contiene a la identidad). El subgrupo $L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow$ se conoce como Grupo de Lorentz propio y es el relevante para toda la fenomenología de partículas.

$L_+^\uparrow$ es un subgrupo y se conoce como Grupo de Lorentz propio ortócrono. Sin embargo, este no es el único subgrupo de grupo de Lorentz. De hecho, $L_+^\uparrow$ junto a cualquiera de las otras tres componentes son subgrupos. El que nos va a interesar a nosotros es $L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow$, que se conoce como **Grupo de Lorentz propio** y se nota $SO(3,1)$ (el 3 por la dimensión espacial, el 1 por la temporal).

1.4.3. Álgebra del grupo de Lorentz

En esta sección, vamos a encontrar los generadores de las rotaciones y los boosts, y los conmutadores entre dichos generadores. Como las relaciones de conmutación valen lo mismo en cualquier representación (recuerden por ejemplo lo que vimos sobre las representaciones de $su(2)$) al hacer esto vamos a tener determinada en forma abstracta el álgebra del grupo de Lorentz. Una vez que tengamos el álgebra, será cuestión de estudiar sus representaciones para ver las que se inducen sobre el grupo.

A modo de ejemplo, comencemos calculando el generador de los boosts en la dirección x. Recordamos que dicho boosts se representa por la siguiente matriz

$$\Lambda(\beta_x) = \begin{bmatrix} \cosh\beta_x & \sinh\beta_x & 0 & 0 \\ \sinh\beta_x & \cosh\beta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{41}$$

Buscamos una matriz $M_{tx} = -M_{xt}$ tal que resulte

$$\Lambda(\beta_x) = e^{\frac{i}{2}(\beta_x M_{tx} - \beta_x M_{xt})} = e^{i\beta_x M_{tx}} . \tag{42}$$

β_x juega aquí el rol análogo a los ω^{IJ} de la ecuación (8). Por eso M_{xt} aparece multiplicado por $-\beta_x$, ya que recuerden que $\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$. Agregamos además la unidad imaginaria i para ser consistentes con la definición más común de los generadores que suele hacerse en la literatura de física. En virtud de la ecuación (42) se tiene $M_{tx} = -i\Lambda'(\beta_x)|_{\beta_x=0}$, que introduciendo la forma explícita del boost nos da

$$M_{tx} = -i\Lambda'(\beta_x)|_{\beta_x=0} = -i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{43}$$

Siguiendo un procedimiento similar pueden obtener los generadores asociados a los boosts en y y z

$$M_{ty} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad M_{tz} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \tag{44}$$

y los asociados a las rotaciones en x, y y z

$$M_{yz} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} , \quad M_{zx} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad M_{xy} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{45}$$

Noten que, salvo por la dimensión y por el factor $-i$ asociado al cambio de definición, los generadores de las rotaciones tienen la misma forma que ya habíamos hallado en las ecuaciones (18) y (19). Pueden convencerse de que

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) , \tag{46}$$

haciendo los conmutadores entre las matrices (recuerden que los subíndices aquí etiquetan a las matrices y no denotan componentes). Este es el álgebra del grupo de Lorentz propio y se nota $so(3,1)$.

Ejercicio: Demostrar que la asignación que a la matriz $M_{\mu\nu}$ le hace corresponder el operador $i\,(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$ es una representación del álgebra de Lorentz. En este caso, estamos tomando una representación sobre el espacio de funciones del espacio-tiempo. Noten que si μ y ν corresponden a las coordenadas espaciales (las notamos con i, j), el operador $i\,(x_i\partial_j - x_j\partial_i)$ es una componente del momento angular. Esto es razonable, recuerden que el grupo de Lorentz tiene como subgrupo al grupo de rotaciones.

Ayuda: recuerden que ya conocen cuánto vale el conmutador entre el operador de multiplicación y la derivación

$$[x, \partial_x] = i\,. \tag{47}$$

Ya tenemos el álgebra de Lorentz. Ahora vamos a realizar unos desarrollos que nos permitirán escribir las representaciones de $so(3,1)$ en términos de representaciones de $su(2)$. Estos desarrollos responden a los Ejercicios 8 y 9 de la práctica.

Primero, veamos una forma de reescribir las relaciones entre los generadores $M_{\mu\nu}$ dadas por (46) que definen el álgebra de Lorentz. Definimos

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}\,, \\ K_i &= M_{i0}\,, \end{aligned}$$

donde i, j, k hacen referencia a parte espacial. Veamos cuánto valen los conmutadores entre estos generadores. Una parte ya está hecha, ya que en la clase pasada vimos que

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k\,. \tag{48}$$

Esto nos dice que el álgebra asociada al grupo de rotaciones es $su(2)$. Veamos los otros conmutadores, comenzando por el de dos boosts

$$[K_i, K_j] = [M_{i0}, M_{j0}] = i(g_{i0}M_{0j} + g_{0j}M_{i0} - g_{ij}M_{00} - g_{00}M_{ij}) = \tag{49}$$

$$= i(-g_{00}M_{ij}) = -iM_{ij}\,. \tag{50}$$

Usando que $M_{ij} = -M_{ji}$, podemos reescribir M_{ij} como $(M_{ij} + M_{ji})/2$. Entonces

$$[K_i, K_j] = -i\left[\frac{1}{2}(M_{ij} - M_{ji})\right] = -i\,(\epsilon_{kij}J_k) = -i\epsilon_{ijk}J_k\,, \tag{51}$$

donde en la penúltima igualdad utilizamos que $J_k\epsilon_{kmn} = \frac{1}{2}(M_{mn} - M_{nm})$ (para probar esto necesitan usar que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$). Vemos entonces que los generadores de los boosts no conmutan entre sí. El conmutador que resta entre generadores de boosts y rotaciones sale de forma similar. En resumen, se tiene

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k\,, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k\,, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k\,.$$

Noten que de las relaciones anteriores se puede concluir que los boosts no forman un grupo ya que el álgebra de sus generadores no es cerrada, a diferencia de lo que sucede con las rotaciones.

Veamos ahora que definiendo

$$\bar{A} = \frac{1}{2}(\bar{J} - i\bar{K})\,, \quad \bar{B} = \frac{1}{2}(\bar{J} + i\bar{K})\,, \tag{52}$$

donde $\bar{J} = (J_1, J_2, J_3)$ y $\bar{K} = (K_1, K_2, K_3)$, el álgebra de Lorentz es suma directa de dos $su(2)$. Para ello, hallamos los conmutadores entre estos nuevos generadores

$$\begin{aligned}
[A_i, A_j] &= \left[\frac{1}{2}(J_i - iK_i), \frac{1}{2}(J_j - iK_j)\right] = \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] - i[K_i, J_j] - i[J_i, K_j] - [K_i, K_j]\right) = && (53)\\
&= \frac{1}{4}\left(i\epsilon_{ijk}J_k + \epsilon_{ijk}K_k + \epsilon_{ijk}K_k + i\epsilon_{ijk}J_k\right) = \frac{i\epsilon_{ijk}}{2}\left(J_k - iK_k\right) = && (54)\\
&= i\epsilon_{ijk}A_k\,. && (55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[B_i, B_j] &= \left[\frac{1}{2}(J_i + iK_i), \frac{1}{2}(J_j + iK_j)\right] = \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] + i[K_i, J_j] + i[J_i, K_j] - [K_i, K_j]\right) = && (56)\\
&= \frac{1}{4}\left(i\epsilon_{ijk}J_k - \epsilon_{ijk}K_k - \epsilon_{ijk}K_k + i\epsilon_{ijk}J_k\right) = \frac{i\epsilon_{ijk}}{2}\left(J_k + iK_k\right) = && (57)\\
&= i\epsilon_{ijk}B_k\,. && (58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[A_i, B_j] &= \left[\frac{1}{2}(J_i - iK_i), \frac{1}{2}(J_j + iK_j)\right] = \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] - i[K_i, J_j] + i[J_i, K_j] + [K_i, K_j]\right) = && (59)\\
&= \frac{1}{4}\left(i\epsilon_{ijk}J_k + \epsilon_{ijk}K_k - \epsilon_{ijk}K_k - i\epsilon_{ijk}J_k\right) = 0\,. && (60)
\end{aligned}$$

Vemos entonces que los operadores A_i y B_i conmutan entre ellos, es decir, sus álgebras son independientes entre sí, y además, el álgebra de cada uno de ellos es el álgebra de $su(2)$. En términos matemáticos, $so(3,1) = su(2) \oplus su(2)$. De esta propiedad para el álgebra de Lorentz se desprende que:

> Las representaciones del grupo de Lorentz se etiquetan por el par de semienteros (j_1, j_2), que corresponden al espín de la representación de cada $su(2)$.

1.4.4. Espinores

Como un ejemplo de lo visto al final de la sección anterior, vamos a ver que los espinores surgen de las representaciones del grupo de Lorentz etiquetadas por $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Recordemos que al escribir (j_1, j_2) estamos haciendo referencia a dos representaciones del álgebra de $su(2)$, de momentos angulares j_1 y j_2. Para $\left(\frac{1}{2},0\right)$, estamos buscando representar al operador momento angular $\bar{A}$ en término de matrices cuadradas de orden $2\times\frac{1}{2}+1=2$. Esto puede hacerse tomando

$$\bar{A} \to \frac{1}{2}\bar{\sigma}\,, \tag{61}$$

donde $\bar{\sigma}$ es un vector cuyas componentes son las matrices de Pauli. Ya han verificado en mecánica cuántica que esta es una representación de $su(2)$. Por otro lado, el momento angular $\bar{B}$ debe ser representado por matrices de orden $2\times 0+1=1$. La representación en este caso es la trivial

$$\bar{B} \to 0\,. \tag{62}$$

Noten que haber elegido representaciones para $\bar{A}$ y $\bar{B}$ nos permite escribir representaciones para los boosts y las rotaciones (invirtiendo las ecuaciones dadas en (52))

$$\text{Para } \left(\frac{1}{2},0\right): \quad \bar{J} \to \frac{1}{2}\bar{\sigma}\,, \quad \bar{K} \to \frac{i}{2}\bar{\sigma}\,. \tag{63}$$

Trabajando de forma análoga para la representación $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, llegamos a que

$$\text{Para } \left(0,\frac{1}{2}\right): \quad \bar{J} \to \frac{1}{2}\bar{\sigma}\,, \quad \bar{K} \to -\frac{i}{2}\bar{\sigma}\,. \tag{64}$$

Las matrices de Pauli son hermíticas, con lo que las rotaciones también lo son. Los boots en cambio son antihermíticos. Noten que los generadores en la representación $\left(\frac{1}{2},0\right)$ son los adjuntos de los de la representación $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Por eso se dice que estas representaciones son complejas conjugadas.

Los elementos del espacio vectorial sobre el cual actúa la representación de $j=1/2$ se conocen como **espinores** (ver Ejercicio 5 de la práctica). Los espinores asociados a $\left(\frac{1}{2},0\right)$ se conocen como **espinores izquierdos** y se suelen denotar como ψ_L, mientras que los asociados a $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ son los **espinores derechos** ψ_R. Estos espinores se conocen como **espinores de Weyl**. Los espinores de Dirac van a surgir al considerar $\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Volveremos sobre este tema más adelante en el curso.

Un último comentario antes de terminar con esta sección. Noten que estas representaciones del álgebra inducen representaciones en el grupo que no son unitarias, debido a que la representación de los boosts no es hermítica (recuerden que los elementos del grupo son exponenciales de i por los generadores). Esto es general: cualquier representación del grupo de Lorentz construida usando las representaciones finito dimensionales del grupo $SU(2)\times SU(2)$ será no unitaria. No

hay representaciones unitarias de dimensión finita del grupo de Lorentz[3]. Más adelante veremos cómo construir representaciones unitarias de dimensión infinita.

1.5. Grupo de Poincaré

El grupo de Poincaré se obtiene al agregar traslaciones al grupo de Lorentz. Se pueden definir subgrupos del grupo de Poincaré análogos a los vistos para el grupo de Lorentz. Por ejemplo, $P_+^\uparrow$ simboliza el grupo formado por $L_+^\uparrow$ y las traslaciones.

En el Ejercicio 10 de la práctica les pedimos que escriban esquemáticamente las relaciones de conmutación entre los generadores del grupo de Poincaré. A continuación, les dejamos dichas relaciones, intenten darle sentido de acuerdo a lo que ya vieron para el grupo Euclídeo:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0\,, \tag{65}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = -ig_{\mu\sigma}P_\nu + ig_{\nu\sigma}P_\mu\,, \tag{66}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = ig_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + ig_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\,. \tag{67}$$

Para terminar la clase, les dejamos un último ejercicio, al cual volveremos cuando empecemos a estudiar la cuantización de campos libres.

Ejercicio: Probar que $P^2 := P_\mu P^\mu$ y $W := -W_\mu W^\mu$, con $W^\mu := \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma}$ (pseudovector de Pauli-Lubanski) son operadores de Casimir de $P_+^\uparrow$ (esto quiere decir que conmutan con todos los elementos del álgebra).

Comentario: Estos operadores nos van a pertimir "etiquetar" a las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré. Si les genera ansiedad y quieren leer un poco más sobre esto ahora, pueden comenzar viendo el artículo de Wikipedia "Wigner's classification" y las referencias que allí se mencionan.

---

[3]Este resultado está asociado a que el grupo no es *compacto*.

Algunas cosas para llevarse de esta clase

- Grupos para recordar: grupo de Lorentz y subgrupos, grupo de Poincaré.
- $so(3,1) = su(2) + su(2) \implies$ Irreps de $SO(3,1)$ se etiquetan por (j_1, j_2) (espín de cada $su(2)$).
- Un espinor es un elemento sobre el cual actúa la irrep de $su(2)$ de $j = 1/2$.
- Espinor de Weyl $\begin{cases} \text{izquierdo} \to \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ \text{derecho} \quad \to \left(0, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$
- Las irreps del grupo de Poincaré van a estar asociadas al concepto de partícula elemental en nuestra teoría.