TEORÍA DE CAMPOS

NOTAS DE LA PRÁCTICA

Docentes:
David Blanco, Nicolás Del Grosso

Primer cuatrimestre 2020

Actualizadas al 18/05/2020

Estas notas cubren los temas de la práctica de Teoría de Campos. La idea es actualizar este material semanalmente a medida que avancemos con los temas. Tengan en cuenta que estas notas están en pleno desarrollo y por lo tanto pueden tener errores, typos, etc. Por este motivo, les pedimos que las lean críticamente. Se agradecen todo tipo de comentarios, sugerencias y correcciones.

Índice

1. Grupo de Poincaré **3**

1.1. Generalidades sobre grupos y álgebras . . . 3

1.1.1. Grupos . . . 3

1.1.2. Representaciones de grupos . . . 5

1.1.3. Álgebra de Lie asociada a un grupo . . . 7

1.2. Grupo Euclídeo . . . 12

1.3. Representaciones irreducibles . . . 13

1.4. Grupo de Lorentz . . . 14

1.4.1. Transformaciones de Lorentz . . . 14

1.4.2. Componentes del grupo de Lorentz . . . 16

1.4.3. Álgebra del grupo de Lorentz . . . 17

1.4.4. Espinores . . . 21

1.5. Grupo de Poincaré . . . 22

1.6. Material adicional: El grupo conforme . . . 23

2. Ecuaciones de onda relativistas **25**

2.1. Ecuación de Klein-Gordon . . . 25

2.2. Ecuacion de Klein-Gordon para un campo complejo . . . 28

2.3. Ecuación de Dirac . . . 31

2.3.1. Representación Quiral . . . 33

3. Formulación Lagrangiana de teorías de campos **37**

3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . 38

3.2. Teorema de Noether 42

3.2.1. Invariancia bajo traslaciones. Tensor de energía-impulso 44

3.2.2. Invariancia bajo el grupo de Lorentz 48

3.3. Material adicional: Segundo Teorema de Noether 52

4. Teorías libres **53**

4.1. Cuantización canónica del campo escalar real 53

4.1.1. Hamiltoniano 53

4.1.2. Orden normal de operadores 56

4.1.3. Evolución de los campos 57

4.1.4. Espacio de estados 58

4.1.5. Estado de vacío. Energía de punto cero 60

4.1.6. Interpretación de partícula 62

4.1.7. Funciones de n puntos 65

4.1.8. Microcausalidad 67

4.1.9. Simetrías 70

4.2. Cuantización del campo escalar complejo 72

4.2.1. Propagador 74

A. Derivadas Funcionales **78**

1. Grupo de Poincaré

La teoría cuántica de campos que estudiaremos es una teoría invariante ante el grupo de simetrías relativistas, que se conoce como grupo de Poincaré, y contiene al llamado grupo de Lorentz. Gracias al aporte de Minkowski, este grupo puede pensarse como el grupo de transformaciones que deja invariante a la métrica pseudoeculídea que lleva su nombre. En esta primera parte veremos aspectos de este grupo y su álgebra, comenzando con su análogo euclídeo. Veremos además cómo aparecen los espinores como representación del grupo de Lorentz.

1.1. Generalidades sobre grupos y álgebras

1.1.1. Grupos

Antes de comenzar con el estudio de los grupos mencionados, vamos a decir primero lo que es un grupo.

Definición: Un **grupo** es un conjunto G con una operación de multiplicación "$\cdot$" *cerrada* en el grupo, es decir tal que $g_1 \cdot g_2 \in G$ si $g_1,\, g_2 \in G$, y tal que

(a) Cumple *asociatividad*: $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$, para todo $g_1,\, g_2,\, g_3 \in G$;

(b) Existe *elemento neutro*: Existe $dir0o \in G$ tal que $dir0o \cdot g = g \cdot dir0o = g$, para todo $g \in G$;

(c) Existe *elemento inverso*: Dado $g \in G$, existe $g' \in G$ tal que $g \cdot g' = g' \cdot g = dir0o$.

Un ejemplo de grupo es el conjunto de los números reales tomando el producto del grupo como la operación suma entre números reales. La suma entre reales da un número real, es asociativa, tiene elemento neutro (el 0), y tiene elemento inverso (el elemento opuesto). En general, todo espacio vectorial define un grupo con respecto a su suma.

Noten que el conjunto de los números reales tomando la multiplicación como el producto entre reales no es un grupo: si bien el producto es asociativo y tiene elemento neutro (el 1), no todo elemento de $\mathbb{R}$ tiene inverso (el cero no lo tiene, ya que no existe $g' \in \mathbb{R}$ tal que $g'.0 = 1 = dir0o$). Sin embargo, como pueden fácilmente verificar, $\mathbb{R} - \{0\}$ sí es un grupo con respecto al producto usual.

Los grupos que mencionamos en los párrafos anteriores tienen **orden** (cantidad de elementos) infinito. Un ejemplo de grupo de orden finito es el dado por el conjunto de las potencias enteras de la unidad imaginaria i, tomando la multiplicación del grupo como el producto usual entre números complejos. Este grupo es una realización del llamado *grupo cíclico de* 4 *elementos*. El conjunto de elementos del grupo es $\{1,\, i,\, -1,\, -i\}$, por lo que el grupo tiene orden 4.

Todos los grupos que mencionamos hasta este punto son grupos **abelianos**. Esto significa que la multiplicación entre dos elementos del grupo da el mismo resultado independientemente del orden en el cual se multiplique. Cuando el orden de la multiplicación en un grupo altera el resultado decimos que el grupo es **no abeliano**. El grupo de simetrías del modelo estándar (que está construido a partir de un producto directo de grupos unitarios que veremos más adelante) es un ejemplo de grupo no abeliano relevante en física. Los ejemplos más comunes de grupos no abelianos están dados por grupos de matrices. Uno de ellos se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: (Práctica 1, Ejercicio 1) *Considere las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^D$ que dejan invariante la forma cuadrática $x^T x$, siendo $x \in \mathbb{R}^D$.*

(a) *Muestre que la matriz M que implementa la transformación lineal debe cumplir $M^T M = \mathbb{I}$, y como consecuencia de esto $|\det(M)| = 1$. El grupo de matrices que cumple $M^T M = \mathbb{I}$ se conoce como grupo ortogonal y se lo denota como $O(D)$.*

Sea $x' = Mx$ (el elemento x transformado por M). Imponiendo que la forma cuadrática sea invariante, es decir que $x^T x = x'^T x'$, resulta $x^T x = x'^T x' = x^T M^T M x$. Por lo tanto,

$$M^T M = \mathbb{I}\,. \tag{1}$$

lo que implica que $M^T = M^{-1}$. Tomando el determinante a ambos lados de esta última ecuación, y teniendo en cuenta que el determinante no cambia al trasponer la matriz, resulta $|\det(M)| = 1$.

Es sencillo ver que el conjunto de matrices invertibles que cumplen $M^T M = \mathbb{I}$ es un grupo tomando la multiplicación del grupo como el producto usual entre matrices. Verifiquemos esto:

- La multiplicación es cerrada: dados dos elementos M_1 y M_2 que cumplen la condición dada por la ecuación (1), $M_1 M_2$ también la cumple. En efecto,

$$(M_1 M_2)^T (M_1 M_2) = M_2^T M_1^T M_1 M_2 = M_2^T \mathbb{I} M_2 = M_2^T M_2 = \mathbb{I}\,. \tag{2}$$

- La multiplicación es asociativa (ya que el producto de matrices es asociativo);
- Existe el elemento neutro dentro del conjunto. Para la multiplicación entre matrices, el elemento neutro es la matriz identidad $\mathbb{I}$, que pertenece al conjunto ya que $\mathbb{I}^T \mathbb{I} = \mathbb{I}$;
- Existe el elemento inverso dentro del conjunto. Como partimos de considerar matrices invertibles sólo tenemos que ver que si M cumple (1), entonces M^{-1} también lo cumple. En efecto,

$$\left(M^{-1}\right)^T M^{-1} = (M^T)^{-1} M^{-1} = (M^{-1})^{-1} M^{-1} = M M^{-1} = \mathbb{I}\,, \tag{3}$$

donde en la penúltima igualdad utilizamos que M cumple (1) y por lo tanto $M^T = M^{-1}$.

(b) *Al subgrupo de matrices de $O(D)$ con determinante $+1$ se lo denomina $SO(D)$ ("S" por "special"). Argumente que para el subgrupo de matrices de $O(D)$ conectadas continuamente con la identidad el determinante debe ser $+1$. (Ocurre que la condición determinante $+1$ garantiza que la matriz se halla en el subgrupo conectado con la identidad, de modo que $SO(D)$ tiene una sola componente conexa que incluye a la identidad).*

Un **subgrupo** de un grupo dado es un subconjunto del conjunto original que es en sí mismo un grupo (con la multiplicación heredada del grupo original). Pueden probar que efectivamente las matrices del grupo ortogonal que tienen determinante $+1$ forman un grupo. Que una matriz M_0 dada esté "conectada continuamente con la identidad" significa que existe al menos una función continua $M(s_i)$ (que dados ciertos números reales s_i me da una matriz $M(s_i)$), y tal que las matrices M_0 y la matriz identidad están en la imagen de dicha función $M(s)$. Pueden imaginar que, en el espacio de las matrices, dicha función nos permiter construir una curva continua que conecta a la matriz M_0 con la identidad. Como la función $M(s)$ es continua, y la función determinante también lo es (ya que consiste en multiplicar y sumar entradas de la matriz), $\det[M(s)]$ también es continua. Dado que las matrices de $O(D)$ tienen determinante ± 1, y como $\det[\mathbb{I}] = 1$, para que $\det[M(s)]$ sea continua debe ser $\det[M(s)] = 1$. Las matrices de $O(D)$ que tienen ese determinante son justamente las matrices de $SO(D)$ que constituyen el grupo ortogonal especial o *grupo de rotaciones* en D dimensiones.

1.1.2. Representaciones de grupos

En esta sección vamos a presentar el concepto de representación de un grupo. Si bien este concepto va a ser relevante para nosotros recién en la próxima clase, es natural introducirlo mientras estamos hablando de grupos. En la definición que vamos a dar aparece el conjunto $gl(V)$, que es simplemente el conjunto de transformaciones lineales (biyectivas) que van de V en V, es decir

$$gl(V) = \{T : V \to V\,,\ \text{con } T \text{ biyectiva}\}\ .$$

Definición: Una **representación** de un grupo G sobre un espacio vectorial V es una aplicación $\pi : G \to gl(V)$ que cumple

$$\pi(g_1 \cdot g_2) = \pi(g_1)\,\pi(g_2)\ ,$$

para todo g_1, g_2 en G y tal que $\pi(dir0o) = \mathbb{I}_V$ (identidad sobre V) .

Tomemos un poco de tiempo para analizar esta definición. Si g es un elemento del grupo, y π es una representación, entonces $\pi(g)$ es un elemento de $gl(V)$. Es decir que $\pi(g)$ actúa sobre V y

me devuelve un elemento de V. Para no ser tan abstractos, si V es por ejemplo $\mathbb{C}^2$, $\pi(g)$ es una matriz de 2×2 cuyos coeficientes dependerán en general del elemento g del grupo. Pero para constituir una representación del grupo, estas matrices tienen que respetar la multiplicación del grupo: la matriz asociada a la multiplicación de dos elementos del grupo es el producto de las matrices asociadas a cada uno de ellos.

Observaciones:

(a) Dado V siempre existe una representación de G sobre V: si se toma $\pi(g) = \mathbb{I}_V$ (la identidad sobre V) para todo $g \in G$ es trivial ver que π es una representación de G. Cuando $V = \mathbb{C}$ (o $V = \mathbb{R}$) dicha representación se conoce como **representación trivial**.

(b) Si V tiene producto interno, se dice que una dada representación π de G en V es **unitaria** si $\pi(g)^\dagger \pi(g) = \mathbb{I}_V$ para todo g en G.

(c) Se dice que una representación es **fiel** si $\pi(g)$ es distinto para cada elemento g del grupo.

(d) V no tiene por qué ser necesariamente un espacio de dimensión finita. De hecho, como comentaremos más adelante, no existen representaciones unitarias de dimensión finita (no triviales) del grupo de Poincaré.

Ejercicio: *Considerar el grupo cíclico de cuatro elementos en la realización vista anteriormente en la cual el conjunto de elementos es* $G = \{1, i, -1, -i\}$. *Verificar que* $\pi : G \to \mathbb{R}^2$ *definido por*

$$\pi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pi(i) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi(-1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \pi(-i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

es una representación sobre $\mathbb{R}^2$ *del grupo cíclico de cuatro elementos. Notar que esta representación no es trivial, es unitaria y es fiel. Intentar encontrar una representación del grupo pero ahora sobre* $\mathbb{R}^3$.

Noten que podemos interpretar a cada una de las matrices anteriores como matrices de rotación de los vectores de $\mathbb{R}^2$ alrededor del eje z en ángulos de 0, $3\pi/2$, π y $\pi/2$, respectivamente. Quizás esto hace que sospechen algo que es efectivamente correcto: el grupo cíclico de cuatro elementos es un subgrupo del grupo de rotaciones en 2 dimensiones $SO(2)$ (cuyo orden es infinito). Esto puede servirles como ayuda para pensar cómo encontrar representaciones sobre $\mathbb{R}^3$, como se pide en el ejercicio.

El grupo de rotaciones en tres dimensiones $SO(3)$, que será de relevancia por ser un subgrupo del grupo de Poincaré que estudiaremos más adelante, está estrechamente relacionado con otro grupo

matricial importante en física denominado $SU(2)$ (grupo de matrices unitarias de dimensión 2 que tienen determinante $+1$). Aunque $SO(3)$ surge naturalmente al considerar las rotaciones espaciales, $SU(2)$ es más sencillo[1] y más fácilmente visualizable: $SU(2)$ es la esfera S^3 (para ver esto pueden mirar por ejemplo el artículo de Wikipedia que habla sobre la 3-esfera). Cuando decimos que el grupo es "visualizable" estamos haciendo referencia al hecho de que tanto $SO(3)$ como $SU(2)$, además de tener estructura de grupo, tienen estructura de variedad diferenciable.

Los grupos que tienen una estructura de variedad diferenciable compatible con la estructura de grupo se denominan **grupos de Lie**. Cada elemento de un grupo de Lie se puede reescribir como la exponencial de lo que se conoce como generador, y el conjunto de generadores forman un *álgebra de Lie*. A continuación veremos la definición de álgebra de Lie y estudiaremos cuál es el álgebra de Lie del grupo de rotaciones.

1.1.3. Álgebra de Lie asociada a un grupo

Definición: Un **álgebra de Lie** es un espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) con una operación corchete (o conmutador) "$[,]$" que cumple las siguientes propiedades

(a) Es *bilineal*:

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]\,,$$

$$[x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z]\,,$$

para todo x, y, $z \in V$ y α, $\beta \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$);

(b) Es *antisimétrica*: $[x, y] = -[y, x]$, para todo x, $y \in V$.

(c) Cumple la *identidad de Jacobi*: $[[x, y], z]+[[z, x], y]+[[y, z], x] = 0$, para todo x, y, $z \in V$.

Vean que lo que esencialmente diferencia la estructura de grupo de la de un álgebra es que esta última tiene, además de la multiplicación (corchete), una suma (por ser un espacio vectorial). Además, el producto de las álgebras de Lie no es asociativo, a diferencia de lo que sucede con los grupos. Esta falta de asociatividad se expresa a través de la identidad de Jacobi.

Un ejemplo que todos conocen de álgebra de Lie está dado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, donde se define el corchete como el producto vectorial entre dos vectores (pueden verificar que cumple las propiedades mencionadas arriba).

[1] Esto no quiere decir que $SU(2)$ no surja naturalmente en física. De hecho, la libertad de la elección en la fase de la función de onda en mecánica cuántica hace que sean de interés las llamadas representaciones bivaluadas de $SO(3)$, es decir, tanto las verdaderas representaciones unitarias de $SO(3)$ así como también aquellas que están determinadas salvo un factor de fase (y que se denominan *representaciones proyectivas*). Las representaciones bivaluadas de $SO(3)$ son justamente las representaciones de $SU(2)$.

Vamos a utilizar una propiedad, que no vamos a demostrar, que dice que dado un elemento del álgebra x, el conjunto $\{e^{tx}\}$ con $t \in \mathbb{R}$ es un subgrupo monoparamétrico (porque depende sólo del parámetro t) del grupo de Lie asociado al álgebra. Para que esto no suene tan abstracto piensen en el grupo de rotaciones en 3 dimensiones: los elementos del álgebra van a estar asociados a los operadores de momento angular en una dirección determinada y el parámetro t estaría asociado al ángulo de la rotación alrededor de esa dirección; estas rotaciones alrededor de un eje son claramente un subgrupo del grupo total de rotaciones y están caracterizadas por un sólo parámetro.

A continuación, vamos a estudiar con más detalle el álgebra del grupo de rotaciones. Para caracterizar dicho álgebra vamos a utilizar como guía el siguiente ejercicio de la práctica.

Ejercicio: (Práctica 1, Ejercicio 2) *Una matriz cualquiera M del grupo $SO(D)$ puede escribirse como la exponencial de otra: $M = e^A$. El conjunto de matrices que aparecen en la exponencial forman un álgebra, tomando el corchete como el conmutador entre matrices.*

(a) *Muestre que esta matriz A debe ser antisimétrica.*

En este inciso queremos comenzar a caracterizar el álgebra asociada al grupo de Lie $SO(D)$, que se denota $so(D)$ (en general se utilizan mayúsculas para denotar a los grupos y minúsculas para sus respectivas álgebras). Teniendo en cuenta la discusión previa a este ejercicio, sabemos que el conjunto de matrices dadas por e^{tA} con $t \in \mathbb{R}$ es un subgrupo de $SO(D)$, por lo que tiene que valer

$$\left(e^{tA}\right)^T \left(e^{tA}\right) = \mathbb{I}\,, \tag{5}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Noten que la traspuesta de la exponencial es la exponencial de la traspuesta (esto se puede ver recordando la definición de la exponencial de una matriz), así que

$$\left(e^{tA^T}\right) \left(e^{tA}\right) = \mathbb{I}\,. \tag{6}$$

Derivando respecto de t y tomando $t = 0$ llegamos a

$$A^T + A = 0\,, \tag{7}$$

lo que nos dice que A es antisimétrica.

(b) *Definimos la dimensión de un grupo de Lie como la dimensión del espacio vectorial de su álgebra asociada. A partir del inciso anterior, muestre que la dimensión de $SO(D)$ es $D(D-1)/2$.*

Sabemos que la matriz A es antisimétrica, por lo que sus elementos diagonales son nulos, y los de la supra-diagonal quedan determinados a partir de los de la sub-diagonal. La dimensión del espacio vectorial de las matrices antisimétricas es entonces la cantidad de elementos que hay en la sub-diagonal, que son $D(D-1)/2$.

(c) *Los generadores del espacio vectorial de matrices antisimétricas (cuya exponencial genera el grupo) pueden escribirse convenientemente en términos de una colección de matrices* Σ_{IJ} *(*I*,* $J = 1, ..., D$*), siendo por definción* $\Sigma_{IJ} = -\Sigma_{JI}$ *(note que aquí* I *y* J *no son las componentes de la matriz sino un doble índice que etiqueta cada matriz). En términos de estas, la matriz* M *de* $SO(D)$ *puede escribirse como:*

$$M = e^{\frac{1}{2}\Sigma_{IJ}\omega^{IJ}} \tag{8}$$

siendo ω^{IJ} *parámetros reales sujetos a la relación* $\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$*. Para el caso* $D = 3$*, halle un conjunto de matrices* Σ_{IJ} *y parámetros* ω^{IJ} *en términos de los generadores y ángulos usuales de rotación que expresan la rotación en torno a un eje. Relacione el indice* IJ *con el plano de rotación.*

Comenzamos aclarando que en la ecuación (8) hay una suma doble implícita sobre los índices I y J. Siempre que aparezcan índices repetidos consideren que hay una suma implícita, a menos que se indique lo contrario.

Para el caso $D = 3$ la cantidad de generadores es $3 \times (3-1)/2 = 3$. Veamos por ejemplo cuál es el generador Σ_{xy} asociado a la matriz de rotación en ángulo θ alrededor del eje z $R_z(\theta)$. Recuerden que

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{9}$$

Estamos buscando una matriz Σ_{xy} de 3×3 y una constante ω_{xy} tales que resulte

$$e^{\omega_{xy}\Sigma_{xy}} = R_z(\theta) . \tag{10}$$

Noten que no incluimos en la exponencial el término $\omega_{yx}\Sigma_{yx}$, ya que $\omega_{yx}\Sigma_{yx} = (-\omega_{xy})(-\Sigma_{xy}) = \omega_{xy}\Sigma_{xy}$ y esto cancela el factor $1/2$ que aparece en el exponente de la ecuación (8). Como $R_z(\theta)$ es una matriz por bloques, el bloque de un solo elemento (donde aparece el valor 1) se podrá obtener fácilmente haciendo la exponencial de una matriz con la misma estructura de bloques y cuyo elemento diagonal inferior es un 0. Es decir, la estructura de Σ_{xy} debe ser la siguiente

$$\Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{11}$$

Ahora nos queda determinar los coeficientes α_{ij} para que resulte

$$\exp\left(\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \tag{12}$$

Para esto, es útil recordar la propiedad

$$e^{i\theta\hat{n}\cdot\bar{\sigma}} = \cos\theta\, \mathbb{I} + i\sin\theta\, \hat{n}\cdot\bar{\sigma} , \tag{13}$$

donde $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ es un versor y $\bar{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, siendo σ_i las matrices de Pauli. Noten que para obtener los sin en la antidiagonal de la matriz de la ecuación (12) tenemos que elegir $\hat{n} = (0, 1, 0)$. En efecto, resulta

$$e^{i\theta\sigma_y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \tag{14}$$

por lo que vamos a tomar

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = i\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Finalmente, tenemos entonces

$$\Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

y $\omega_{xy} = \theta$. Noten que Σ_{xy} es antisimétrica, como debía serlo. Tenemos aquí un ejemplo concreto de un subgrupo monoparamétrico de $SO(3)$ (el parámetro es θ y el generador Σ_{xy}): las matrices de rotación alrededor del eje z. La resolución se tornó un poco larga porque trabajamos a fuerza bruta. Noten que el procedimiento de hallar los generadores se simplifica mucho si recordamos que el conjunto de las matrices $R_z(\theta)$ es un subgrupo monoparamétrico de $SO(3)$, donde el parámetro es θ. Escribiendo $R_z(\theta) = e^{\theta\,\Sigma_{xy}}$, vemos que debe ser

$$\Sigma_{xy} = \left.\frac{dR_z(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0}. \tag{17}$$

Por esta última ecuación se suele decir que "el álgebra es la aproximación lineal del grupo"; el álgebra puede pensarse como el espacio tangente al grupo en la identidad. Retomando el ejercicio, podemos calcular Σ_{xy} del siguiente modo

$$\Sigma_{xy} = \left.\frac{dR_z(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\Bigg|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

que coincide con el resultado que ya habíamos obtenido. De forma similar, pueden ustedes hallar los dos generadores restantes

$$\Sigma_{yz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y } \Sigma_{zx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Ya determinamos los elementos del álgebra de Lie asociada al grupo de rotaciones. En el Ejercicio 3 de la práctica les pedimos a ustedes que vean que el corchete entre los generadores es

$$[\Sigma_{IJ}, \Sigma_{MN}] = \delta_{IN}\Sigma_{JM} + \delta_{JM}\Sigma_{IN} - \delta_{IM}\Sigma_{JN} - \delta_{JN}\Sigma_{IM} \,. \tag{20}$$

Esto determina completamente el álgebra $so(D)$ asociada al grupo de rotaciones. Definiendo

$$J_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_{jk} \,, \tag{21}$$

la relación (20) nos da (en el Ejercicio 8 se pide esta misma cuenta pero con una ligera variante en la definición de los generadores)

$$[J_i, J_j] = -\epsilon_{ijk}J_k \,, \tag{22}$$

que, salvo el signo del lado derecho y la falta de una i (y que se arregla al redefinir los generadores multiplicándolos por $-i$) deben reconocer como el álgebra de momento angular $su(2)$: $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$ (ver ecuación (48)). Esto nos dice que $so(3) = su(2)$. Ustedes ya conocen representaciones de este álgebra[2]. Una representación de $su(2)$ sobre $\mathbb{C}^2$ está dada por las matrices de Pauli

$$J_1 \to \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \,, \quad J_2 \to \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \,, \quad J_3 \to \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \,. \tag{23}$$

Esta representación la conocen como la de momento angular $j = 1/2$. También conocen representaciones sobre espacios de mayor dimensión. Por ejemplo, una representación de $su(2)$ sobre $\mathbb{C}^3$ queda definida tomando

$$J_1 \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \,, \quad J_2 \to \frac{1}{\sqrt{2}i}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \,, \quad J_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \,. \tag{24}$$

Esta es la representación asociada a $j = 1$. En general, las representaciones irreducibles (ya veremos mejor qué significa esto) de $su(2)$ están caracterizadas por un semientero j y actúan sobre $\mathbb{C}^{2j+1}$ (es decir, son matrices cuadradas de tamaño $2j + 1$).

Si bien $so(3) = su(2)$, como mencionamos anteriormente los grupos $SO(3)$ y $SU(2)$ no coinciden. Anteriormente mencionamos que $SU(2)$ se puede visualizar como una esfera. $SO(3)$ es en efecto una esfera pero con los puntos antipodales identificados. Si tomamos un pedazo pequeño de esa esfera, el punto antipodal de uno dado no nos interesa, está fuera del pedazo tomado. Localmente, la esfera y la esfera con los puntos antipodales identificados son iguales. Esto es justamente lo que nos dice la igualdad entre las álgebras asociadas: localmente los grupos son iguales.

[2]La definición de representación de un álgebra es análoga a la de representación de un grupo. En esencia, la representación de un elemento del álgebra será una matriz, y el producto y suma de matrices da la matriz asociada al producto y suma de elementos del álgebra.

1.2. Grupo Euclídeo

El grupo Euclídeo es el grupo de transformaciones que dejan invariantes a la distancia euclídea entre dos puntos. Dicho grupo está compuesto por el grupo de rotaciones y el grupo de traslaciones, y se denota por $ISO(3)$ (o $ISO(D)$ en D dimensiones). En el ejercicio 4 les pedimos que estudien el álgebra asociada al grupo Euclídeo.

La clase que viene vamos a estudiar lo que sería el análogo al grupo Euclídeo en relatividad especial, es decir, el grupo de transformaciones que deja invariante la "distancia" entre dos puntos en el espacio-tiempo. A las rotaciones y traslaciones se van agregar otras transformaciones que mezclan tiempo y espacio y se denominan *boosts*.

Algunas cosas para llevarse de esta clase

- Un grupo es un conjunto de elementos con una multiplicación asociativa entre elementos del grupo, y que tiene elemento neutro e inverso.
- Un álgebra de Lie es un espacio vectorial donde además hay un producto entre elementos del álgebra (corchete) que es bilineal, antisimétrico y que cumple Jacobi.
- Para los llamados grupos de Lie (que son los que más nos van interesar), dado g en el grupo, existe x en un álgebra de Lie tal que $g = e^x$. x se conoce como generador.
- En el contexto del inciso anterior, el conjunto $g(t) = e^{tx}$ con $t \in \mathbb{R}$ define un subgrupo. Noten que $x = g'(t)|_{t=0}$.
- Lista de grupos para recordar: $O(D)$, $SO(D)$, $U(D)$, $SU(D)$, $ISO(D)$. Las álgebras asociadas se notan con minúsculas.
- Las representaciones *irreducibles* (ya veremos qué significa esta palabra) de $su(2)$ quedan clasificadas por un semientero $j = 0, 1/2, 1, 3/2, ...$ Fijado j, la dimensión de la representación es $2j + 1$ (son las matrices de momento angular que ya han visto).

1.3. Representaciones irreducibles

Al estudiar las distintas representaciones de un grupo es importante poder descomponer una dada representación en "partes" más simples. Una manera de conseguir esto es buscar cuáles son los menores subespacios invariantes (no triviales) de la representación.

Consideremos una representación $\pi : G \to gl(V)$. Decimos que un subespacio W de V es invariante por π si $\pi(g)(W) \subseteq W$ para todo elemento g del grupo. Visto esto, podemos definir lo que significa que una representación sea irreducible (que se suele abreviar como irrep).

Definición: Una representación $\pi : G \to gl(V)$ dada es **irreducible** si V no posee subespacios invariantes por π no triviales.

Toda representación de dimensión 1 es irreducible ya que los únicos subespacios de un espacio de dimensión 1 son los subespacios triviales. Veamos un ejemplo menos trivial que nos permita entender mejor esta definición.

Consideremos el grupo de rotaciones en dos dimensiones $SO(2)$. Una representación de este grupo sobre $V = \mathbb{R}^3$ está dada por la asignación de elementos del grupo a matrices de la forma dada por la ecuación (9). Veamos que esta representación de $SO(2)$ es reducible. Para ello, consideremos el subespacio W de V generado por el vector $(0, 0, 1)$, o sea, el eje z. Las rotaciones alrededor de este eje dejan obviamente al eje invariante,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R}), \tag{25}$$

Por lo tanto, $W = \langle (0, 0, 1) \rangle$ es un subespacio invariante por la representación dada (y es no trivial, es decir, no es ni el espacio total ni el nulo). La representación es entonces reducible. Una estructura en bloques como la de la matriz de la ecuación (9) es sinónimo de que la representación es reducible.

Les dejamos como ejercicio que prueben que la aplicación que a un elemento $R(\theta)$ de $SO(2)$ le asigna la matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{26}$$

define una representación irreducible (o irrep) de $SO(2)$ sobre $\mathbb{R}^2$.

Toda representación reducible puede descomponerse como suma directa de representaciones irreducibles. Las representaciones irreducibles son en cambio bloques indivisibles, *elementales*. Se suele decir que "las partículas elementales transforman como las representaciones unitarias irreducibles del grupo de Poincaré". A lo largo del curso vamos a ir dándole sentido y precisión a esta

frase. Por lo pronto, sepan que la propia definición de lo que en nuestra teoría es una partícula elemental va a estar fuertemente relacionada con las irreps del grupo de Poincaré.

Sobre el final de la clase de hoy presentamos el grupo de Poincaré y les dejamos un ejercicio que introduce los dos operadores de Casimir de su álgebra, que servirán para clasificar la acción de las representaciones del grupo sobre los estados de una partícula. Con esta perspectiva en mente, vamos a comenzar estudiando varios aspectos de un subgrupo del grupo de Poincaré: el grupo de Lorentz.

1.4. Grupo de Lorentz

1.4.1. Transformaciones de Lorentz

La clase pasada estudiamos el grupo de rotaciones. Vamos a ver ahora lo que sería el análogo a este grupo para la geometría Minkowskiana.

Ejercicio: (Práctica 1, Ejercicio 6) *Considere una transformación dada por una matriz* Λ

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu \,, \tag{27}$$

que deje invariante la forma $x^T \eta x$*, siendo* x *una coordenada de un punto del espacio-tiempo 4 dimensional y*

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \tag{28}$$

En componentes, $x^T \eta x = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$*,* $\mu = 0, 1, 2, 3$*. Al grupo de transformaciones lineales que deja esa forma cuadrática invariante se lo llama grupo de Lorentz.*

Halle la condición análoga a la del grupo de rotaciones (Ejercicio 1.a) para la matriz Λ*. Muestre que la matriz* λ *definida por* $\Lambda = e^\lambda$ *satisface* $\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}$*, siendo* $\lambda_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\rho}\lambda^\rho_{\ \nu}$*.*

Sea $x' = \Lambda x$ (el elemento x transformado por Λ). Imponiendo que la forma cuadrática sea invariante, es decir que $x^T \eta x = x'^T \eta x'$, resulta $x^T \eta x = x'^T \eta x' = x^T \Lambda^T \eta \Lambda x$. Por lo tanto,

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \,. \tag{29}$$

Veamos ahora cómo queda caracterizada el álgebra asociada a este grupo. Escribimos un elemento genérico Λ del grupo en términos de un elemento del álgebra

$$\Lambda = e^\lambda \,. \tag{30}$$

Luego, sabemos que el conjunto $\Lambda(t) = e^{t\lambda}$ con $t \in \mathbb{R}$ es un subgrupo monoparamétrico del Lorentz, por lo que vale

$$\Lambda^T(t)\eta\Lambda(t) = \eta\,. \tag{31}$$

Desarrollando esta expresión análogamente a como hicimos en el Ejercicio 1, derivando respecto a t y evaluando en $t = 0$, se obtiene

$$\lambda^T\eta + \eta\lambda = 0\,, \tag{32}$$

que, usando que $\eta = \eta^T$, en componentes se reduce a

$$\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}\,. \tag{33}$$

Vean que el resultado es completamente análogo al del Ejercicio 1, con la diferencia de que aquí aparece una métrica η no trivial (la del espacio de Minkowski). Noten que la dimensión del álgebra es $4 \times (4-1)/2 = 6$.

Veamos algunos ejemplos de transformaciones de Lorentz. Después de lo visto la clase anterior, seguramente están pensando en las rotaciones alrededor de los ejes x, y y z

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ 0 & 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 \\ 0 & -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{34}$$

También tenemos los boosts en las direcciones x, y y z

$$\begin{bmatrix} \cosh\beta_x & \sinh\beta_x & 0 & 0 \\ \sinh\beta_x & \cosh\beta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cosh\beta_y & 0 & \sinh\beta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh\beta_y & 0 & \cosh\beta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cosh\beta_z & 0 & 0 & \sinh\beta_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\beta_z & 0 & 0 & \cosh\beta_z \end{bmatrix}, \tag{35}$$

donde β_i está relacionada con la velocidad v_i del boost en la dirección i por

$$\cos\beta_i = \frac{1}{\sqrt{1-v_i^2}}\,, \quad \sin\beta_i = \frac{v_i}{\sqrt{1-v_i^2}}\,. \tag{36}$$

La reflexión total

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{37}$$

es también una transformación de Lorentz, así como también lo es la inversión temporal

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{38}$$

La elección de los ejemplos que mostramos no es aleatoria: cualqueier transformación de Lorentz puede descomponerse como un producto de estos cuatro tipos de transformaciones.

Las matrices de los ejemplos anteriores dan una representación del grupo de Lorentz sobre $\mathbb{C}^4$. En esta clase vamos a hacer un estudio más general de las representaciones del grupo de Lorentz y para ello estudiaremos su álgebra de Lie. Pero antes de eso, hablemos un poco de la estructura de este grupo (esta discusión que sigue responde al Ejercicio 7 de la práctica).

1.4.2. Componentes del grupo de Lorentz

Noten que si toman el determinante de ambos miembros de la ecuación (29) se obtiene

$$\det(\Lambda) = \pm 1 \,. \tag{39}$$

Esto define dos subconjuntos de las transformaciones de Lorentz

- $\det \Lambda = +1$: **transformaciones propias**.
- $\det \Lambda = -1$: **transformaciones impropias**.

Ejemplos de transformaciones propias son la identidad, las rotaciones, la reflexión total. La reflexión espacial ($\Lambda = \eta$) es un ejemplo de una transformación impropia.

Hay una clasificación adicional dentro del grupo de Lorentz, que sale de escribir la componente 00 de la ecuación (29)

$$(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{j=1}^{3} (\Lambda^j_0)^2 = 1 \implies \Lambda^0_0 \geq 1 \quad \text{ó} \quad \Lambda^0_0 \leq -1 \,. \tag{40}$$

Podemos clasificar entonces a las transformaciones de acuerdo a lo siguiente.

- $\Lambda^0_0 \geq 1$: **transformaciones ortócronas**.
- $\Lambda^0_0 \leq -1$: **transformaciones no ortócronas** (invierten el sentido del tiempo).

El grupo de Lorentz consiste entonces de cuatro componentes conexas (ver figura 1):

$$\begin{aligned} L^{\uparrow}_{+} \quad &: \quad \det \Lambda = +1 \;\; \Lambda^0_0 \geq 1 \,; \\ L^{\downarrow}_{+} \quad &: \quad \det \Lambda = +1 \;\; \Lambda^0_0 \leq -1 \,; \\ L^{\uparrow}_{-} \quad &: \quad \det \Lambda = -1 \;\; \Lambda^0_0 \geq 1 \,; \\ L^{\downarrow}_{-} \quad &: \quad \det \Lambda = -1 \;\; \Lambda^0_0 \leq -1 \,. \end{aligned}$$

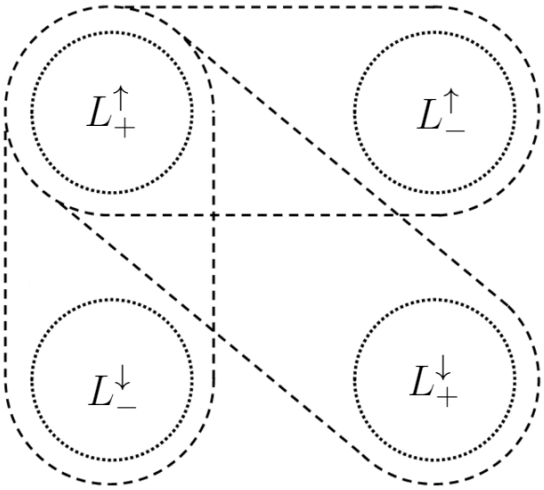

Fig. 1: **Grupo de Lorentz.** Las cuatro componentes conexas del grupo de Lorentz se esquematizan con círculos punteados en la figura, mientras que las líneas de trazos encierran a los tres subgrupos del grupo de Lorentz (noten que todo grupo debe contener a $L_+^\uparrow$ ya que dicha componente es la que contiene a la identidad). El subgrupo $L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow$ se conoce como Grupo de Lorentz propio y es el relevante para toda la fenomenología de partículas.

$L_+^\uparrow$ es un subgrupo y se conoce como Grupo de Lorentz propio ortócrono. Sin embargo, este no es el único subgrupo de grupo de Lorentz. De hecho, $L_+^\uparrow$ junto a cualquiera de las otras tres componentes son subgrupos. El que nos va a interesar a nosotros es $L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow$, que se conoce como **Grupo de Lorentz propio** y se nota $SO(3,1)$ (el 3 por la dimensión espacial, el 1 por la temporal).

1.4.3. Álgebra del grupo de Lorentz

En esta sección, vamos a encontrar los generadores de las rotaciones y los boosts, y los conmutadores entre dichos generadores. Como las relaciones de conmutación valen lo mismo en cualquier representación (recuerden por ejemplo lo que vimos sobre las representaciones de $su(2)$) al hacer esto vamos a tener determinada en forma abstracta el álgebra del grupo de Lorentz. Una vez que tengamos el álgebra, será cuestión de estudiar sus representaciones para ver las que se inducen sobre el grupo.

A modo de ejemplo, comencemos calculando el generador de los boosts en la dirección x. Recordamos que dicho boosts se representa por la siguiente matriz

$$\Lambda(\beta_x) = \begin{bmatrix} \cosh\beta_x & \sinh\beta_x & 0 & 0 \\ \sinh\beta_x & \cosh\beta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{41}$$

Buscamos una matriz $M_{tx} = -M_{xt}$ tal que resulte

$$\Lambda(\beta_x) = e^{\frac{i}{2}(\beta_x M_{tx} - \beta_x M_{xt})} = e^{i\beta_x M_{tx}} . \tag{42}$$

β_x juega aquí el rol análogo a los ω^{IJ} de la ecuación (8). Por eso M_{xt} aparece multiplicado por $-\beta_x$, ya que recuerden que $\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$. Agregamos además la unidad imaginaria i para ser consistentes con la definición más común de los generadores que suele hacerse en la literatura de física. En virtud de la ecuación (42) se tiene $M_{tx} = -i\Lambda'(\beta_x)|_{\beta_x=0}$, que introduciendo la forma explícita del boost nos da

$$M_{tx} = -i\Lambda'(\beta_x)|_{\beta_x=0} = -i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{43}$$

Siguiendo un procedimiento similar pueden obtener los generadores asociados a los boosts en y y z

$$M_{ty} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad M_{tz} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \tag{44}$$

y los asociados a las rotaciones en x, y y z

$$M_{yz} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} , \; M_{zx} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \; M_{xy} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{45}$$

Noten que, salvo por la dimensión y por el factor $-i$ asociado al cambio de definición, los generadores de las rotaciones tienen la misma forma que ya habíamos hallado en las ecuaciones (18) y (19). Pueden convencerse de que

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) , \tag{46}$$

haciendo los conmutadores entre las matrices (recuerden que los subíndices aquí etiquetan a las matrices y no denotan componentes). Este es el álgebra del grupo de Lorentz propio y se nota $so(3,1)$.

Ejercicio: Demostrar que la asignación que a la matriz $M_{\mu\nu}$ le hace corresponder el operador $i\left(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\right)$ es una representación del álgebra de Lorentz. En este caso, estamos tomando una representación sobre el espacio de funciones del espacio-tiempo. Noten que si μ y ν corresponden a las coordenadas espaciales (las notamos con i, j), el operador $i\left(x_i\partial_j - x_j\partial_i\right)$ es una componente del momento angular. Esto es razonable, recuerden que el grupo de Lorentz tiene como subgrupo al grupo de rotaciones.

Ayuda: recuerden que ya conocen cuánto vale el conmutador entre el operador de multiplicación y la derivación

$$[x, \partial_x] = i\,. \tag{47}$$

Ya tenemos el álgebra de Lorentz. Ahora vamos a realizar unos desarrollos que nos permitirán escribir las representaciones de $so(3,1)$ en términos de representaciones de $su(2)$. Estos desarrollos responden a los Ejercicios 8 y 9 de la práctica.

Primero, veamos una forma de reescribir las relaciones entre los generadores $M_{\mu\nu}$ dadas por (46) que definen el álgebra de Lorentz. Definimos

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}\,, \\ K_i &= M_{i0}\,, \end{aligned}$$

donde i, j, k hacen referencia a parte espacial. Veamos cuánto valen los conmutadores entre estos generadores. Una parte ya está hecha, ya que en la clase pasada vimos que

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k\,. \tag{48}$$

Esto nos dice que el álgebra asociada al grupo de rotaciones es $su(2)$. Veamos los otros conmutadores, comenzando por el de dos boosts

$$[K_i, K_j] = [M_{i0}, M_{j0}] = i(g_{i0}M_{0j} + g_{0j}M_{i0} - g_{ij}M_{00} - g_{00}M_{ij}) = \tag{49}$$

$$= i(-g_{00}M_{ij}) = -iM_{ij}\,. \tag{50}$$

Usando que $M_{ij} = -M_{ji}$, podemos reescribir M_{ij} como $(M_{ij} - M_{ji})/2$. Entonces

$$[K_i, K_j] = -i\left[\frac{1}{2}(M_{ij} - M_{ji})\right] = -i\left(\epsilon_{kij}J_k\right) = -i\epsilon_{ijk}J_k\,, \tag{51}$$

donde en la penúltima igualdad utilizamos que $J_k\epsilon_{kmn} = \frac{1}{2}(M_{mn} - M_{nm})$ (para probar esto necesitan usar que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$). Vemos entonces que los generadores de los boosts no conmutan entre sí. El conmutador que resta entre generadores de boosts y rotaciones sale de forma similar. En resumen, se tiene

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k\,, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k\,, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k\,.$$

Noten que de las relaciones anteriores se puede concluir que los boosts no forman un grupo ya que el álgebra de sus generadores no es cerrada, a diferencia de lo que sucede con las rotaciones.

Veamos ahora que definiendo

$$\bar{A} = \frac{1}{2}(\bar{J} - i\bar{K})\,, \quad \bar{B} = \frac{1}{2}(\bar{J} + i\bar{K})\,, \tag{52}$$

donde $\bar{J} = (J_1, J_2, J_3)$ y $\bar{K} = (K_1, K_2, K_3)$, el álgebra de Lorentz es suma directa de dos $su(2)$. Para ello, hallamos los conmutadores entre estos nuevos generadores

$$\begin{aligned}
[A_i, A_j] &= \left[\frac{1}{2}(J_i - iK_i), \frac{1}{2}(J_j - iK_j)\right] = \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] - i[K_i, J_j] - i[J_i, K_j] - [K_i, K_j]\right) = && (53)\\
&= \frac{1}{4}\left(i\epsilon_{ijk}J_k + \epsilon_{ijk}K_k + \epsilon_{ijk}K_k + i\epsilon_{ijk}J_k\right) = \frac{i\epsilon_{ijk}}{2}\left(J_k - iK_k\right) = && (54)\\
&= i\epsilon_{ijk}A_k\,. && (55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[B_i, B_j] &= \left[\frac{1}{2}(J_i + iK_i), \frac{1}{2}(J_j + iK_j)\right] = \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] + i[K_i, J_j] + i[J_i, K_j] - [K_i, K_j]\right) = && (56)\\
&= \frac{1}{4}\left(i\epsilon_{ijk}J_k - \epsilon_{ijk}K_k - \epsilon_{ijk}K_k + i\epsilon_{ijk}J_k\right) = \frac{i\epsilon_{ijk}}{2}\left(J_k + iK_k\right) = && (57)\\
&= i\epsilon_{ijk}B_k\,. && (58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[A_i, B_j] &= \left[\frac{1}{2}(J_i - iK_i), \frac{1}{2}(J_j + iK_j)\right] = \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] - i[K_i, J_j] + i[J_i, K_j] + [K_i, K_j]\right) = && (59)\\
&= \frac{1}{4}\left(i\epsilon_{ijk}J_k + \epsilon_{ijk}K_k - \epsilon_{ijk}K_k - i\epsilon_{ijk}J_k\right) = 0\,. && (60)
\end{aligned}$$

Vemos entonces que los operadores A_i y B_i conmutan entre ellos, es decir, sus álgebras son independientes entre sí, y además, el álgebra de cada uno de ellos es el álgebra de $su(2)$. En términos matemáticos, $so(3,1) = su(2) \oplus su(2)$. De esta propiedad para el álgebra de Lorentz se desprende que:

> Las representaciones del grupo de Lorentz se etiquetan por el par de semienteros (j_1, j_2), que corresponden al espín de la representación de cada $su(2)$.

1.4.4. Espinores

Como un ejemplo de lo visto al final de la sección anterior, vamos a ver que los espinores surgen de las representaciones del grupo de Lorentz etiquetadas por $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Recordemos que al escribir (j_1, j_2) estamos haciendo referencia a dos representaciones del álgebra de $su(2)$, de momentos angulares j_1 y j_2. Para $\left(\frac{1}{2},0\right)$, estamos buscando representar al operador momento angular $\bar{A}$ en término de matrices cuadradas de orden $2\times\frac{1}{2}+1=2$. Esto puede hacerse tomando

$$\bar{A} \to \frac{1}{2}\bar{\sigma}\,, \tag{61}$$

donde $\bar{\sigma}$ es un vector cuyas componentes son las matrices de Pauli. Ya han verificado en mecánica cuántica que esta es una representación de $su(2)$. Por otro lado, el momento angular $\bar{B}$ debe ser representado por matrices de orden $2\times 0+1=1$. La representación en este caso es la trivial

$$\bar{B} \to 0\,. \tag{62}$$

Noten que haber elegido representaciones para $\bar{A}$ y $\bar{B}$ nos permite escribir representaciones para los boosts y las rotaciones (invirtiendo las ecuaciones dadas en (52))

$$\text{Para } \left(\frac{1}{2},0\right): \quad \bar{J} \to \frac{1}{2}\bar{\sigma}\,, \quad \bar{K} \to \frac{i}{2}\bar{\sigma}\,. \tag{63}$$

Trabajando de forma análoga para la representación $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, llegamos a que

$$\text{Para } \left(0,\frac{1}{2}\right): \quad \bar{J} \to \frac{1}{2}\bar{\sigma}\,, \quad \bar{K} \to -\frac{i}{2}\bar{\sigma}\,. \tag{64}$$

Las matrices de Pauli son hermíticas, con lo que las rotaciones también lo son. Los boots en cambio son antihermíticos. Noten que los generadores en la representación $\left(\frac{1}{2},0\right)$ son los adjuntos de los de la representación $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Por eso se dice que estas representaciones son complejas conjugadas.

Los elementos del espacio vectorial sobre el cual actúa la representación de $j=1/2$ se conocen como **espinores** (ver Ejercicio 5 de la práctica). Los espinores asociados a $\left(\frac{1}{2},0\right)$ se conocen como **espinores izquierdos** y se suelen denotar como ψ_L, mientras que los asociados a $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ son los **espinores derechos** ψ_R. Estos espinores se conocen como **espinores de Weyl**. Los espinores de Dirac van a surgir al considerar $\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Volveremos sobre este tema más adelante en el curso.

Un último comentario antes de terminar con esta sección. Noten que estas representaciones del álgebra inducen representaciones en el grupo que no son unitarias, debido a que la representación de los boosts no es hermítica (recuerden que los elementos del grupo son exponenciales de i por los generadores). Esto es general: cualquier representación del grupo de Lorentz construida usando las representaciones finito dimensionales del grupo $SU(2)\times SU(2)$ será no unitaria. No

hay representaciones unitarias de dimensión finita del grupo de Lorentz[3]. Más adelante veremos cómo construir representaciones unitarias de dimensión infinita.

1.5. Grupo de Poincaré

El grupo de Poincaré se obtiene al agregar traslaciones al grupo de Lorentz. Se pueden definir subgrupos del grupo de Poincaré análogos a los vistos para el grupo de Lorentz. Por ejemplo, $P_+^\uparrow$ simboliza el grupo formado por $L_+^\uparrow$ y las traslaciones.

En el Ejercicio 10 de la práctica les pedimos que escriban esquemáticamente las relaciones de conmutación entre los generadores del grupo de Poincaré. A continuación, les dejamos dichas relaciones, intenten darle sentido de acuerdo a lo que ya vieron para el grupo Euclídeo:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0\,, \tag{65}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = -ig_{\mu\sigma}P_\nu + ig_{\nu\sigma}P_\mu\,, \tag{66}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = ig_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + ig_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\,. \tag{67}$$

Para terminar la clase, les dejamos un último ejercicio, al cual volveremos cuando empecemos a estudiar la cuantización de campos libres.

Ejercicio: Probar que $P^2 := P_\mu P^\mu$ y $W := -W_\mu W^\mu$, con $W^\mu := \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma}$ (pseudovector de Pauli-Lubanski) son operadores de Casimir de $P_+^\uparrow$ (esto quiere decir que conmutan con todos los elementos del álgebra).

Comentario: Estos operadores nos van a pertimir "etiquetar" a las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré. Si les genera ansiedad y quieren leer un poco más sobre esto ahora, pueden comenzar viendo el artículo de Wikipedia "Wigner's classification" y las referencias que allí se mencionan.

---

[3]Este resultado está asociado a que el grupo no es *compacto*.

Algunas cosas para llevarse de esta clase

- Grupos para recordar: grupo de Lorentz y subgrupos, grupo de Poincaré.
- $so(3,1) = su(2) + su(2) \implies$ Irreps de $SO(3,1)$ se etiquetan por (j_1, j_2) (espín de cada $su(2)$).
- Un espinor es un elemento sobre el cual actúa la irrep de $su(2)$ de $j = 1/2$.
- Espinor de Weyl $\begin{cases} \text{izquierdo} \to \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ \text{derecho} \to \left(0, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$
- Las irreps del grupo de Poincaré van a estar asociadas al concepto de partícula elemental en nuestra teoría.

1.6. Material adicional: El grupo conforme

Vimos que el grupo de Poincaré preserva la distancia o intervalo. El grupo de Poincaré es un subgrupo de un grupo más grande que es muy relevante en la física teórica y se conoce como **grupo conforme**. El grupo conforme deja invariante los conos de luz, es decir, preserva los ángulos. Ante la transformación $x \to x'$, los ángulos se preservan si ocurre

$$ds^2(x') = F(x) ds^2(x)\,, \tag{68}$$

para cierta $F(x)$ adecuadamente regular. Les proponemos que resuelvan el siguiente ejercicio para hallar la forma explícita que tienen las transformaciones conformes a nivel infinitesimal para dimensión del espacio-tiempo $d \geq 3$.

Ejercicio: Considerando transformacions infinitesimales

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)\,, \tag{69}$$

muestre que,

(a) La condicion (68) es equivalente a

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(x) g_{\mu\nu}, \qquad \text{donde } f(x) = F(x) - 1\,. \tag{70}$$

(b) Aplicando derivadas a (70) se obtiene

$$(2-d)\partial_\mu\partial_\nu f = g_{\mu\nu}\Box f\,. \tag{71}$$

(c) Para $d \geq 3$

$$\partial_\mu\partial_\nu f = 0\,. \tag{72}$$

(d) Que en el caso anterior ϵ_μ es una función a lo sumo cuadrática en las coordenadas.

(e) Que las transformaciones admisibles son

$$\begin{aligned}
x'_\mu &= x_\mu + a_\mu \ , && \text{Traslaciones}\,.\\
x'_\mu &= (1+\alpha)x_\mu\,, && \text{Dilataciones}\,.\\
x'_\mu &= (g^\nu_\mu + \epsilon^\nu_\mu)x_\nu\,, \ \text{ con } \ \epsilon^\nu_\mu = -\epsilon^\mu_\nu\,, && \text{Rotaciones}\,.\\
x'_\mu &= x_\mu + 2(x.b)x_\mu - b_\mu x^2 \ , && \text{Transformaciones especiales conformes}\,.
\end{aligned}$$

Este es el **grupo conforme** en $d \geq 3$. Estas expresiones corresponden a las versiones infinitesimales de las transformaciones. A partir de ellas pueden hallarse expresiones generales para cada transformación.

El grupo conforme en $d \geq 3$ contiene entonces al grupo de Poincaré y además a las dilataciones y las llamadas transformaciones especiales conformes. Para $d = 2$, donde el resultado del inciso (c) del ejercicio anterior no es válido, el grupo conforme se hace más grande. De hecho, en $d = 2$ el grupo conforme contiene infinitos tipos de nuevas transformaciones (aparecen infinitos generadores para su álgebra). Esto hace que los modelos que manifiestan la simetría conforme en dimensión $1+1$ sean muy ricos para el estudio analítico y es uno de los motivos por los cuales las teorías conformes en $1+1$ tienen tanta relevancia en física teórica.

Si les interesa el tema, les recomendamos que lean por ejemplo la introducción del libro "Conformal Field Theory" de los autores P. Di Francesco, P. Mathieu y D. Senechal. También pueden encontrar en la web varios reviews o lectures en los que se suele mencionar al comienzo las motivaciones para estudiar teorías conformes.

2. Ecuaciones de onda relativistas

En esta clase vamos a estudiar algunos aspectos de las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac siguiendo varios ejercicios de la práctica. Dichas ecuaciones de onda relativistas son ejemplos de ecuaciones que manifiestan la simetría ante el grupo de Poincaré que estuvimos estudiando la clase anterior. Es importante remarcar que si bien el tratamiento que haremos de estas ecuaciones será completamente clásico (los campos serán funciones escalares y no operadores) las propiedades que mostraremos serán esenciales más adelante cuando queramos hacer un tratamiento cuántico.

2.1. Ecuación de Klein-Gordon

Recordemos que la ecuación de Klein-Gordon surge originalmente con la intención de obtener una ecuación cuántica relativista. Para ese entonces se conocía la ecuación de Schrödinger que podemos escribir como

$$\hat{H}\psi = \left(\frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}\right)\psi \tag{73}$$

donde $\hat{H} = i\partial_t$ y $\hat{P} = -i\nabla$, y que como notarán se basa en la expresión clásica de la energía $E = P^2/2m + V$. La idea entonces para generalizarla fue utilizar la expresión relativista $E^2 = P^2 + m^2$ promoviendo los escalares a operadores y aplicandola a una función para llegar a $(-\hat{H}^2 + \hat{P}^2 + m^2)\phi = 0$. Finalmente, si uno reemplaza las relaciones anteriores para $\hat{H}$ y $\hat{P}$ obtiene la ecuación de Klein-Gordon

$$\partial_t^2\phi - \nabla^2\phi + m^2\phi = 0.$$

Notemos que para $m = 0$ esto no es nada más que la ecuación de ondas de siempre y agregar el término de masa desde el punto de vista puramente matemático no modifica demasiado; seguimos teniendo una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden que podemos resolver transformando Fourier y que requiere de condiciones iniciales $\phi(t = 0, x, y, z) = \phi_0$ y $\dot{\phi}(t = 0, x, y, z) = \dot{\phi}_0$. Sin embargo, desde el punto de vista físico no sabemos todavía qué es ϕ. Hasta acá por la derivación que hicimos análoga a la de la ecuación de Schrödinger pensaríamos que es una función de onda análoga a ψ cuyo módulo al cuadrado nos daría la probabilidad de encontrar a esta partícula relativista en un dado tiempo y lugar; sin embargo, veremos que esa interpretación ya no es posible. En última instancia la versión cuántica de esta ecuación nos permitirá describir bosones escalares de spin-0 como los piones o el bosón de Higgs.

Ejercicio: (Práctica 1, Ejercicio 11) *Considere la ecuación de (Oskar)Klein - (Walter)Gordon:*

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

siendo ϕ una función de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{C}$. ϕ puede considerarse como una representación del grupo de Lorentz del tipo $(0,0)$ (ver Ejercicio 9).

(a) *Muestre que si ϕ es solución, también lo es $\phi \circ (\Lambda, a)$ (invariancia de Poincaré de la ecuación).*

Comencemos con un poco de notación, para simplificar notaremos a $\phi(t,x,y,z)$ como $\phi(x^\mu)$. Queremos ver que si esta función satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + m^2\phi\right)(x^\sigma) = 0 \quad \forall x \tag{74}$$

entonces $\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)$ también lo hace.

Reemplazando $\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)$ en (74) debemos resolver

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\left(\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)\right). \tag{75}$$

Algo obvio, pero que puede confundir a simple vista es que

$$f'(g(x)) = \left(\frac{d}{dx}f\right)(g(x)) \neq \frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = \frac{d}{dx}\left(f\circ g\right)(x) = f'(g(x))g'(x). \tag{76}$$

Una cosa es la derivada de f evaluada en el punto $g(x)$ y otra cosa es la derivada de la función f compuesta con g evaluada en x. Tengan en cuenta esto porque es un error muy común. Voy a estar poniendo paréntesis de más que los libros suelen obviar para enfatizar esto. En este caso tenemos que derivar la composición

$$(75) = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\left(\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{77}$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\Lambda^\alpha_\sigma\left(\partial_\nu x^\sigma\right)\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma). \tag{78}$$

Esto no es más que la regla de la cadena usando notación de índices, por ejemplo,

$$\frac{d}{dx_1}f(g^1(x_1,x_2),g^2(x_1,x_2)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g^1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g^2}{\partial x_1} = \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g^j}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g^j}{\partial x_1} = \left(\partial_j f\right)\left(\partial_1 g^j\right) \tag{79}$$

Notemos que cada vez que queremos hacer la regla de la cadena tenemos que introducir un índice auxiliar nuevo diferente a los otros que tengamos dando vuelta, en el ejemplo anterior sería j, de lo contrario al repetir el índice estaríamos introduciendo una sumatoria que no debería estar.

Usando que $\partial_\nu x^\rho = \delta^\rho_\nu$ (esta es la delta de kronecker de siempre, mantenemos la posición de los índices para recordar cómo se contraen)

$$(78) = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\Lambda^\alpha_\sigma\delta^\sigma_\nu\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{80}$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\Lambda^\alpha_\nu\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{81}$$

$$= \eta^{\mu\nu}\Lambda^\alpha_\nu\Lambda^\beta_\mu\left(\partial_\alpha\partial_\beta\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma). \tag{82}$$

Ahora recordemos que

$$\Lambda^T\eta\Lambda = \eta \implies \Lambda^\alpha_\mu\eta^{\mu\nu}\Lambda^\beta_\nu = \eta^{\alpha\beta} \tag{83}$$

con lo cual tenemos

$$(82) = \eta^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\partial_\beta\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{84}$$

que es la ecuación de Klein-Gordon solo que evaluada en el punto $(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)$, pero como la ecuación vale para todo punto tenemos que

$$(84) = \eta^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\partial_\beta\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) = 0. \tag{85}$$

Esto prueba que la composición es también una solución de la ecuación de Klein-Gordon y por la tanto la ecuación es invariante ante el Grupo de Poincaré.

(b) *Verifique que esta ecuación es invariante ante el grupo discreto de transformaciones C y P y T, siendo C la operación de conjugar, P la composición con inversión espacial y T la composición con inversión temporal.*

Recordemos la acción de estas operaciones para el caso del campo escalar

$$C\left(\phi(t,\mathbf{x})\right) = \phi^*(t,\mathbf{x}) \tag{86}$$

$$P\left(\phi(t,\mathbf{x})\right) = \phi(t,-\mathbf{x}) \tag{87}$$

$$T\left(\phi(t,\mathbf{x})\right) = \phi(-t,\mathbf{x}) \tag{88}$$

Queremos ver que dada ϕ solución de la ecuación de Klein-Gordon

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + m^2\phi = 0 \tag{89}$$

ϕ^* también es solución. Conjugando la ecuación anterior tenemos

$$0 = \left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + m^2\phi\right)^* = \left(\eta^{\mu\nu}\right)^*\partial_\mu\partial_\nu\phi^* + \left(m^2\right)^*\phi^* = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi^* + m^2\phi^* \tag{90}$$

donde usamos que tanto $\eta^{\mu\nu}$ como ϕ y m^2 son reales. Esto es exactamente lo que queríamos ver.

Derivando es fácil ver que al transformar $(t,x,y,z) \to (t,-x,y,z)$ tenemos

$$\partial^2_x\left(\phi(t,-x,y,z)\right) = -\partial_x\left(\left(\partial_x\phi\right)(t,-x,y,z)\right) = (-1)^2\left(\partial_x\partial_x\phi\right)(t,-x,y,z) = \tag{91}$$

$$= \left(\partial^2_x\phi\right)(t,-x,y,z) \tag{92}$$

y que también

$$\partial_y^2 \left(\phi(t,-x,y,z)\right) = \left(\partial_y^2\phi\right)(t,-x,y,z). \tag{93}$$

es evidente que lo mismo vale cambiando cualquier componente (incluso t) por menos ella. Luego, haciendo explícita la suma sobre la ecuación de Klein-Gordon tenemos que (74) se reduce a

$$\left(\Box + m^2\right)\phi = \partial_t\partial_t\phi - \partial_x^2\phi - \partial_y^2\phi - \partial_z^2\phi + m^2\phi = 0 \tag{94}$$

y como los términos con dos derivadas no cambian (y la constante tampoco) ante reflexiones de una coordenada es claro que la misma ecuación sigue valiendo para $\phi(t,-x,y,z)$

$$\left(\Box + m^2\right)\left(\phi(t,-x,y,z)\right) = \left(\left(\Box + m^2\right)\phi\right)(t,-x,y,z). \tag{95}$$

Esta cuenta vale igual cambiando la reflexión en x por una en t lo que muestra la invariancia ante T. Por último, dado que reflejar una de las coordenadas es solución, reflejando de a una x, y, z es claro que aplicar P también es solución. De hecho las reflexiones espaciales y temporales pertenecen al grupo de lorentz y son un caso particular del ítem anterior ya que solo usamos que la transformación preservaba la métrica pero no cual era su determinante o la componente Λ_0^0.

2.2. Ecuacion de Klein-Gordon para un campo complejo

Ejercicio: (Práctica 1, Ejercicio 12) *Considere la ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo.*

(a) *Muestre que la cantidad (llamada corriente, por su interpretación como corriente conservada que se verá en la guía siguiente)* $j_\mu \equiv -\frac{i}{2}(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*)$ *satisface la ecuación de continuidad* $\partial_u j^u = 0$ *si* φ *satisface la ecuación de Klein-Gordon.*

Veamos que la corriente $j_\mu = -\frac{i}{2}\left(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*\right)$ satisface la ecuación de continuidad para un campo escalar complejo ϕ:

$$\partial_\mu j^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu j_\nu = -\frac{i}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\phi^*\partial_\nu\phi - \phi\partial_\nu\phi^*\right) = \tag{96}$$

$$= -\frac{i}{2}\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi^*\partial_\nu\phi + \phi^*\partial_\mu\partial_\nu\phi - \phi\partial_\mu\partial_\nu\phi^* - \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^*\right) \tag{97}$$

el primer y el último término se cancelan al contraer con $\eta^{\mu\nu}$ y nos queda

$$\partial_\mu j^\mu = -\frac{i}{2}\left(\phi^*\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - \phi\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi^*\right) \tag{98}$$

usando que el campo satisface la ecuación de Klein-Gordon tenemos que

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = -m^2\phi \tag{99}$$

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi^* = -m^2\phi^* \tag{100}$$

y reemplazando

$$\partial_\mu j^\mu = m^2\frac{i}{2}\left(\phi^*\phi - \phi\phi^*\right) = 0. \tag{101}$$

Evidentemente esto seguiría valiendo si la multiplicasemos por cualquier número complejo; sin embargo, es fácil ver que la unidad imaginaria es necesaria para que esta corriente sea real

$$j_\mu = -\frac{i}{2}2i\mathrm{Im}\left(\phi^*\partial_\mu\phi\right) = \mathrm{Im}\left(\phi^*\partial_\mu\phi\right). \tag{102}$$

(b) *Evalúe la corriente para las soluciones de frecuencia positiva y negativa* $\varphi_\pm(x,t) = e^{\mp ikx}$, *siendo* $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Si tenemos

$$\phi_\pm(x) = e^{\mp ik^\mu x_\mu} \tag{103}$$

entonces su corriente asociada es

$$j_\mu^\pm = -\frac{i}{2}\left(\phi_\pm^*\partial_\mu\phi_\pm - \phi_\pm\partial_\mu\phi_\pm^*\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{\pm ik^\nu x_\nu}\partial_\mu e^{\mp ik^\nu x_\nu} - e^{\mp ik^\nu x_\nu}\partial_\mu e^{\pm ik^\nu x_\nu}\right) = \tag{104}$$

$$= -\frac{i}{2}\left(e^{\pm ik^\nu x_\nu}\left(\mp ik_\mu\right)e^{\mp ik^\nu x_\nu} - e^{\mp ik^\nu x_\nu}\left(\pm ik_\mu\right)e^{\pm ik^\nu x_\nu}\right) = \tag{105}$$

$$= -\frac{i}{2}\left(\left(\mp ik_\mu\right) - \left(\pm ik_\mu\right)\right) = \mp k_\mu. \tag{106}$$

(c) *Muestre que la componente* j_0 *no es definida positiva (o negativa) en el espacio de soluciones generado por soluciones de frecuencia positiva y negativa.*

Del ítem anterior tenemos entonces que $j_0^\pm = \mp k^0 = \mp\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ que es positiva para las soluciones de frecuencia negativa y negativa para las soluciones de frecuencia positiva. Sin embargo, si

$$\phi = a\phi_+ + b\phi_-, \tag{107}$$

entonces

$$j_\mu = \mathrm{Im}\left(\left(a\phi_+ + b\phi_-\right)^*\partial_\mu\left(a\phi_+ + b\phi_-\right)\right) = \mathrm{Im}\left(\left(a^*\phi_+^* + b^*\phi_-^*\right)\partial_\mu\left(a\phi_+ + b\phi_-\right)\right) \tag{108}$$

$$= \mathrm{Im}\left(|a|^2\phi_+^*\partial_\mu\phi_+ + |b|^2\phi_-^*\partial_\mu\phi_- + b^*\phi_-^*a\partial_\mu\phi_+ + a^*\phi_+^*b\partial_\mu\phi_-\right) \tag{109}$$

$$= \mathrm{Im}\left(|a|^2\phi_+^*\partial_\mu\phi_+\right) + \mathrm{Im}\left(|b|^2\phi_-^*\partial_\mu\phi_-\right) + \mathrm{Im}\left(b^*\phi_-^*a\partial_\mu\phi_+ + a^*\phi_+^*b\partial_\mu\phi_-\right) \tag{110}$$

pero como $\phi_+ = \phi_-^*$, tenemos que $\left(a^*\phi_+^*b\partial_\mu\phi_-\right)^* = a\phi_+b^*\partial_\mu\phi_-^* = a\phi_-^*b^*\partial_\mu\phi_+$, entonces

$$j_\mu = |a|^2 j_\mu^+ + |b|^2 j_\mu^- + \mathrm{Im}\left(\mathrm{Re}\left(a^*\phi_+^*b\partial_\mu\phi_-\right)\right) = |a|^2 j_\mu^+ + |b|^2 j_\mu^- \tag{111}$$

y en particular

$$j_0 = |a|^2 j_0^+ + |b|^2 j_0^- = \left(|b|^2 - |a|^2\right) k^0 \tag{112}$$

que no tiene un signo bien definido sino que depende de la combinación lineal.

¿Por qué es importante esta observación de que j_0 no tiene un signo bien definido? Es importante porque la ecuación de Klein-Gordon surgió originalmente con la intención de obtener una versión covariante de la ecuación de Schrodinger y recordemos que la función de onda, $\psi(\mathbf{x}, t)$, de dicha ecuación estaba asociada a la amplitud de probabilidad, o sea que $|\psi(\mathbf{x}, t)|^2$ nos daba la probabilidad de encontrar a la partícula en la posición x a tiempo t. Matemáticamente, una de las piezas fundamentales en esta interpretación provenía de que al definir la corriente de probabilidad

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^*\right) \tag{113}$$

teníamos la ecuación de continuidad para la probabilidad

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(\mathbf{x}, t)|^2 + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \tag{114}$$

Al notar que la ecuación para $\mathbf{j}$ es idéntica a j_μ con $\mu = 1, 2, 3$ (a menos de un factor) y que (114) es idéntica a (101), uno se ve tentado de interpretar a ϕ como una función de onda con una densidad de probabilidad dada por j_0. Sin embargo, lo que este ejercicio nos dice es que esto no es posible, pues si así fuera j_0 debería ser definida positiva o negativa (si fuese negativa podríamos redefinir a j_μ multiplicandola por -1 y hacerla positiva) para definir correctamente una probabilidad (que por definición es no negativa).

En cambio una interpretación que pareciera ser más adecuada viene del lado del electromagnetismo. Allí recordemos que la conservación de la carga eléctrica podía expresarse por la ley de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{115}$$

siendo ρ la densidad de carga y $\mathbf{j}$ la densidad de corriente. En ese caso ρ podía ser tanto positiva como negativa y era sólo la carga total la conservada; de manera similar podríamos pensar en las soluciones de frecuencia positiva o negativa como portadoras de distintas "cargas". Vale aclarar que todo este ejercicio sólo tiene sentido con un campo escalar complejo ya que si fuese real la corriente que definimos sería idénticamente 0.

Empezamos buscando una generalización de la ecuación de Schrödinger compatible con la relatividad especial. Sin embargo, llegamos a una ecuación que, o bien no tiene una corriente conservada del mismo tipo (si el campo es real) o bien cuando la podemos definir no obtenemos una densidad de probabilidad para la partícula. Si a eso agregamos que ahora debemos dar más

condiciones iniciales, pues no sólo debemos dar el valor de ϕ a tiempo inicial sino también su derivada (lo cual no sucedía con la ecuación de Schródinger) y que además transformando Fourier la ecuación de Klein-Gordon obtenemos la relación de dispersión $E^2 = p^2 + m^2$ que permite energías negativas (recordemos que esto no pasaba con Schrodinger por ser el hamiltoniano un operador hermítico) no es difícil entender que esta ecuación haya sido inicialmente descartada.

2.3. Ecuación de Dirac

Así las cosas parecería necesario entonces obtener una nueva ecuación. Dos de los problemas anteriores podrían ser resueltos con una ecuación de primer orden puesto que no necesitaríamos dar $\dot{\phi}_0$ y permitiría potencialmente eliminar el cuadrado que permite energías negativas en la relación de dispersión anterior (de manera tal que $E = \sqrt{p^2 + m^2} > 0$). Esto motivó a Dirac a buscar un operador lineal $O = (A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z + iD\partial_t)$ tal que $O^2 = \nabla^2 - \partial_t^2 \sim E^2 - p^2$, de esta relación se deducen relaciones de conmutación entre A, B, C, D que determinan el álgebra de Dirac. Su solución resulta ser la ecuación de Dirac

$$O\Psi = (i\gamma^\mu \partial_\mu)\Psi = m\Psi$$

por analogía con $O \sim \sqrt{E^2 - p^2} = m$.

Ejercicio: (Práctica 1, Ejercicio 13) *Considere ahora la ecuación de Dirac:*

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0$$

siendo Ψ una función del espacio-tiempo en $\mathbb{C}^4$. Las γ^μ son matrices que cumplen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} 1_{4\times 4}$. Por cada solución Ψ de la ecuación de Dirac, es posible generarse otra solución $\tilde{\Psi}$, definida por $\tilde{\Psi}(x) \equiv S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)$, con $S(\Lambda)$ una matriz asociada a la transformación de Lorentz.

(a) *Muestre que S debe cumplir: $S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$.*

Notemos que la simplicidad que ganamos al tener ahora una ecuación lineal la perdimos en que Ψ ya no es un *escalar* como lo era ϕ, que podía pensarse como una representación del grupo de Lorentz tipo $(0,0)$. Ahora Ψ es un vector, lo que significa que al hacer una transformación de Lorentz no sólo debemos transformar el punto en el que se evalúa, sino además también las componentes de su vector (esto es lo que hace $S(\Lambda)$).

Yendo al ejercicio, si el campo transforma como $\tilde{\Psi}(x) = S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)$ y pedimos que la ecuación de Dirac sea invariante de Lorentz tenemos

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x) = S(\Lambda)S(\Lambda)^{-1}\left(i\gamma^\mu \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu_\mu \partial_\nu - m\right) S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x) \quad (116)$$

$$0 = S(\Lambda)\left(iS(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda)\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\mu}\partial_{\nu}\Psi - m\Psi\right)(\Lambda^{-1}x) \tag{117}$$

Necesitamos entonces que

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda)\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\mu} = \gamma^{\nu} \tag{118}$$

(de manera tal que al reemplazar en (117) obtengamos $S(\Lambda^{-1})\left(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu}\Psi - m\Psi\right)(\Lambda^{-1}x) = 0$). Luego multiplicando (118) por Λ^{μ}_{ν} y sumando sobre ν obtenemos

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} \tag{119}$$

como queríamos. Lo que nos dice este ejercicio es que si queremos que la ecuación de Dirac sea invariante ante transformaciones de Lorentz, las matrices de Dirac deben transformar de manera covariante. Esto es razonable, puesto que si queremos que la ecuación sea invariante de Lorentz el término $\gamma^{\mu}\partial_{\mu}$ debería ser invariante y dado que la derivada transforma como un vector covariante la matriz gamma debería transformar como uno contravariante.

(b) *Compruebe que* $S \equiv e^{\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$, *con* $\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_{\mu},\gamma_{\nu}]$, *satisface la condición previa a primer orden en el parámetro* $\omega^{\mu\nu}$ *de la transformación de Lorentz* Λ.

Sea

$$S(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) \approx 1 + \frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \tag{120}$$

la matriz de transformación de los espinores de Dirac a causa de una tranformación de Lorentz Λ del sistema de coordenadas (donde $\approx$ significa a primer orden en $\omega^{\mu\nu}$). Entonces tenemos que su transformación inversa viene dada por

$$S(\Lambda)^{-1} = \exp\left(-\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) \approx 1 - \frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}. \tag{121}$$

Además podemos expresar a Λ en términos de los generadores del grupo de Lorentz como

$$\Lambda = \exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\sigma\rho}M_{\sigma\rho}\right) \approx 1 + \frac{i}{2}\omega^{\sigma\rho}M_{\sigma\rho} \tag{122}$$

y reemplazando en la relación obtenida en el ejercicio anterior

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} = S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda) \tag{123}$$

$$\left(1 + \frac{i}{2}\omega^{\sigma\rho}M_{\sigma\rho}\right)^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} = \left(1 - \frac{i}{2}\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}\right)\gamma^{\mu}\left(1 + \frac{i}{2}\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}\right) \approx \gamma^{\mu} + \frac{i}{2}\left(\gamma^{\mu}\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho} - \Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}\gamma^{\mu}\right) \tag{124}$$

$$(M_{\sigma\rho})^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} = \left(\gamma^{\mu}\Sigma_{\sigma\rho} - \Sigma_{\sigma\rho}\gamma^{\mu}\right) = \left[\gamma^{\mu},\Sigma_{\sigma\rho}\right]. \tag{125}$$

Sólo queda como ejercicio reemplazar las matrices $M_{\sigma\rho}$ y γ^{μ} que ya conocemos y la matriz $\Sigma_{\sigma\rho}$ que nos dan en la expresión anterior y ver que efectivamente el lado izquierdo coincide con el derecho.

2.3.1. Representación Quiral

Nuevamente nos encontramos con una representación del grupo de Lorentz, ahora dada por las matrices $S(\Lambda)$. Esta representación tiene un álgebra de Lorentz asociada cuyos generadores son las matrices $\Sigma_{\sigma\rho}$, como vimos en el ejercicio anterior. También vimos antes que toda representación del álgebra de Lorentz puede ser escrita como suma directa de 2 su(2). La pregunta natural sería cuál es el espín de estas dos representaciones en este caso particular y qué significan físicamente.

Ejercicio: (Práctica 1, Ejercicio 14) *La representación del grupo de Lorentz (incluyendo paridad) de dimensión más baja es una suma directa de representaciones de espín* $\frac{1}{2}$*:* $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$*. Esta es la representación espinorial. A fin de ver esto, considere la llamada representación quiral de las matrices de Dirac, en las que el único cambio respecto a la representación estandard es en* $\gamma^0_{quiral} = \begin{bmatrix} 0 & 1_{2\times2} \\ 1_{2\times2} & 0 \end{bmatrix}$

(a) *Muestre que una transformación de Lorentz preserva espinores de la forma* $\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $\begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix}$.

Como vimos en el ejercicio anterior los generadores de las transformaciones de espinores vienen dados por

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right). \tag{126}$$

Notemos que

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AD & 0 \\ 0 & BC \end{bmatrix}$$

y, como las matrices γ^μ en esta representación tienen justo esa forma, pues

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix},$$

tenemos que $\Sigma_{\mu\nu}$ resulta diagonal por bloques. Además dado que

$$\exp\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(A) & 0 \\ 0 & \exp(B) \end{bmatrix},$$

es claro que la transformación S será de la forma

$$S = \exp\left(\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Así, dado un espinor $\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix}$ en el subespacio

$$T^+ = \left\langle \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\rangle$$

tendremos que $S \begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\xi \\ 0 \end{bmatrix} \in T^+$.

De la misma forma, dado un espinor $\begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix}$ en el subespacio

$$T^- = \left\langle \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\rangle$$

tendremos que $S \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B\chi \end{bmatrix} \in T^-$.

Esto que a simple vista puede parecer solo una curiosidad matemática nos dice que la ecuación de Dirac preserva la quiralidad y más adelante veremos que está relacionado con un observable que se puede medir en el laboratorio.

(b) *Calcule los generadores A y B del Ejercicio 9 en esta representación y verifique que los dos tipos de espinores del inciso anterior corresponden a la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$.*

Necesitamos calcular

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_{jk} \tag{127}$$

$$K_i = \Sigma_{i0} \tag{128}$$

(usamos letras latinas para los enteros del 1 al 3) para luego obtener

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\vec{J} - i\vec{K}\right) \tag{129}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\left(\vec{J} + i\vec{K}\right). \tag{130}$$

Recordemos que los generadores de rotaciones en esta representación del álgebra de Lorentz

son

$$\Sigma_{jk} = \frac{i}{4}\left[\gamma^j, \gamma^k\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^j\gamma^k - \gamma^k\gamma^j\right) \tag{131}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{132}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} -\sigma^j\sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^j\sigma^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sigma^k\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^k\sigma^j \end{bmatrix}\right) \tag{133}$$

$$= \frac{i}{4}\begin{bmatrix} \sigma^k\sigma^j - \sigma^j\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k\sigma^j - \sigma^j\sigma^k \end{bmatrix} = \frac{i}{4}2i\epsilon_{kji}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} \tag{134}$$

$$= -\frac{1}{2}\epsilon_{kji}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} \tag{135}$$

Mientras que los generadores de boosts están dados por

$$\Sigma_{i0} = \frac{i}{4}\left[\gamma^i, \gamma^0\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^i\gamma^0 - \gamma^i\gamma^0\right) \tag{136}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{137}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix}\right) \tag{138}$$

$$= \frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix} \tag{139}$$

Reemplazando esto en (127) tenemos

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_{jk} = \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon_{qjk}\begin{bmatrix} \sigma^q & 0 \\ 0 & \sigma^q \end{bmatrix} \tag{140}$$

$$= \frac{1}{4}2\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} \tag{141}$$

$$K_i = \Sigma_{i0} = \frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix} \tag{142}$$

donde usamos que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{qjk} = 2\delta_{iq}$, y en virtud de (129) obtenemos

$$A_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & \sigma^i\end{bmatrix} - i\frac{i}{2}\begin{bmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & -\sigma^i\end{bmatrix}\right) \tag{143}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & \sigma^i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & -\sigma^i\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{144}$$

$$B_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & \sigma^i\end{bmatrix} + i\frac{i}{2}\begin{bmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & -\sigma^i\end{bmatrix}\right) \tag{145}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & \sigma^i\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & -\sigma^i\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \sigma^i\end{bmatrix} \tag{146}$$

como vemos efectivamente $\vec{A}$ actúa sobre T^+ y $\vec{B}$ sobre T^- y además, como son las matrices de Pauli, sabemos que su álgebra es $su(2)$.

Lo que nos dice este ejercicio es algo que ya habíamos adelantado: las soluciones de la ecuación de Dirac son espinores de Dirac Ψ que pueden descomponerse como suma de espinores de Weyl $\Psi = \Psi_L + \Psi_R$ con $\Psi_L \in T^+, \Psi_R \in T^-$ (usando que $T^+ \oplus T^- = \mathbb{C}^4$) y esta descomposición no cambia frente a transformaciones del grupo de Lorentz.

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

...sobre la ecuación de Klein-Gordon

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de segundo orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré y transformaciones C, P y T.
- ϕ es un escalar (representación del grupo de Lorentz del tipo $(0,0)$).
- No define una función de onda.

...sobre la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Psi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de primer orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré.
- Ψ es un vector complejo de 4 componentes.
- $\Psi = \Psi_L + \Psi_R$ es un espinor de Dirac (corresponde a $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$).
- Las componentes Ψ_L y Ψ_R no cambian ante transformaciones de Lorentz.

3. Formulación Lagrangiana de teorías de campos

Hasta ahora la búsqueda de una teoría cuántica compatible con los principios de la relatividad especial nos ha llevado naturalmente a considerar la noción de campos. Hemos encontrado las ecuaciones de movimiento para un campo de Klein-Gordon y de Dirac y hemos estudiado algunas de sus simetrías. En lo que sigue intentaremos comprender cuáles son algunas de las consecuencias físicas de la existencia de estas simetrías. Para ello, y para luego poder introducir interacciones en la teoría, será útil contar con una descripción Lagrangiana.

Recordemos que el Lagrangiano L es un funcional de los campos y sus derivadas $L(\phi, \partial_\mu \phi)$, es decir, un escalar de Lorentz. En teoría de campos, el mismo se escribirá usualmente en términos de una densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ integrando sobre las coordenadas espaciales

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\,. \tag{147}$$

Recordamos la definición de la acción

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{148}$$

Las ecuaciones de movimiento para los campos se obtienen a partir del principio de mínima acción, extremando (148). La ecuación para la acción nos dice que una cuadri-divergencia en el Lagrangiano sólo produce un término de borde en la acción (aplicando el teorema de Stokes) y no modifica las ecuaciones de movimiento. Encontramos entonces que el campo que minimiza la acción debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0. \tag{149}$$

Dada una densidad Lagrangiana, la ecuación de Euler-Lagrange entonces nos dará las ecuaciones de movimiento.

Definiendo el momento canónico conjugado a ϕ como

$$\Pi_\phi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)}, \tag{150}$$

podremos escribir el Hamiltoniano

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(x), \tag{151}$$

con

$$\mathcal{H}(x) = \sum_\phi \Pi_\phi(x) \partial_0 \phi(x) - \mathcal{L}(x). \tag{152}$$

3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Veamos algunos ejemplos de cómo derivar las ecuaciones de Euler-Lagrange. Empecemos con el caso del campo escalar.

Ejemplo: (Práctica 2, Ejercicio 21) *Considere la densidad Lagrangiana* $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2$, *con* ϕ *real.*

(a) *Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange.*

Comencemos calculando las derivadas que necesitaremos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi \tag{153}$$

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial_\mu\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}\left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi\right) = \partial_\mu\left[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\beta\phi + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\frac{\partial\left(\partial_\beta\phi\right)}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] \tag{154}$$

$$= \partial_\mu\left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\delta^\mu_\alpha\partial_\beta\phi + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\delta^\mu_\beta\right) = \partial_\mu\left(\frac{1}{2}2\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right) = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi \tag{155}$$

Luego reemplando estas en la ecuación de Euler-Lagrange tenemos

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = -m^2\phi - \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi, \tag{156}$$

que es la ecuación de Klein-Gordon que ya habíamos visto. Podemos además obtener el momento canónico conjugado de ϕ

$$\Pi_\phi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi \tag{157}$$

con lo que el Hamiltoniano resulta ser

$$\mathcal{H}(x) = \partial_0\phi\partial_0\phi(x) - \mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi} + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{158}$$

que podemos reconocer como la suma de la energía cinética más la potencial.

(b) *Considere ahora la densidad Lagrangiana* $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*$, *donde* ϕ *ahora es un campo complejo. Note que ahora no está el factor* $\frac{1}{2}$ *en el término cinético y en el de masa. Escribiendo* $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, *con* ϕ_1 *y* ϕ_2 *reales, obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange para* ϕ_1 *y* ϕ_2 *y muestre que ambos cumplen la ecuación de Klein-Gordon.*

Expandamos primero el Lagrangiano

$$\begin{aligned}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^* - m^2\phi\phi^* = \\ &= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\partial_\nu\left(\phi_1 - i\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\left(\phi_1 - i\phi_2\right) \\ &= \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_1 + i\partial_\mu\phi_2\partial_\nu\phi_1 - i\partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_1 + \partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) \\ &= \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_1 + \partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)\end{aligned} \tag{159}$$

Calculemos ahora las derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_j} = -m^2 \phi_j \,, \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_j)} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi_j \,. \tag{160}$$

Reemplazando entonces en la ecuación de Euler-Lagrange

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_j} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_j)} = -m^2 \phi_j - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi_j \tag{161}$$

obtenemos que los campos ϕ_1 y ϕ_2 satisfacen la ecuación de Klein-Gordon.

(c) *Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange considerando ϕ y ϕ^* como variables independientes y verifique que obtiene las mismas ecuaciones de movimiento que en el inciso anterior.*

Calculando las derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -m^2 \phi \tag{162}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi^*\right) = \partial_\nu \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi\right) \tag{163}$$

Introduciendo esto en la ecuación de Euler-Lagrange

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = -m^2 \phi - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi \tag{164}$$

y reemplazando aquí $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ tenemos

$$0 = -m^2 \left(\phi_1 + i\phi_2\right) - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \left(\phi_1 + i\phi_2\right) \tag{165}$$

y como la parte imaginaria y real deben anularse por separado obtenemos

$$0 = -m^2 \phi_j - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi_j \tag{166}$$

con lo cual reobtuvimos las ecuaciones de movimiento del item anterior.

Tenemos entonces que el momento canónico conjugado a ϕ es

$$\Pi_\phi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^* \tag{167}$$

y análogamente $\Pi_{\phi^*}(x) = \partial_0 \phi$ con lo que el Hamiltoniano resulta ser

$$\mathcal{H}(x) = \partial_0 \phi^* \partial_0 \phi(x) + \partial_0 \phi \partial_0 \phi^*(x) - \mathcal{L}(x) = \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi + m^2 |\phi|^2 \tag{168}$$

$$= \dot{\phi_1}^2 + \left(\nabla \phi_1\right)^2 + m^2 \phi_1^2 + \dot{\phi_2}^2 + \left(\nabla \phi_2\right)^2 + m^2 \phi_2^2 \tag{169}$$

que reconocemos como la suma de dos Hamiltonianos de campos escalares reales independientes (para que aparezcan los factores 1/2 de la ec. (158) podríamos haber empezado escribiendo $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ en lugar de $\phi = \phi_1 + i\phi_2$).

Veamos ahora el caso del campo de Dirac.

Ejemplo: (Práctica 2, Ejercicio 26 a) *Considere ahora el Lagrangiano de un campo de Dirac con masa m.*

(a) *Derive la ecuación de Dirac como ecuación de Euler-Lagrange de este Lagrangiano.*

A partir del Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi \tag{170}$$

podemos obtener la ecuación de movimiento para un campo de Dirac

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} = i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi. \tag{171}$$

El momento canónico conjugado a Ψ es entonces

$$\Pi_\Psi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \Psi)} = \bar{\Psi} i\gamma^0 = i\Psi\gamma^0\gamma^0 = i\Psi^\dagger \tag{172}$$

mientras que el momento canónico conjugado de $\Psi^\dagger$ es

$$\Pi_{\Psi^\dagger}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \Psi^\dagger)} = 0 \tag{173}$$

y el Hamiltoniano resulta

$$\mathcal{H} = \bar{\Psi}\left[-i\gamma^j \partial_j + m\right]\Psi. \tag{174}$$

La densidad Lagrangiana dada por la ecuación (170) (cuando se piensa a los campos evaluados en algún punto) da un número que en principio no es real. Sin embargo, es posible definir una densidad Lagrangiana real, que lleve a las mismas ecuaciones de movimientos (y las mismas cantidades conservadas). Para ver esto, pueden leer la discusión que se hace en el libro de Greiner alrededor de las ecuaciones 5.27 y 5.28.

En general, uno puede construir Lagrangianos a partir de notar que hay ciertas simetrías y pedir que se respeten algunas condiciones adicionales que facilitan el estudio de los mismos (por ejemplo, para requerir que las ecuaciones de movimiento tengan un orden particular que nos permita resolverlas fijando datos iniciales sobre los campos y derivadas de cierto orden). Veamos un último ejercicio, donde se ilustra esta construcción para campos vectoriales.

Ejercicio: (Práctica 2, Ejercicio 22) *Escriba la forma más general posible del Lagrangiano invariante de Lorentz para un campo cuadrivectorial con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo. ¿A qué se reduce este Lagrangiano en el caso en que además se requiera invariancia ante transformaciones de gauge? Derive las ecuaciones de movimiento y compare con las de Maxwell.*

Los términos que tenga este Lagrangiano deben ser escalares de Lorentz y deberemos construirlos contrayendo índices del campo cuadrivectorial A^μ y la derivada ∂_μ. Como los índices se contraen de a pares deberá haber una cantidad par de estos objetos. Si tenemos 2 las opciones son $A^\mu A_\mu$ y $\partial_\mu A^\mu$. Sin embargo, podemos obviar este último, ya que es una cuadri-divergencia que en la acción sólo contribuye con un término de borde.

Si tenemos 4 objetos, las opciones son $\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu = (\partial_\mu A^\mu)^2$, $(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu)$, $(\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu)$, $(\partial_\mu \partial_\nu A^\nu) A^\mu$ y $\partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu$. El último término es también una cuadri-divergencia de $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu$, con lo cual podemos ignorarlo. Además, el término $(\partial_\mu \partial_\nu A^\nu) A^\mu$ difiere del primero también en una cuadri-divergencia $((\partial_\mu \partial_\nu A^\nu) A^\mu + (\partial_\nu A^\nu)(\partial_\mu A^\mu) = \partial_\mu (\partial_\nu A^\nu A^\mu))$, con lo cual también lo descartamos.

El Lagrangiano más general, con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo, es entonces

$$\mathcal{L} = \alpha (\partial_\mu A^\mu)^2 + \beta (\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu) + \gamma (\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu) + \delta A_\mu A^\mu. \tag{175}$$

Para hallar la ecuación de movimiento calculemos las derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 2\delta A^\mu \tag{176}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\nu A_\mu)} = \alpha 2 \eta^\mu_\nu (\partial_\sigma A^\sigma) + \beta 2 \partial_\nu A^\mu + \gamma 2 \partial^\mu A_\nu \tag{177}$$

y reemplazando en la ecuación de Euler-Lagrange obtenemos

$$\delta A^\mu - \partial^\nu \left[\alpha \eta^\mu_\nu (\partial_\sigma A^\sigma) + \beta \partial_\nu A^\mu + \gamma \partial^\mu A_\nu\right] = 0 \tag{178}$$

$$\delta A^\mu = (\alpha + \gamma) \partial^\mu (\partial_\sigma A^\sigma) + \beta \Box A^\mu. \tag{179}$$

con lo cual podemos eliminar el término con α del Lagrangiano sin perder generalidad. Así el lagrangiano resulta

$$\mathcal{L} = \beta (\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu) + \gamma (\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu) + \delta A_\mu A^\mu. \tag{180}$$

Si pedimos que además tenga invariancia de gauge, o sea que al reemplazar $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ las ecuaciones de movimiento no cambien

$$\delta (A^\mu + \partial^\mu \Lambda) = \gamma \partial^\mu (\partial_\sigma A^\sigma + \Box \Lambda) + \beta \Box (A^\mu + \partial^\mu \Lambda) \tag{181}$$

pidiendo que esto coincida con la ecuación de movimiento original tenemos

$$\delta \partial^\mu \Lambda = \gamma \partial^\mu \Box \Lambda + \beta \partial^\mu \Box \Lambda \quad \forall \Lambda, \tag{182}$$

en particular tomando una función Λ tal que $\Box\Lambda = 0$ tenemos que $\delta = 0$ y la ecuación anterior resulta $(\gamma + \beta)\partial^\mu \Box\Lambda = 0$ lo que nos dice que $\gamma = -\beta$. Así, el Lagrangiano resulta

$$\mathcal{L} = \beta \left(\partial_\mu A^\nu\right)\left(\partial^\mu A_\nu\right) - \beta \left(\partial_\mu A^\nu\right)\left(\partial_\nu A^\mu\right) = -2\beta \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right). \tag{183}$$

que coincide con el Lagrangiano para el campo de Maxwell.

3.2. Teorema de Noether

La razón por la que hemos hecho tanto hincapié en las simetrías de una teoría es que existe una relación entre las simetrías de esta y las leyes de conservación. En nuestro caso, una simetría es una transformación de los campos que deja invariante la acción. Las simetrías pueden ser *internas* si sólo afectan al campo y no cambian las coordenadas o *espacio-temporales* en caso contrario. Por ejemplo, si tenemos un campo escalar sin masa su Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \tag{184}$$

es invariante si hacemos la transformación $\phi \to \phi + \alpha$ con α una constante. Esta es una simetría interna. Mientras que cambiar $\phi(x) \to \phi(x + \alpha)$ también es una simetría pero espacio-temporal. Estas son simetrías continuas puesto que uno puede variar α de manera continua. Mientras que las simetrías discretas son por ejemplo C, P y T.

El teorema de Noether nos dice que a cada simetría continua de un sistema le corresponde una ley de conservación. Matemáticamente, si ante una transformación de simetría infinitesimal (en esta clase nos limitamos a transformaciones de los campos)

$$\phi \to \phi(x) + \alpha \Delta\phi \tag{185}$$

el lagrangiano pasa a

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu \tag{186}$$

entonces tenemos la ecuación de conservación

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{187}$$

siendo

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi - \mathcal{J}^\mu. \tag{188}$$

En el caso de la simetría interna para el campo escalar sin masa que mostramos antes tenemos

$$\phi \to \phi(x) + \alpha \tag{189}$$

y como el lagrangiano no cambia $\mathcal{J}^\mu = 0$ tenemos la ley de conservación

$$0 = \partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \partial^\mu \phi \tag{190}$$

que en este caso no nos aporta nada nuevo pues es la ecuación de movimiento para el campo.

Otra simetría interna que podemos considerar es multiplicar a un campo escalar complejo por un número complejo $\phi \to e^{i\theta}\phi$ pues

$$\mathcal{L} \to \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi e^{i\theta})(\partial_\nu \phi^* e^{-i\theta}) - m^2 e^{i\theta}\phi e^{-i\theta}\phi^* = \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi^*) - m^2\phi\phi^*. \tag{191}$$

Si tratamos a los campos ϕ y ϕ^* como independientes, esta simetría genera las transformaciones infinitesimales

$$\phi \to \phi + i\theta\phi\,, \quad \phi^* \to \phi^* - i\theta\phi^*\,, \tag{192}$$

y la corriente conservada resulta ser

$$j^\mu = i\left[(\partial^\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu\phi)\right] \tag{193}$$

que es la misma corriente que habíamos estudiado anteriormente y ahora podemos ver que proviene de la simetría interna del campo ante multiplicar por una fase. Como mencionamos previamente veremos que esta corriente estará asociada con la carga del campo.

La clase siguiente vamos a estudiar con más detalle distintos ejemplos de simetrías, haciendo énfasis particular en las simetrías espacio-temporales.

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- Ecuación de Euler-Lagrange para un campo: $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0$
- Algunos Lagrangianos para recordar:
  - Klein-Gordon (cargado): $\mathcal{L}_{\text{K-G}} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*$
  - Dirac: $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\Psi} i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi$
  - Maxwell: $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$
- Idea del Teorema de Noether: A cada simetría continua de un sistema le corresponde una corriente conservada.

La clase pasada dimos un primer vistazo rápido al teorema de Noether, que nos dice que por cada transformación de simetría del sistema tenemos una cantidad conservada. Escribimos una versión reducida, que aplicaba al caso particular en el cual el tipo de transformaciones no afectaba las coordenadas del espacio-tiempo. En la clase de hoy, vamos a estudiar la versión general del teorema. Calcularemos las cantidades conservadas que aparecen asociadas a la simetría bajo transformaciones del grupo de Poincaré. Comencemos entonces recordando la versión general del teorema de Noether, cuya demostración ya han visto en la clase teórica.

Supongamos que tenemos una transformación infinitesimal, que se escribe en términos de ciertos parámetros ϵ^a, que cambia las coordenadas y los campos de la siguiente manera

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A^\mu_a(x) \tag{194}$$

$$\phi_i(x) \to \phi'_i(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\,. \tag{195}$$

El índice a etiqueta la cantidad de parámetros infinitesimales, mientras que el índice i el número de campos si hay más de uno o de componentes del campo si el mismo es por ejemplo un espinor de Dirac. Decimos que esta transformación es una **simetría** si deja invariante la acción. En dicho caso, el teorema de Noether asegura que

$$\partial_\mu j^\mu_a = 0\,, \tag{196}$$

sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento, siendo

$$j^\mu_a = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A^\nu_a(x)\partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\right] \right\} - A^\mu_a(x)\mathcal{L}(x)\,. \tag{197}$$

Además, la cantidad

$$Q_a = \int d^3x j^0_a(x)\,, \tag{198}$$

es una **constante de movimiento**, es decir, no cambia en el tiempo (sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento).

Para entender el teorema, y cómo usarlo, lo mejor es empezar con un ejemplo. Comencemos viendo el caso en el cual se tiene invariancia ante traslaciones.

3.2.1. Invariancia bajo traslaciones. Tensor de energía-impulso

Para ilustrar cuáles son las corrientes conservadas asociadas a la invariancia ante traslaciones vamos a seguir el siguiente ejercicio.

Ejercicio: (Práctica 2, Ejercicio 24) *Considere la densidad Lagrangiana del campo escalar complejo del ejercicio 21.*

(a) *Halle las corrientes de Noether asociadas a la invariancia ante traslaciones espaciales y temporales.*

Recordamos el Lagrangiano de Klein-Gordon para un campo complejo (cargado)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi \,. \tag{199}$$

Una traslación espacio-temporal en un parámetro ϵ^μ,

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu = x^\mu + \epsilon^\nu g^\mu_\nu \,, \tag{200}$$

(noten que según la ecuación (194), en este caso es $A^\mu_\nu = g^\mu_\nu$) induce la siguiente transformación en los campos

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x' - \epsilon) = \phi(x) \,, \tag{201}$$

y lo análogo para ϕ^* (esto es idéntico a lo que hacían en electromagnetismo para ver cómo escribir la densidad de carga transformada por una traslación en términos de la densidad de carga original). Comparando la ecuación (201) con (195), vemos que en este caso, resulta

$$F_{i,\mu} = 0 \,, \tag{202}$$

para todo i y μ. Noten que identificamos $a \to \mu$, porque hay cuatro traslaciones infinitesimales, una por cada dirección del espacio-tiempo. El índice i toma los valores 1 y 2 (asociados a ϕ y ϕ^*).

Hasta aquí, lo único que hicimos fue ver qué sucede con las coordenadas y los campos ante una traslación. Para poder aplicar el teorema de Noether, necesitamos ver si esta transformación es una simetría, es decir, si deja invariante la acción. En este caso, mostrar esto es sencillo, ya que el mismo Lagrangiano queda invariante

$$\mathcal{L}'(x') \equiv \mathcal{L}\left[\phi'(x'), \frac{\partial \phi'}{\partial x'}, x'\right] = \mathcal{L}\left[\phi(x), \frac{\partial \phi}{\partial x'}, x'\right] \,, \tag{203}$$

pero como ϵ^μ es un cuadrivector constante, derivar respecto a x' es lo mismo que derivar respecto a x, por lo que

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}\left[\phi(x), \frac{\partial \phi}{\partial x}, x'\right] \,. \tag{204}$$

El último término en el corchete, x', está puesto porque podría pasar que el Lagrangiano dependiera explícitamente de las coordenadas. En nuestro caso, la única dependencia en las coordenadas aparece a través de los campos, de modo que podemos obviar eso. De este modo, resulta

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}\left[\phi(x), \frac{\partial \phi}{\partial x}\right] = \mathcal{L}(x) \,, \tag{205}$$

y como $d^4x' = d^4x$ la acción también es invariante. Esto nos dice que las traslaciones son simetrías y entonces hay corrientes conservadas. Recurriendo a la ecuación (197) y

recordando que $A^\mu_\nu = g^\mu_\nu$ y $F_\mu = 0$, las corrientes quedan

$$\begin{aligned} j^\mu_\sigma &= \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A^\nu_\sigma(x) \partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] \right\} - A^\mu_\sigma(x) \mathcal{L}(x) = && (206) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} g^\nu_\sigma \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} g^\nu_\sigma \partial_\nu \phi^* - g^\mu_\sigma \mathcal{L} = && (207) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\sigma \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \partial_\sigma \phi^* - g^\mu_\sigma \mathcal{L} = && (208) \\ &= \partial^\mu \phi^* \partial_\sigma \phi + \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi^* - g^\mu_\sigma \left(\partial_\nu \phi \partial^\nu \phi^* - m^2 \phi^* \phi \right) = && (209) \\ &= \partial^\mu \phi^* \partial_\sigma \phi + \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi^* - g^\mu_\sigma \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi^* + g^\mu_\sigma m^2 \phi^* \phi \,. && (210) \end{aligned}$$

En general, a la corriente j^μ_σ asociada a la invariancia ante traslaciones se la llama **tensor de energía-impulso**, y se la denota con la letra θ. Como acabamos de ver, en el caso del campo escalar cargado, el tensor de energía-impulso es

$$\theta^\mu_\sigma = \partial^\mu \phi^* \partial_\sigma \phi + \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi^* - g^\mu_\sigma \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi^* + g^\mu_\sigma m^2 \phi^* \phi \,. \tag{211}$$

Verifiquen explícitamente, usando las ecuaciones de movimiento, que el tensor de energía-impulso es una corriente conservada como lo asegura el teorema de Noether, es decir, que

$$\partial_\mu \theta^\mu_\sigma = 0 \,. \tag{212}$$

(b) *Halle la expresión de la energía y el momento como integrales de ϕ y sus derivadas*

A partir de la corriente conservada podemos encontrar cuatro cargas/constantes de movimiento dadas por la ecuación (198)

$$Q_\sigma = \int d^3x j^0_\sigma(x) = \int d^3x \theta^0_\sigma(x) \,. \tag{213}$$

Q^0 es la **energía** o Hamiltoniano (ahora veremos que el integrando es justamente la densidad Hamiltoniana dada por la ecuación (158)) y Q^i ($i = 1, 2, 3$) son las componentes del **momento**. Veamos explícitamente cuánto valen. La energía es

$$\begin{aligned} E \equiv Q^0 &= \int d^3\, x \theta^{00}(x) = && (214) \\ &= \int d^3x \left(\partial^0 \phi \partial^0 \phi^* + \bar{\nabla} \phi \cdot \bar{\nabla} \phi^* + m^2 \phi^* \phi \right) = && (215) \\ &= \int d^3x \left(|\partial^0 \phi|^2 + |\bar{\nabla} \phi|^2 + m^2 |\phi|^2 \right) \,. && (216) \end{aligned}$$

Noten que tanto la energía como la *densidad de energía* θ^{00} son positivas. Esto es algo general de la teoría clásica de campos: la densidad de energía es positiva. Veremos sin embargo que cuando entre en juego la mecánica cuántica, tendremos configuraciones de campos para las cuales la densidad de energía podrá tomar valores negativos en algunas regiones del espacio-tiempo, siempre resultando en una energía positiva. Esto ocurre por ejemplo en el efecto Casimir.

Volvamos al ejercicio para hallar la componente i-ésima del impulso, que resulta

$$P^i \equiv Q^i = \int d^3x\, j^{0i}(x) = \tag{217}$$

$$= \int d^3x\, \left(\partial^0\phi^*\partial^i\phi + \partial^i\phi^*\partial^0\phi\right) . \tag{218}$$

Observaciones:

(a) Ya lo hemos resaltado varias veces, pero no viene mal recordar nuevamente que las corrientes se conservan y las cargas son constante para configuraciones de campo que son soluciones de las ecuaciones de movimiento.

(b) Luego del ejercicio que desarrollamos recién, les resultará sencillo ver que la expresión del tensor de energía-impulso para cualquier teoría de campos descripta por un Lagrangiano $\mathcal{L}$ y campos ϕ_i está dada por

$$\theta^{\mu\nu} = \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial^\nu\phi_i\right] - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\,. \tag{219}$$

(c) Los invitamos a que, usando la expresión anterior, calculen los tensores de energía-impulso del campo de Dirac (Ejercicio 26) y el de Maxwell (Ejercicio 28, caso $m = 0$). Los resultados son

$$\theta^{\mu\nu}_{\text{Dirac}} = i\bar\psi\gamma^\mu\partial^\nu\psi - g^{\mu\nu}\bar\psi\left(i\gamma^\sigma\partial_\sigma - m\right)\psi = i\bar\psi\gamma^\mu\partial^\nu\psi\,, \tag{220}$$

$$\theta^{\mu\nu}_{\text{Maxwell}} = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F^{\mu\alpha}\partial^\nu A_\alpha\,, \tag{221}$$

donde $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$. Noten que para simplificar la expresión de $\theta^{\mu\nu}_{\text{Dirac}}$ usamos que

$$\left(i\gamma^\sigma\partial_\sigma - m\right)\psi = 0$$

si ψ es solución de las ecuaciones de movimiento (que es el caso en el cual estas corrientes se conservan). El Lagrangiano de Dirac $\bar\psi\left(i\gamma^\sigma\partial_\sigma - m\right)\psi$ se anula entonces para soluciones de las ecuaciones de movimiento, por lo que al momento de calcular corrientes conservadas asociadas a simetrías del mismo podemos anular el último término de la ecuación (197).

(d) Muchas veces se nota al tensor de energía-impulso como $T^{\mu\nu}$. Nosotros vamos a reservar la letra T para referirnos al tensor de energía-impulso simetrizado o *tensor de Belinfante*, como se lo conoce usualmente por la persona que sugirió cómo construirlo. Noten que si a cualquier corriente conservada le sumamos una cantidad que tenga cuadridivergencia nula, la cantidad resultante también será una corriente conservada. Podemos usar esta libertad para

construir un tensor de energía-impulso que sea simétrico, el procedimiento es el siguiente. Definimos

$$T_{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial^\sigma \chi_{\sigma\mu\nu}\,, \tag{222}$$

donde $\chi_{\sigma\mu\nu}$ es un tensor arbitrario antisimétrico en sus dos primeros índices, es decir

$$\chi_{\sigma\mu\nu} = -\chi_{\mu\sigma\nu}\,, \tag{223}$$

ya que esta condición nos asegura que tenga divergencia nula y que entonces $T_{\mu\nu}$ también sea una corriente conservada. En efecto

$$\begin{aligned} \partial^\mu T_{\mu\nu} &= \partial^\mu\theta^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\sigma\chi_{\sigma\mu\nu} = & (224)\\ &= \partial^\mu\theta^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^\mu\partial^\sigma\left(\chi_{\sigma\mu\nu} + \chi_{\mu\sigma\nu}\right) = \partial^\mu\theta^{\mu\nu} = & (225)\\ &= 0\,. & (226)\end{aligned}$$

Se verifica además que $T^{\mu\mu}$ y $\theta^{\mu\mu}$ tienen las mismas cargas conservadas. La libertad en la elección de $\chi_{\sigma\mu\nu}$ puede utilizarse para construir un tensor de energía momento simétrico ante el intercambio $\mu \leftrightarrow \nu$. Por ejemplo, para simetrizar el tensor de energía-impulso del campo de Maxwell dado por la ecuación (221) podemos tomar $\chi^{\sigma\mu\nu} = F^{\mu\sigma}A^\nu$ y se obtiene

$$T^{\mu\nu}_{\text{Maxwell}} = \theta^{\mu\nu}_{\text{Maxwell}} + \partial^\sigma F^{\mu\sigma}A^\nu = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha}\,, \tag{227}$$

que como pueden ver es un tensor simétrico (y además, las densidades de energía y momento son $T^{00} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E^2} + \mathbf{B^2}\right)$ y $T^{0i} = (\mathbf{E}\times\mathbf{B})^i$, respectivamente, que ya deben identificar como densidad de energía de los campos y componentes del vector de Poynting).

Quienes hayan cursado relatividad general pueden leer la discusión alrededor de la ecuación (1.48) de las notas de Tong para ver otra forma de obtener el tensor de energía-impulso que automáticamente nos da una forma simétrica. Tener un tensor de energía-impulso simétrico es práctico pero también necesario en algunas circunstancias (por ejemplo, si estamos utilizándolo como fuente de las ecuaciones de Einstein).

3.2.2. Invariancia bajo el grupo de Lorentz

En la clase de teoría ya vieron cuáles son las corrientes conservadas asociada a la invariancia ante el grupo de Lorentz. Para no repetir la misma derivación, veamos el ejercicio análogo para el campo de Dirac.

Ejercicio: (Práctica 2, Ejercicio 27) *Halle la expresión de la carga conservada asociada a la invariancia ante rotaciones en el caso del Lagrangiano de Dirac. Distinga la contribución a*

la carga conservada de la parte orbital e intrínseca (presencia o ausencia respectivamente de derivadas espaciales de los campos).

Recordamos el Lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \,. \tag{228}$$

Como vimos al comienzo del curso, una transformación de Lorentz de las coordenadas se puede escribir como

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \,, \tag{229}$$

donde

$$\Lambda^\mu_\nu = \left(e^{\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}}\right)^\mu_\nu \,. \tag{230}$$

Recuerden que los índices $\alpha\beta$ que acompañan a M se utilizan para etiquetar distintas matrices y no sus componentes. Los índices $\mu\nu$ en la ecuación anterior hacen en cambio referencia a la componente $\mu\nu$ de la matriz exponencial. Una transformación de Lorentz infinitesimal se obtiene considerando que los parámetros $\omega_{\alpha\beta}$ son pequeños, en cuyo caso, expandiendo la exponencial en (230) y quedándonos a primer orden en los parámetros podemos reescribir la transformación (229) como

$$x'^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(M^{\alpha\beta}\right)^\mu_\nu x^\nu \,, \tag{231}$$

donde $\left(M^{\alpha\beta}\right)^\mu_\nu$ significa la componente $\mu\nu$ de la matriz que se etiqueta con los índices $\alpha\beta$ (usamos el paréntesis para diferenciar estos índices).

Ante una transformación de Lorentz, el campo de Dirac transforma con la matriz $S(\Lambda)$ dada por la ecuación (120), es decir

$$\psi(x) \to \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') = S(\Lambda)\psi(x) \,. \tag{232}$$

La diferencia con el caso del campo escalar es que el campo de Dirac tiene es un vector de 4 componentes, la matriz $S(\Lambda)$ lo que hace es implementar la transformación de Lorentz sobre dichas componentes (esto es análogo a lo que hacían para analizar la transformación ante rotaciones del campo eléctrico). Recuerden que las matrices $\Sigma^{\alpha\beta}$ (que aparecen en la definición de $S(\Lambda)$ y las matrices $M^{\alpha\beta}$ (que aparecen en Λ) no son las mismas aunque satisfacen el mismo álgebra (Lorentz), pero los números $\omega^{\alpha\beta}$ sí lo son (por eso los escribimos con la misma la letra). Esto nos asegura que estamos haciendo la misma transformación de Lorentz a las coordenadas y los campos.

La transformación que estamos haciendo es infinitesimal, por lo que reescribimos la ecuación (232) para parámetros ω pequeños

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = \psi(x) + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}\psi(x) \,, \tag{233}$$

que escrita para cada componente ψ^σ del espinor, para llevarlo a la forma dada por la ecuación (195) y que sea sencillo leer $F_{i,a}$, queda

$$\psi'^\sigma(x') = (S(\Lambda))^\sigma_\rho\, \psi^\rho(x) = \psi^\sigma(x) + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)^\sigma_\rho\, \psi^\rho(x)\,. \tag{234}$$

Mirando las ecuaciones (194) y (195), e identificando $a \to \alpha\beta$, $\epsilon^a \to \omega^{\alpha\beta}$, obtenemos

$$A^\mu_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}(M_{\alpha\beta})^\mu_\nu x^\nu\,, \tag{235}$$

$$F_{\sigma,\alpha\beta} = \frac{i}{2}(\Sigma_{\alpha\beta})_{\sigma\rho}\psi^\rho(x)\,. \tag{236}$$

Con esto ya estamos en posición de calcular la corriente conservada asociada a la simetría ante transformaciones de Lorentz. ¿Simetría? Todavía no dijimos que esto efectivamente dejaba invariante la acción, pero sí lo hace. Esto está asociado a que el Lagrangiano de Dirac (228) es una suma de dos términos que son escalares ante transformaciones de Lorentz (puede ser útil que vean el video en el que discutimos las propiedades de transformación de los bilineales de Dirac). En general, como dijimos la clase pasada, vamos a estudiar justamente Lagrangianos que sean escalares de Lorentz.

Les dejamos un par de consejos esenciales para que continúen este cálculo y luego daremos el resultado final:

1. Hay una forma sencilla de escribir las componentes de las matrices $M^{\alpha\beta}$ en términos de la métrica de Minkowski
$$(M^{\alpha\beta})^\mu_\nu = -i\left(g^{\alpha\mu}g^\beta_\nu - g^{\beta\mu}g^\alpha_\nu\right)\,. \tag{237}$$
Pueden verificar explícitamente esta propiedad viendo la forma que tiene cada una de estas 6 matrices en la sección 1.4.3.
2. El último término de la corriente dada por la ecuación (197) donde aparece $\mathcal{L}$ se anula (ya que el Lagrangiano de Dirac se anula cuando los campos son soluciones de las ecuaciones de movimiento, como mencionamos al escribir el tensor de energía-impulso del campo de Dirac).
3. Para llegar a la expresión que vamos a escribir (así pueden comparar) será necesario que utilicen además la expresión del tensor de energía-impulso del campo de Dirac dada por la ecuación (220).

Trabajando un poco (no hay en principio nada esencial que puedan perderse si entendieron todo lo anterior), deberían llegar a ver que las corrientes conservadas son[4]

$$j^\mu_{\alpha\beta} = x_\alpha\theta^\mu_\beta - x_\beta\theta^\mu_\alpha + \bar\psi\gamma^\mu\Sigma_{\alpha\beta}\psi\,. \tag{238}$$

[4]Miren la ecuación (7.4.15) del libro de Weinberg para ver que esta corriente escrita en términos del tensor de energía impulso simetrizado - que allí llaman con la letra θ en lugar de T - toma una forma mucho más sencilla. Este es uno de los motivos prácticos por los cuales se utiliza el tensor simetrizado.

De acuerdo a las convenciones que utilicen (hay muchas definiciones de por medio, que cambian factores y unidades imaginarias) pueden obtener distintos signos y factores, pero deberían llegar a la misma estructura. Noten que al calcular las constantes de movimiento usando la ecuación (198) tenemos

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3x\, j^0_{\alpha\beta}(x) = \tag{239}$$

$$= \int d^3x\, \left(x_\alpha \theta^0_\beta - x_\beta \theta^0_\alpha\right) + \int d^3x\, \bar{\psi}\gamma^0 \Sigma_{\alpha\beta}\psi\,. \tag{240}$$

Este es el **tensor de momento angular generalizado** del campo y está compuesto por dos partes: una parte asociada al momento angular "orbital" (primer sumando en la última línea) y una parte asociada al espín del campo (segundo sumando). Noten que el espín del campo está asociado a la representación del álgebra de Lorentz dada por las matrices Σ. Cuando estudiemos la cuantización del campo de Dirac volveremos a hablar sobre esto.

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- Teorema de Noether: si las transformaciones

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A^\mu_a\,,$$

$$\phi_i(x) \to \phi'_i(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\,,$$

dejan invariante la acción $S = \int d^4x\, \mathcal{L}(x)$ entonces

$$\partial_\mu j^\mu_a = 0$$

sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento, siendo

$$j^\mu_a = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A^\nu_a(x)\partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\right] \right\} - A^\mu_a(x)\mathcal{L}(x)\,.$$

Además, las cargas

$$Q_a = \int d^3x j^0_a(x)\,,$$

son constantes de movimiento.

- Corrientes conservadas por la invariancia ante el grupo de Poincaré:
  - Traslaciones: Tensor de energía-impulso $\theta^{\mu\nu} = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\partial^\nu \phi_i\right] - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$.
  - Lorentz: Tensor de momento angular generalizado.

3.3. Material adicional: Segundo Teorema de Noether

El teorema de Noether que vimos, o Primer Teorema de Noether, dice que por cada transformación que es una simetría (continua) de nuestro sistema podemos encontrar una corriente que se conserva sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento. Hay un segundo teorema de Noether, que da identidades que valen en general, incluso fuera del espectro de soluciones de las ecuaciones de movimiento.

Sin entrar en muchos detalles, el Segundo Teorema de Noether dice que si la acción es invariante ante un grupo de transformaciones locales (es decir, que son parametrizadas por un conjunto de funciones $\lambda(x)$, que dependen del punto del espacio-tiempo), existe entonces un conjunto de identidades entre cantidades construidas a partir de la acción, que se conocen como Identidades de Bianchi. Dichas identidades valen en general, aún si los campos que aparecen en ellas no son soluciones de las ecuaciones de movimiento.

Cuando el grupo es, por ejemplo, el de transformaciones de gauge del electromagnetismo,

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \lambda(x)\,, \tag{241}$$

las identidades de Bianchi son simplemente las ecuaciones de Maxwell.

4. Teorías libres

Hoy vamos a comenzar a estudiar las teorías cuánticas de campos relativistas. Comenzaremos estudiando la cuantización de teorías libres, es decir, de aquellas para las cuales no aparecen términos de interacción (o sea, términos con tres o más campos) en el Lagrangiano. Una de los motivos por los cuales las teorías libres son relevantes es porque se asume que en los procesos de scattering los estados asintóticos pueden ser descriptos por una teoría libre. Más allá de esto, el estudio de las teorías libres nos permitirá entender algunos aspectos de las teorías cuánticas de campos relativistas.

En esta primera parte utilizaremos el método de cuantización canónica. Sobre el final del curso la idea es presentar otro método de cuantización, el de integrales de camino.

Tengan en cuenta que vamos a trabajar en la representación de Heisenberg de la mecánica cuántica: los operadores son los que evolucionan en el tiempo, mientras que los estados están fijos. Si no recuerdan este picture, les recomendamos que realicen un breve repaso antes de leer esta clase.

4.1. Cuantización canónica del campo escalar real

4.1.1. Hamiltoniano

Gran parte de la clase de hoy será un repaso de cosas que han visto en la clase teórica, ya que como muchas cosas se van a repetir en la cuantización del resto de los campos libres, creemos que es bueno que estas temas se afiancen.

Empezamos recordando que el Hamiltoniano del campo escalar real clásico es

$$H = \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{H} = \int d^3\mathbf{x}\, \frac{1}{2}\left[\pi^2 + \left(\bar{\nabla}\phi\right)^2 + m^2\phi^2\right] , \tag{242}$$

donde $\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \partial_0\phi$. Vamos a utilizar negrita para diferenciar al vector tridimensional $\mathbf{x}$ del cuadrivector x.

Es posible generalizar la definición de corchete de Poisson para contemplar el caso en el cual tenemos grados de libertad continuos, para ello hace falta introducir lo que se conoce como derivada funcional. No vamos a dar el detalle en esta sección, pero si les interesa pueden revisar el Apéndice A. Allí damos la definición de la derivada funcional y algunos ejercicios. No es esencial que lo miren, por lo pronto nos alcanza con saber que el corchete de Poisson se puede generalizar para contemplar el caso en el que se tiene un continuo de grados de libertad, y que usando dicha

generalización se tiene

$$\{\phi(x_0,\mathbf{x}),\pi(x_0,\mathbf{y})\} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{243}$$
$$\{\phi(x_0,\mathbf{x}),\phi(x_0,\mathbf{y})\} = 0, \tag{244}$$
$$\{\pi(x_0,\mathbf{x}),\pi(x_0,\mathbf{y})\} = 0. \tag{245}$$

Este es el punto de partida de la cuantización canónica que ya conocen. Vamos a introducir campos cuánticos hermíticos $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$ que cumplan las siguientes relaciones de conmutación a tiempos iguales (tomamos $t_0 \equiv x_0 = 0$)

$$\left[\hat{\phi}(0,\mathbf{x}),\hat{\pi}(0,\mathbf{y})\right] = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{246}$$
$$\left[\hat{\phi}(0,\mathbf{x}),\hat{\phi}(0,\mathbf{y})\right] = 0, \tag{247}$$
$$\left[\hat{\pi}(0,\mathbf{x}),\hat{\pi}(0,\mathbf{y})\right] = 0. \tag{248}$$

Lo que hicimos fue usar la regla de correspondencia $\{\,,\,\} \to \frac{1}{i\hbar}[\,,\,]$, tomando $\hbar = 1$. En este caso, el Hamiltoniano cuántico queda con la misma forma que (242) simplemente reemplazando los campos clásicos por su versiones cuánticas

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{x}\,\frac{1}{2}\left[\hat{\pi}^2 + \left(\bar{\nabla}\hat{\phi}\right)^2 + m^2\hat{\phi}^2\right]. \tag{249}$$

En general, pueden aparecer problemas asociados al orden de los operadores y tendremos que dar una prescripción para construir el Hamiltoniano cuántico (ya veremos algo de esto más adelante y también cómo se visualizan estos problemas de orden desde el formalismo de integrales de camino).

Volvamos al Hamiltoniano. Vamos a ver que hay mucho en común entre el oscilador armónico y esta teoría de campos. Escribimos el desarrollo de los campos en modos de Fourier

$$\hat{\phi}(0,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\mathbf{k}\,\hat{q}_{\mathbf{k}}(0)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{250}$$
$$\hat{\pi}(0,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\mathbf{k}\,\hat{p}_{\mathbf{k}}(0)\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{251}$$

Usando que $\hat{\phi}^\dagger = \hat{\phi}$, $\hat{\pi}^\dagger = \hat{\pi}$ resulta

$$\hat{q}^\dagger_{\mathbf{k}} = \hat{q}_{-\mathbf{k}}, \tag{252}$$
$$\hat{p}^\dagger_{\mathbf{k}} = \hat{p}_{-\mathbf{k}}. \tag{253}$$

Para aligerar la notación omitimos poner explícitamente la parte temporal $t_0 = 0$). Reescribimos el Hamiltoniano (249) en término de estos nuevos operadores

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\left[\hat{\pi}^2 + \left(\bar{\nabla}\hat{\phi}\right)^2 + m^2\hat{\phi}^2\right] = \tag{254}$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}}\left\{\hat{p}_{\mathbf{k}}\hat{p}_{\mathbf{k}'}e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + \hat{q}_{\mathbf{k}}\hat{q}_{\mathbf{k}'}e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}\left[(i\mathbf{k})\cdot(i\mathbf{k}') + m^2\right]\right\} = \tag{255}$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{k}\left(\hat{p}_{\mathbf{k}}\hat{p}^\dagger_{\mathbf{k}} + \omega^2_{\mathbf{k}}\hat{q}_{\mathbf{k}}\hat{q}^\dagger_{\mathbf{k}}\right), \tag{256}$$

donde en la última igualdad usamos las ecuaciones (252) y (253), y definimos $\omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Esta última expresión es muy parecida a la expresión del Hamiltoniano de un conjunto infinito (uno por cada $\mathbf{k}$) de osciladores armónicos. Para ver esto explícitamente, definimos

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \right) , \tag{257}$$

con lo que

$$\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left(\hat{q}^{\dagger}_{\mathbf{k}} - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}} \right) . \tag{258}$$

Les dejamos a ustedes que calculen las siguientes expresiones de los campos a tiempo constante en términos de los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}$. Por ejemplo, el campo ϕ (a tiempo 0) queda

$$\phi = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) . \tag{259}$$

Utilizando las relaciones de conmutación entre $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$, pueden verificar que

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'} \right] = \delta^3 \left(\mathbf{k} - \mathbf{k}' \right) , \tag{260}$$

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'} \right] = 0 , \tag{261}$$

$$\left[\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'} \right] = 0 . \tag{262}$$

Recuerden que estos son los operadores sin evolucionar, a tiempo constante $t_0 = 0$. Noten que estos operadores cumplen relaciones análogas a los operadores de creación y destrucción del oscilador armónico, con la diferencia de que ahora aparece una delta de Dirac en lugar de una delta de Kronecker, lo que está asociado a que ahora los grados de libertad son continuos.

En términos de los operadores de creación y destrucción, el Hamiltoniano queda

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} \left(\hat{p}_{\mathbf{k}} \hat{p}^{\dagger}_{\mathbf{k}} + \omega^2_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}} \hat{q}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \right) = \tag{263}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k}\, \omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \right) = \tag{264}$$

$$= \int d^3\mathbf{k}\, \omega_{\mathbf{k}} \left[\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \delta^3(\mathbf{0}) \right] , \tag{265}$$

donde para escribir la última igualdad utilizamos la ecuación (260).

En resumen: vimos que, reescribiendo los campos en términos de los operadores de creación y destrucción, el Hamiltonano de la teoría se diagonaliza y corresponde al de un conjunto (continuo) de osciladores armónicos, salvo por el término donde aparece la delta de Dirac. Sobre el final de la clase vamos a entender un poco mejor de dónde proviene esta divergencia. Por ahora, vamos a dar una prescripción para librarnos de ella.

4.1.2. Orden normal de operadores

Recordemos la ecuación de Heisenberg, que dicta la evolución temporal de un operador $\hat{A}$

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = i\left[\hat{H}, \hat{A}\right] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\,. \tag{266}$$

La evolucion de $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ viene dada entonces por

$$\frac{d\hat{a}_{\mathbf{k}}}{dt} = i\left[\hat{H}, \hat{a}_{\mathbf{k}}\right] = i\left[\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{k}'\,\omega_{\mathbf{k}'}\left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\hat{a}_{\mathbf{k}'} + \hat{a}_{\mathbf{k}'}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\right], \hat{a}_{\mathbf{k}}\right] = -i\omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}\,, \tag{267}$$

donde en la primera igualdad utilizamos que $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ no depende explícitamente del tiempo y para llegar al resultado final es necesario utilizar las relaciones de conmutación entre $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$. La solución de esta ecuación es

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}(t) = e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}\hat{a}_{\mathbf{k}}\,. \tag{268}$$

Decimos que $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ *evoluciona con frecuencia positiva*. Trabajando en forma análoga, pueden ver que

$$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t) = e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} = e^{-i(-\omega_{\mathbf{k}})t}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\,. \tag{269}$$

Decimos que $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ *evoluciona con frecuencia negativa*. Con estos ingredientes, podemos pasar a dar la definición del orden normal de operadores.

Sean χ_1 χ_2 dos operadores que se pueden escribir como suma de operadores que evolucionan con frecuencia positiva (+) y negativa (-)

$$\chi_1 = \chi_1^+ + \chi_1^-\,, \quad \chi_2 = \chi_2^+ + \chi_2^-\,, \tag{270}$$

entonces, el **orden normal** de la composición $\chi_1\chi_2$ se define como

$$:\chi_1\chi_2: \equiv \chi_1^-\chi_2^- + \chi_1^-\chi_2^+ + \chi_2^-\chi_1^+ + \chi_2^+\chi_1^+\,. \tag{271}$$

En términos simples, el orden normal lleva todos los operados que evolucionan con frecuencia negativa hacia la izquierda.

Ejemplo: Vamos a escribir el integrando de la ecuación (264) en orden normal y veremos cómo esto hace que ya no aparezca la divergencia que veíamos en la ecuación (265). Tenemos

$$:\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}: = :\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}: + :\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}:, = \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} = 2\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}\,, \tag{272}$$

ya que $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ tiene sólo componente de evolución positiva y $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ sólo componente de evolución negativa. Veamos entonces que si en lugar de (264) consideramos tomar orden normal al Hamiltoniano, tenemos

$$\hat{H} =: \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{k}\,\omega_{\mathbf{k}}\left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\right) := \int d^3\mathbf{k}\,\omega_{\mathbf{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\,\hat{a}_{\mathbf{k}}\,, \tag{273}$$

donde la delta de Dirac ya no aparece, pues intencionalmente la hicimos desaparecer. Cuando hablemos del Hamiltoniano del campo escalar en las prácticas vamos a referirnos siempre a su expresión en orden normal (a menos que indiquemos lo contrario). Vamos a ver que esto se corresponderá con pedir que el estado de vacío de nuestra teoría tenga energía cero.

4.1.3. Evolución de los campos

Como ya calculamos la evolución de los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ (ecuaciones (268) y (269), respectivamente), para obtener por ejemplo la evolución de $\hat{\phi}$, podemos insertar estas expresiones en (259) y obtenemos

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right) \tag{274}$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right) = \tag{275}$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{-ik^\mu x_\mu} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}e^{ik^\mu x_\mu}\right) . \tag{276}$$

Les dejamos que hagan lo análogo para hallar la evolución de $\hat{\pi}$. También podríamos haber planteado la ecuación de Heisenberg para $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$ y resolverlas. Vamos a plantearlas porque nos van a permitir ver algo interesante. A partir de la ecuación de Heisenberg (266) verifiquen que resulta

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} = \hat{\pi}\,, \tag{277}$$

$$\frac{d\hat{\pi}}{dt} = \left(\bar{\nabla}^2 - m^2\right)\hat{\phi}\,. \tag{278}$$

Desacoplando las ecuaciones (simplemente derivando la primera respecto al tiempo y reemplazando $\dot{\hat{\pi}}$ por lo que da la segunda de ellas) vemos que $\hat{\phi}$ satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\Box + m^2\right)\hat{\phi} = 0\,. \tag{279}$$

La expresión para la evolución del campo dada por (276) verifica naturalmente esta ecuación porque la evolución temporal es única (fijados los valores de los campos a un tiempo dado). También es posible ver esto explícitamente ya que $\hat{\phi}$ es una combinación lineal de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon $e^{\pm ik^\mu x_\mu}$ (dichas soluciones las vieron en las clases de teoría cuando estudiaron la ecuación de Klein-Gordon).

Los campos cuantizados van a cumplir en general las ecuaciones de movimiento que cumplían sus contrapartes clásicas. Por este motivo, uno sabe que la expresión para la evolución temporal del campo estará dada por una combinación lineal de las soluciones clásicas de la ecuación

asociada. Como el campo cuántico es un operador, los coeficientes de esta combinación lineal serán operadores (en el ejemplo que vimos, estos "coeficientes" son $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$) y sus relaciones de conmutación se pueden obtener a partir de las del campo y su momento conjugado. Esto es lo que se les pide que hagan en el Ejercicio 30.

4.1.4. Espacio de estados

Como dijimos anteriormente, las relaciones de conmutación entre los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ son análogas a las del oscilador armónico. Esto nos sugiere pensar en construir nuestro espacio de Hilbert como un espacio de Fock.

Asumimos que existe un estado $|0\rangle$, que llamamos **vacío**[5], que es aniquilado por todos los operadores de destrucción: $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$ para todo $\mathbf{k}$. . En el siguiente ejercicio vamos a ver cómo construir el espacio de Hilbert a partir de este estado.

Ejercicio: (Práctica 3, Ejercicio 32) *A partir del estado de mínima energía (denominado vacío, por su interpretación como estado desprovisto de partículas, y denotado por $|0\rangle$) puede construirse todo el espacio de Hilbert mediante la acción de los operadores de creación. A fin de ver esta relación:*

(a) *Muestre que un estado de la forma $\prod_{i=1}^n \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle$ es autoestado del Hamiltoniano y el operador momento con autovalores iguales a $\sum_{i=1}^n \omega_{\mathbf{k_i}}$ y $\sum_{i=1}^n \mathbf{k_i}$ respectivamente.*

Vamos a ver que el estado propuesto es autoestado del Hamiltoniano (273). Para ello vamos a usar inducción. Supongamos que lo enunciado vale para cierto n, es decir, que resulta

$$\hat{H}\prod_{i=1}^{n}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n}\omega_{\mathbf{k_i}}\right)\prod_{i=1}^{n}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle \ . \tag{280}$$

Veamos que en ese caso también vale para $n+1$.

$$\begin{aligned}
\hat{H}\prod_{i=1}^{n+1}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle &= \hat{H}a^\dagger_{\mathbf{k_{n+1}}}\prod_{i=1}^{n}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle = && (281)\\
&= \left[\hat{H},\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_{n+1}}}\right]\prod_{i=1}^{n}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_{n+1}}}\hat{H}\prod_{i=1}^{n}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle = && (282)\\
&= \omega_{\mathbf{k_{n+1}}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_{n+1}}}\prod_{i=1}^{n}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_{n+1}}}\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_{\mathbf{k_i}}\right)\prod_{i=1}^{n}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle = && (283)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n+1}\omega_{\mathbf{k_i}}\right)\prod_{i=1}^{n+1}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle \ , && (284)
\end{aligned}$$

[5]En el enfoque axiomático de la teoría de campos, la existencia del vacío es uno de los axiomas. En clases futuras mencionaremos algo más sobre dicho enfoque.

donde usamos que $\left[\hat{H}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\right] = \omega_{\mathbf{k_i}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ (ya lo derivaron cuando revisaban las cuentas de esta clase al escribir la ecuación de movimiento para $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$). Como (280) vale en particular para $n = 1$ (para verlo hay que usar el conmutador $\left[\hat{H}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\right] = \omega_{\mathbf{k_i}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ y notar que $\hat{H}$ aniquila al vacío), por inducción vale para todo entero positivo, como queríamos demostrar.

Les dejamos a ustedes que vean, usando argumentos similares a los de recién, que

$$\hat{P}^i \prod_{i=1}^{n} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}} |0\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{k_i} \right) \prod_{i=1}^{n} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}} |0\rangle \ , \tag{285}$$

donde $\hat{P}^i = \int d^3\mathbf{k}\, \mathbf{k^i}\, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\, \hat{a}_{\mathbf{k}}$ (se obtiene cuantizando la expresión clásica y tomando orden normal).

(b) *Verifique que el estado anterior es autoestado del operador número definido como* $\hat{N} = \int d^3\mathbf{k}\, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\, \hat{a}_{\mathbf{k}}$ *con autovalor* n.

Este ejercicio sale en forma similar al anterior, pero de hecho podemos demostrarlo usando el resultado del inciso anterior para el Hamiltoniano. Ustedes saben que $\omega_{\mathbf{k}}$ es una función precisa y determinada, no está libre. Pero noten que en la resolución del inciso anterior la forma que tenía $\omega_{\mathbf{k}}$ no importaba (al menos no usamos su forma explícita para nada de lo que demostramos). Hacer la cuenta que se pide en este inciso es lo mismo que tomar $\omega_{\mathbf{k}} = 1$ en el resultado del inciso anterior ($\hat{H}$ pasa a ser $\hat{N}$ y $\sum_{i=1}^{n} \omega_{\mathbf{k_i}}$ se convierte en $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$). Remarcamos nuevamente que esto no significa que uno pueda elegir $\omega_{\mathbf{k}}$, que está fijo y es igual a $\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Un estado de la forma $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} |0\rangle$ puede considerarse como el estado de una partícula de cuadrimomento definido $(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$. El espacio de Hilbert de la teoría es un espacio de Fock, una suma directa del espacio generado por el vacío, el de una partícula con momento definido, el de dos partículas, etc.

Noten que, siendo rigurosos, los estados de un número fijo de partículas con momento definido no pueden estar en el espacio de Hilbert, como puede verse al calcular formalmente su norma. Esto es análogo a lo que ocurre en mecánica cuántica no relativista, donde no existen estados de momento definido en el espacio de Hilbert. Sin embargo, es posible suavizar la expresión anterior con una función de los momentos espaciales (que decaiga suficientemente rápido para momentos grandes), para obtener un estado del espacio de Hilbert. En un enfoque más riguroso, el campo se trata entonces como una funcional o distribución, su argumento no es un punto del espacio-tiempo sino una función. Estos detalles los van a estudiar en los ejercicios 33 y 34. Como en mecánica cuántica no relativista, en general podremos manipular estas expresiones sin meternos en problemas, pero tengan presentes las sutilezas necesarias que hay que incorporar para que dichas expresiones tengan sentido.

4.1.5. Estado de vacío. Energía de punto cero

Como asumimos que el estado de vacío es aniquilado por todos los operadores de destrucción, dicho estado es un autoestado del Hamiltoniano (tomado con orden normal) de autovalor cero. Tomar orden normal en el Hamiltoniano resultó entonces en fijar la energía del estado de vacío (o *energía de punto cero*) a cero. Volvamos un poco atrás e intentemos comprender de dónde proviene la delta de Dirac de la ecuación (265).

Si escribimos la densidad de energía T^{00} del campo (el integrando de la ecuación (249)) en términos de $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$, rastreamos que el término de la delta de la ecuación (265) proviene de la contribución a T^{00} que va como $\Lambda \equiv \int d^3\mathbf{k}\,\omega_{\mathbf{k}}/2$. Esto nos da un contribución a $\hat{H}$ de la forma

$$\int d^3\mathbf{x}\,\Lambda = \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k}\,\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} = \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k}\,\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}{2}\,. \tag{286}$$

Esta es la contribución responsable por la aparición de la delta de Dirac en la ecuación (265). Noten que se pueden diferenciar dos tipos de divergencias:

- **Divergencia infrarroja.** Esta divergencia está asociada a que estamos integrando sobre todo el espacio $\mathbb{R}^3$, y como el integrando no tiene dependencia en $\mathbf{x}$, se tiene $\int d^3\mathbf{x} = \infty$. Este tipo de divergencias se llaman infrarrojas porque aparecen para distancia grande (frecuencia pequeña). Noten que esta divergencia no aparece si trabajamos en un volumen finito o si nos interesa la energía por unidad de volumen (en esta misma sección escribimos el origen de esta contribución desde la densidad de energía, donde naturalmnte no hay ninguna integral en el espacio).
- **Divergencia ultravioleta.** Esta divergencia aparece al integrar en los momentos. Noten que para $|\mathbf{k}|$ grande, $\omega_{\mathbf{k}} \sim |\mathbf{k}|$ y por lo tanto la integral diverge. Como diverge para frecuencia alta (pequeña distancia) se la llama ultravioleta. Para altas energías, nuestra teoría podría dejar de ser válida (por ejemplo, si hubiera una discretización del espacio-tiempo) y entonces esta divergencia no aparecería dado que deberíamos integrar los momentos hasta cierto *cut-off* k_{max}.

Como el término infinito en $\hat{H}$ no cambia las ecuaciones de movimiento de ningún operador ya que es una "constante" (por lo que conmuta con todo), vamos a utilizar la prescripción de tomar orden normal para eliminarlo. Como dijimos, esto equivale a fijar que la energía del estado de vacío es cero.

Comentario para los que vieron relatividad general: Recién mencionamos que hay una contribución a la densidad de energía dada por $T^{00} = \Lambda + \dots$. Esta contribución sólo puede provenir de tener un tensor de energía-impulso de la forma $T^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu} + \dots$. Esto nos dice que la energía de punto cero del campo contribuye al tensor de energía impulso en forma de constante

cosmológica. Pensando que hay una escala fundamental (la escala de Planck), que nos fija un cut-off para los momentos, se obtiene un valor finito muy grande para la energía de punto cero del campo. Las mediciones de la constante cosmológica dan sin embargo números muy pequeños (120 órdenes de magnitud menores que los cálculos de la energía de punto cero). No se entiende por qué la energía de punto cero no contribuye o, si lo hace, qué determina que dichas contribuciones se cancelen como para resultar en un valor tan pequeño para la constante cosmológica. Este es el denominado problema de la constante cosmológica.

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- El campo escalar real cuantizado describe un conjunto infinito continuo de osciladores armónicos cuánticos.

- Los campos cuánticos son solución de las ecuaciones diferenciales que cumplen sus análogos clásicos. La expresión genérica de un campo cuántico es entonces una combinación lineal de sus soluciones clásicas y los coeficientes de dicha combinación son operadores. Las relaciones de conmutación entre estos coeficientes se obtienen a partir de las de los campos.

- El ordenamiento normal de operadores consiste en mover hacia la izquierda todos los operadores de creación.

- Algunas expresiones para el campo escalar real:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik^\mu x_\mu} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} e^{ik^\mu x_\mu}\right) , \quad \hat{\pi}(x) = \partial_0 \hat{\phi}(x) .$$

$$\hat{P}^\mu = \int d^3\mathbf{x} \, : \hat{T}^{0\mu}(\mathbf{x}) : = \int d^3\mathbf{k} \, k^\mu \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} ,$$

  Recuerden que $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

- El espacio de Hilbert para el campo real es un espacio de Fock que se construye actuando con los operadores $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ sobre el vacío.

4.1.6. Interpretación de partícula

La clase anterior comentamos que los estados construidos a partir de actuar con n operadores de creación sobre el vacío podían considerarse como estados de n partículas con momentos definidos. Vamos a ver, siguiendo un ejercicio, que los estados $\hat{\phi}(t,\mathbf{x})\,|0\rangle$ describen lo más cercano que uno puede tener a la noción de partícula localizada en un punto del espacio $\mathbf{x}$ a tiempo t.

Ejercicio: (Práctica 3, Ejercicio 35) *El objetivo de este problema es analizar en qué medida la teoría del campo escalar real libre, restringida a los estados de una partícula, puede ser considerada como una generalización relativista de la teoría de Schrödinger, y el operador $\hat{\phi}\,(x)$ puede ser asimilado a un operador de creación de una partícula en un punto del espacio.*

(a) *Mostrar que los vectores $\hat{\phi}\,(t,\boldsymbol{x})$ a tiempo t fijo generan todo el espacio de Hilbert H_1 de una partícula.*

Para simplificar el desarrollo, tomamos el tiempo fijo $t=0$ (el resultado no cambia). Lo que se pretende ver en este inciso es que haciendo combinaciones lineales de los estados dados por $\hat{\phi}\,(0,\mathbf{x})\,|0\rangle$ podemos generarnos un estado de una partícula con una distribución arbitraria de momentos. Es decir, queremos ver que podemos fabricarnos un estado de la forma

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\,c(\mathbf{k})\,|\mathbf{k}\rangle\ , \tag{287}$$

donde $|\mathbf{k}\rangle \equiv \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\,|0\rangle$ y $c(\mathbf{k})$ es una función arbitraria (que es la que determina la distribución de momentos del estado). Mantuvimos los factores $(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}$ al hacer la combinación lineal, pero podrían absorberse en la definición de $c(\mathbf{k})$ (lo que importa es que estamos haciendo una combinación lineal).

Veamos qué forma tiene el estado $\hat{\phi}\,(0,\mathbf{x})\,|0\rangle$. Recordando la expresión (276) para $t=0$, tenemos

$$\hat{\phi}\,(0,\mathbf{x})\,|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,|\mathbf{k}\rangle\ , \tag{288}$$

ya que $\hat{a}_{\mathbf{k}}\,|0\rangle = 0$ y $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\,|0\rangle = |\mathbf{k}\rangle$. Una combinación lineal arbitraria de estos estados, con coeficientes $f(\mathbf{x})$, tendrá entonces la forma

$$\int d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x})\hat{\phi}\,(0,\mathbf{x})\,|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\left[\int d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right]|\mathbf{k}\rangle\ . \tag{289}$$

Para conseguir un estado de la forma (287) necesitamos que el término entre corchetes en (289) sea igual a $c(\mathbf{k})$. Esto se puede conseguir sencillamente tomando a $f(\mathbf{x})$ como la transformada de Fourier de $c(\mathbf{k})$.

Vimos entonces que una combinación lineal de estados $\hat{\phi}\,(0,\mathbf{x})\,|0\rangle$ generan el espacio de Hilbert de una partícula a tiempo t fijo H_1.

(b) *Se define* $|t,\boldsymbol{x}\rangle := \hat{\phi}(t,\boldsymbol{x})|0\rangle$ *(supuestos vectores de una partícula localizados) y la función* $\Psi(t,\boldsymbol{x}) := \langle t,\boldsymbol{x}|\,\Psi\rangle$*, con* $|\Psi\rangle \in H_1$ *(supuesta función de onda de una partícula). Probar que* $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ *satisface la ecuación de Klein-Gordon. Mostrar que además contiene sólo frecuencias positivas, y por ello satisface una ecuación más restrictiva, de primer orden en derivadas temporales*

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) = +\sqrt{m^2-\nabla^2}\Psi(t,\boldsymbol{x})\ . \tag{290}$$

Mostrar que en este caso la corriente conservada de Klein-Gordon da lugar a una probabilidad conservada y positiva, pero la densidad de probabilidad no es definida positiva.

Ver que se satisface la ecuación de Klein Gordon es sencillo ya que el mismo campo $\hat{\phi}$ la satisface. En efecto

$$\begin{aligned}
\left(\Box+m^2\right)\Psi(t,\mathbf{x}) &= \left(\Box+m^2\right)\langle t,\mathbf{x}|\,\Psi\rangle = &(291)\\
&= \left(\Box+m^2\right)\langle 0|\,\hat{\phi}(t,\mathbf{x})\,|\Psi\rangle = &(292)\\
&= \langle 0|\left(\Box+m^2\right)\hat{\phi}(t,\mathbf{x})\,|\Psi\rangle = 0\,, &(293)
\end{aligned}$$

donde usamos que el campo es real (y por lo tanto es igual a su conjugado) y que cumple la ecuación de Klein Gordon (279).

Que $\Psi(t,\mathbf{x})$ contiene sólo frecuencias positivas significa que evoluciona sólo con frecuencias positivas. Esto también es sencillo de ver, ya que los operadores $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ aniquilan al vacío al actuar hacia la izquierda

$$\begin{aligned}
\Psi(t,\mathbf{x}) &= \langle 0|\,\hat{\phi}(t,\mathbf{x})\,|\Psi\rangle = &(294)\\
&= \int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\langle 0|\left(\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}+\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right)|\Psi\rangle = &(295)\\
&= \int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\langle 0|\,\hat{a}_{\mathbf{k}}\,|\Psi\rangle\,e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}\,. &(296)
\end{aligned}$$

Noten que el operador $\sqrt{m^2-\nabla^2}$ está bien definido ya que $(m^2-\nabla^2)$ es positivo, como pueden ver calculando

$$(m^2-\nabla^2)\Psi(t,\mathbf{x}) = (m^2+\mathbf{k}^2)\Psi(t,\mathbf{x}) = \omega^2_{\mathbf{k}}\Psi(t,\mathbf{x})\ . \tag{297}$$

Veamos ahora que se cumple la ecuación (290). Para ello calculamos

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\mathbf{x}) = i\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\langle 0|\,\hat{a}_{\mathbf{k}}\,|\Psi\rangle\,e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} = \omega_{\mathbf{k}}\Psi(t,\mathbf{x})\ , \tag{298}$$

y mirando (297) vemos que resulta

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,\mathbf{x}) = +\sqrt{m^2-\nabla^2}\Psi(t,\mathbf{x})\ . \tag{299}$$

Les dejamos a ustedes que verifiquen que la corriente conservada de Klein-Gordon da lugar a una probabilidad conservada y positiva, pero la densidad de probabilidad no es definida positiva.

(c) *Mostrar que, sin embargo,* $\langle t, \boldsymbol{x}|\ t, \boldsymbol{y}\rangle$ *no es proporcional a la delta de Dirac y que los estados* $|t, \boldsymbol{x}\rangle$ *están localizados en un tamaño típico* $\Delta x \sim 1/m$ *(al restaurar unidades, esta es longitud de Compton* $\frac{\hbar}{mc}$*).*

En mecánica cuántica no relativista, los estados de una partícula localizada en puntos distintos del espacio son ortogonales. Veamos que esto no sucede para los estados $|t, \mathbf{x}\rangle$. Calculamos

$$\begin{aligned}
\langle t, \mathbf{x}|\ t, \mathbf{y}\rangle &= \langle 0|\, \hat{\phi}\,(t, \mathbf{x})\, \hat{\phi}\,(t, \mathbf{y})\, |0\rangle = && (300)\\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y})} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\, \langle 0|\, \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}\, |0\rangle = && (301)\\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y})} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\, \delta^3\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right) = && (302)\\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}\, e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = && (303)\\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}\,. && (304)
\end{aligned}$$

Esta integral puede trabajarse un poco más pasando a coordenadas esféricas (k, φ, θ), tomando el ángulo azimutal θ como el ángulo entre los vectores $\mathbf{k}$ y $(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. Definiendo $u \equiv |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, resulta

$$\begin{aligned}
\langle t, \mathbf{x}|\ t, \mathbf{y}\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} = && (305)\\
&= \frac{1}{2\,(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} dk\, k^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \frac{e^{i\,k\,u\,\cos\theta}}{\sqrt{k^2+m^2}} = && (306)\\
&= \frac{1}{2\,(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk\, k^2}{\sqrt{k^2+m^2}} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) e^{i\,k\,u\,\cos\theta} = && (307)\\
&= \frac{1}{2\,(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk\, k^2}{\sqrt{k^2+m^2}} \frac{2\sin(ku)}{ku} = && (308)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dk \frac{k\sin(ku)}{u\sqrt{k^2+m^2}}\,. && (309)
\end{aligned}$$

La integral anterior puede escribirse en términos de funciones de Bessel modificadas. Para llevarla a una representación integral conocida de estas funciones hay que hacer el cambio de variables $k = m\sinh(\alpha)$ (verifiquen que con ese cambio de variables resulta $dk = \sqrt{k^2+m^2}d\alpha$)

$$\begin{aligned}
\langle t, \mathbf{x}|\ t, \mathbf{y}\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dk \frac{k\sin(ku)}{u\sqrt{k^2+m^2}} = && (310)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m}{u} \int_0^{+\infty} d\alpha\, \sinh(\alpha) \sin\left[mu\sinh(\alpha)\right]\,. && (311)
\end{aligned}$$

La integral que aparece en la expresión anterior es una expresión integral de la función de Bessel $K_1(mu)$ (ver por ejemplo la ecuación 10.32.7en https://dlmf.nist.gov/10.32). Recordando que $u = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ nos queda finalmente

$$\langle t, \mathbf{x}|\ t, \mathbf{y}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} K_1\left(m|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\right)\,. \qquad (312)$$

La función de Bessel K_1 diverge en el origen, tiende a cero en $+\infty$ y es decreciente para todo real positivo, pero no se anula si $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \neq 0$, por más pequeña que sea esta diferencia. En particular, no se anula para $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \sim 1/m$, que restaurando unidades es la longitud de Compton $\hbar/(mc)$. Esto nos dice que los estados no son ortogonales (algo que sí sucede en el límite no relativista, si mandamos c a infinito).

El resultado de este ejercicio ejemplifica la dificultad de definir la noción de **localización** en una teoría relativista.

En el ejercicio que vimos recién fue relevante calcular un valor de expectación en el vacío de un producto de dos campos. Estos objetos son muy importantes en la teoría de campos. A continuación, vamos a estudiar algunas de sus propiedades.

4.1.7. Funciones de n puntos

Una **función de n puntos** (o **función de correlación**, o simplemente **correlador**) es un valor de expectación en vacío de n campos

$$C(x_1,\, x_2\,, ..., x_n) = \langle 0|\, \hat{\phi}\,(x_1)\, \hat{\phi}\,(x_2)\, \ldots \hat{\phi}\,(x_n)\, |0\rangle\ . \tag{313}$$

Estas funciones son muy importantes ya que se relacionan con otros objetos centrales de la teoría, como los propagadores. Además, están conectadas con las amplitudes de scattering a través de la fórmula de reducción LSZ, como veremos más adelante. Desde el punto de vista axiomático, dar el conjunto completo de las funciones de correlación determina completamente la teoría de campos (esto se conoce como Teorema de Reconstrucción de Wightman).

Al final del ejercicio que hicimos en la sección anterior vimos un ejemplo de una función de correlación (la función de 2 puntos) a tiempos iguales

$$\langle 0|\, \hat{\phi}\,(t,\mathbf{x})\, \hat{\phi}\,(t,\mathbf{y})\, |0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} K_1\left(m|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\right)\ . \tag{314}$$

Noten que si en la expresión anterior toman el límite de masa cero (busquen la expansión de K_1), obtienen que la función de dos puntos para el campo escalar no masivo decae como $1/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2$. Cuando la masa es distinta de cero, para distancias grandes K_1 tiene un decaimiento exponencial, con lo que las correlaciones decaen más rápidamente cuando los campos son masivos.

Otra cosa que pueden notar de la expresión (314) es que no depende de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ por separado, sino que es función del módulo de su diferencia. No sólo de su diferencia, lo que podría hacernos sospechar que es invariante ante traslaciones, sino también de su módulo, lo que nos hace intuir que también es invariante ante rotaciones. De los boosts podemos decir poco porque estamos mirando un ejemplo de una función de dos puntos a tiempos iguales, pero también será invariante

ante boosts. En general, *las funciones de correlación son invariantes ante transformaciones del grupo de Poincaré.*

La demostración de la invariancia ante Poincare de los correladores la harán ustedes en el Ejercicio 37. Noten que utilizando dicha invariancia pueden obtener un correlador para dos puntos arbitrarios separados espacialmente a partir de uno a tiempos iguales. Veamos esto para el correlador de dos puntos. Usamos una tilde para referirnos a los cuadrivectores para los cuales $t = 0$. Por ejemplo $(\tilde{x}^\mu)$ es el cuadrivector de componentes $(0, \mathbf{x})$. En términos de cuadrivectores, la función de dos puntos (314) se escribe como

$$\langle 0|\,\hat{\phi}\,(t,\mathbf{x})\,\hat{\phi}\,(t,\mathbf{y})\,|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m}{\sqrt{(\tilde{x}^\mu-\tilde{y}^\mu)(\tilde{x}_\mu-\tilde{y}_\mu)}}K_1\left(m\sqrt{(\tilde{x}^\mu-\tilde{y}^\mu)(\tilde{x}_\mu-\tilde{y}_\mu)}\right). \qquad (315)$$

Noten que la cantidad que aparece en la raíz en un escalar (de Poincaré), por lo que no cambia si hacemos transformaciones de Poincaré globales. El grupo de Poincaré es un subgrupo del grupo conforme (ver sección 1.6), que deja invariantes los conos de luz. Por lo tanto, toda tranformación global del grupo conforme no puede cambiar el tipo de separación entre dos puntos: dos puntos que estaban espacialmente separados, siguen estando espacialmente separados luego de que se aplique sobre ambos la misma tranformación conforme. Más aún, para todo par de puntos x e y espacialmente separados existe una transformación de Poincaré que los lleva a tiempos iguales. Esto es sencillo de ver y se esquematiza en la Figura 2. Allí, dados x e y espacialmente separados, hacemos una traslación que lleve x al origen (y por supuesto, traslada a y en la misma magnitud). A los transformados por dicha traslación los llamamos x' e y'. Luego, si hacemos un boost, x' no cambia pero y' se mueve por una hipérbola; basta nomás con encontrar el parámetro de boost que lleva a y' a tener tiempo cero. Los cuadrivectores transformados por este boost tienen la misma componente temporal. Como las transformaciones de Poincaré son invertibles también se puede hacer el proceso reverso.

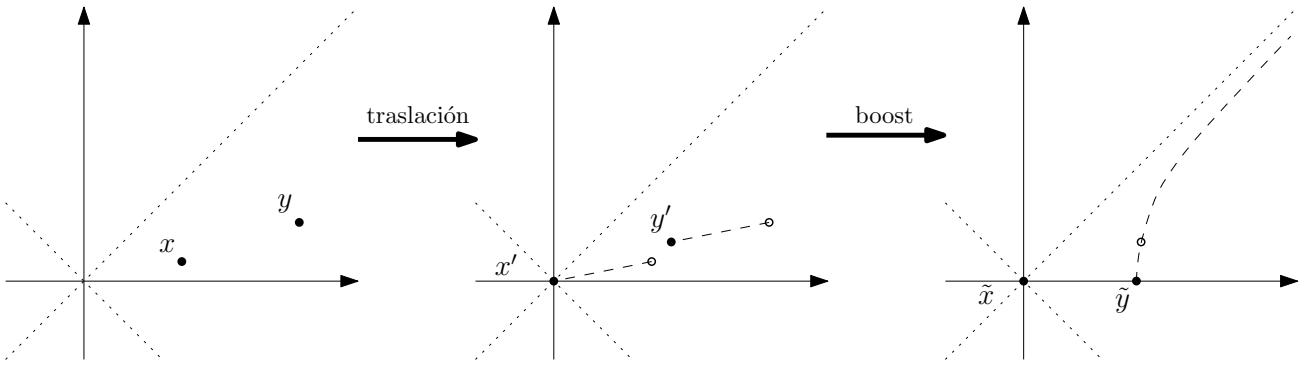

Fig. 2: **Transformación de Poincaré para llevar puntos con $(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2 < 0$ a t=0.** Los ejes verticales son el tiempo y los horizontales una coordenada espacial. Primero se realiza una traslación rígida para llevar uno de los puntos al origen y posteriormente se hace un boost (que no mueve el punto en el origen) hasta llevar el segundo punto a $t = 0$.

Por lo tanto, volviendo a la función de dos puntos, como $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$ están espacialmente separados, resulta

$$\langle 0|\,\hat{\phi}\,(x)\,\hat{\phi}\,(y)\,|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m}{\sqrt{(x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu)}}K_1\left(m\sqrt{(x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu)}\right)\,, \tag{316}$$

En el Ejercicio 36(b) (el inciso (a) sale de lo que hicimos en esta clase) les pedimos que vean cómo queda la función de dos puntos para puntos temporalmente separados.

4.1.8. Microcausalidad

Al cuantizar nuestra teoría partimos de las relaciones de conmutación entre los campos al mismo tiempo. En el siguiente ejercicio vamos a ver algunos aspectos del conmutador para puntos genéricos.

Ejercicio: (Práctica 3, Ejercicio 38) *Considere un campo de Klein Gordon neutro. Muestre que el conmutador* $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$ *es un número complejo (es decir, un múltiplo del operador identidad) y por tanto es igual a su valor de expectación en vacío (o cualquier estado). A partir de esta observación y los resultados anteriores, muestre que el conmutador es cero para* x *e* y *espacialmente separados, es decir para* $(x-y)^2 < 0$*. Diga por qué no puede decir lo mismo cuando están temporalmente separados.*

Planteamos el conmutador

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\int \frac{d^3\mathbf{k'}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k'}}}\left(e^{-ikx}e^{ik'y}\left[\hat{a}_\mathbf{k}, \hat{a}^\dagger_\mathbf{k'}\right] + e^{ikx}e^{-ik'y}\left[\hat{a}^\dagger_\mathbf{k}, \hat{a}_\mathbf{k'}\right]\right) \tag{317}$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}\left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}\right)\,. \tag{318}$$

Antes de seguir queremos hacerles notar que la medida de integración $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}$ es invariante de Lorentz. Noten que la misma puede reescribirse como

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0)\,. \tag{319}$$

Como el signo de k^0 es un invariante de Lorentz, la relación anterior nos muestra que $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}$ es invariante de Lorentz. Noten que el resto de lo que aparece en la ecuación (318) es también invariante de Lorentz, y los puntos x e y sólo aparecen a través de la diferencia $(x-y)$ el objeto $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$ es un invariante de Poincaré. Se suele introducir la función de Pauli-Jordan Δ

$$\Delta(u) \equiv \frac{1}{i}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}\left(e^{-iku} - e^{iku}\right)\,, \tag{320}$$

y entonces

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} \left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}\right) = \tag{321}$$

$$= i\Delta(x-y)\,. \tag{322}$$

Noten que, como se pedía en el ejercicio, el conmutador es un número ($i\Delta(x-y)$), o sea un múltiplo de la identidad. Esto no es general y sólo sucede en las teorías libres.

Hoy no vamos a calcular explícitamente la función de Pauli-Jordan, pero sí vamos a hacer algunas observaciones.

Observaciones:

(a) Como el conmutador es antisimétrico, se tiene

$$\Delta(x-y) = -\Delta(y-x)\,. \tag{323}$$

(b) Por las relaciones de conmutación a tiempos iguales entre los campos se tiene

$$\Delta((0,\mathbf{x})) = 0\,. \tag{324}$$

(c) Por las relaciones de conmutación a tiempos iguales entre el campo y el momento se tiene

$$i\delta^3(\mathbf{x}) = [\hat{\phi}(0,\mathbf{x}), \hat{\pi}(0,\mathbf{0})] = i\,\frac{\partial}{\partial t}\Delta((t,\mathbf{x}))\Big|_{t=0} \implies \frac{\partial}{\partial t}\Delta((t,\mathbf{x}))\Big|_{t=0} = \delta^3(\mathbf{x})\,. \tag{325}$$

(d) Δ satisface la ecuación de Klein Gordon

$$\left(\Box + m^2\right)\Delta(x) = \frac{1}{i}\left(\Box + m^2\right)[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(0)] = \frac{1}{i}[\left(\Box + m^2\right)\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(0)] = 0\,. \tag{326}$$

(e) Las propiedades (b), (c) y (d) definen unívocamente a Δ (ya que Δ es solución de una ecuación diferencial hiperbólica de orden 2, con condiciones iniciales sobre $\Delta(x)$ y $\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta(x)$ en una superficie espacial (en este caso, en la superficie espacial $x^0 = 0$).

(f) $\Delta(x) = 0$ si $x^2 = x^\mu x_\mu < 0$ (separación espacial). Esto sale del hecho de tomar valor de expectación en el vacío a $\Delta(x)$ y, recordando que es un conmutador de dos campos, ver que es una diferencia entre dos funciones de dos puntos que dependen sólo de x^2. Esto demuestra lo último que se pide en el ejercicio, es decir, que

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = 0\,, \quad \text{si } (x-y)^2 < 0\,. \tag{327}$$

No podemos usar el mismo argumento para decir algo en el caso en el que los puntos están temporalmente separados por el mismo motivo que ya explicamos al hablar de por qué no podíamos hacerlo con la función de dos puntos.

La relación (327) se conoce como **condición de microcausalidad** y lo que garantiza es que si dos observadores están espacialmente separados, las acciones que uno de ellos realice no afectan los valores de expectación de las mediciones del otro observador. La microcausalidad vale incluso si la teoría no es libre. De hecho, esta condición es otro de los axiomas de Wightman que se utilizan para definir lo que es una teoría de campos. Veremos que para el campo de Dirac la microcausalidad se expresa usando anticonmutadores.

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- Se suele decir que al actuar $\hat{\phi}(x)$ sobre el vacío crea una partícula en el punto x, pero hay que recordar que el estado no está completamente localizado.

- Las funciones de n puntos

$$C(x_1,\, x_2\,, ..., x_n) = \langle 0|\, \hat{\phi}\,(x_1)\, \hat{\phi}\,(x_2)\, \ldots \hat{\phi}\,(x_n)\, |0\rangle\ ,$$

son invariantes de Poincaré. Usando la invariacia ante traslaciones podemos fijar $x_n = 0$ y notar que los correladores dependen de $n-1$ puntos.

- Medida de integración invariante de Lorentz: $\dfrac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}$.

- **Microcausalidad**

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = 0\,, \quad \text{si } (x-y)^2 < 0\,.$$

Vale en general (no sólo en teorías libres). Para campos de espín semientero se expresará usando el anticonmutador.

4.1.9. Simetrías

Vamos a empezar estudiando cuál es la relación entre las simetrías que hemos visto para la teoría clásica y la teoría cuántica. En la teoría clásica, dada una corriente conservada

$$j_a^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)}\left[A_a^\nu \partial_\nu \phi_i - F_{i,a}\right] - A_a^\nu \mathcal{L},$$

podemos usar su constante de movimiento $Q_a = \int \sum_i \pi_i \left[A_a^\nu \partial_\nu \phi_i - F_{i,a}\right] - A_a^\nu \mathcal{L}\, d^3\mathbf{x}$ para generar una transformación canónica (de simetría) de parámetro ϵ^a sobre cualquier función $f(\phi, \pi)$ en el espacio de fase como

$$f'(\phi, \pi) = e^{-\epsilon^a G(\phi,\pi)} f(\phi, \pi) \tag{328}$$

donde definimos el operador diferencial

$$G(\phi, \pi)[\ \cdot\ ] = \{Q_a,\ \cdot\ \} = \int \sum_i \left[\frac{\delta Q_a}{\delta \phi_i(x)} \frac{\delta\ \cdot}{\delta \pi_i(x)} - \frac{\delta Q_a}{\delta \pi_i(x)} \frac{\delta\ \cdot}{\delta \phi_i(x)}\right] dx. \tag{329}$$

(Este es el corchete de Poisson que habíamos definido en el apéndice sobre derivadas funcionales ec. (373).) Veamos que en particular recuperamos la transformación infinitesimal de las variables

$$\phi_i'(x) = \phi_i(x) + \delta\phi_i = \phi_i - \epsilon^a \{Q_a, \phi_i\} = \phi_i + \epsilon^a \left[A_a^\nu \partial_\nu \phi_i - F_{i,a}\right] \tag{330}$$

Mientras que el lagrangiano $\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, x)$ transforma según

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L} &= \mathcal{L} + \sum_i \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_i\right)}\delta\left(\partial_\mu \phi_i\right)\right\} \\
&= \mathcal{L} + \sum_i \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}(\epsilon^a \left[A_a^\nu \partial_\nu \phi_i - F_{i,a}\right]) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\partial_\mu(\epsilon^a \left[A_a^\nu \partial_\nu \phi_i - F_{i,a}\right])\right\} = \\
&= \mathcal{L}(x) + \sum_i \left\{\epsilon^a \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\left[A_a^\nu \partial_\nu \phi_i - F_{i,a}\right]\right) + \epsilon^a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\right)\right]\left[A_a^\nu \partial_\nu \phi_i - F_{i,a}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{331}$$

el último término se anula por las ecuaciones de Euler-Lagrange y nos queda

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \epsilon^a \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\left[A_a^\nu \partial_\nu \phi_i - F_{i,a}\right]\right) = \mathcal{L}(x) + \epsilon^a \partial_\mu (A_a^\mu \mathcal{L}) \tag{332}$$

usando $\partial_\mu j_a^\mu = 0$. Así recuperamos la transformación original de las variables a partir del generador.

Para ver qué tiene que ver esto con la teoría cuántica basta escribir explícitamente la exponencial en (328)

$$f'(\phi, \pi) = f(\phi, \pi) + \frac{(-\epsilon^a)}{1!}\{Q_a, f(\phi, \pi)\} + \frac{(-\epsilon^a)^2}{2!}\{Q_a, \{Q_a, f(\phi, \pi)\}\} + \ldots \tag{333}$$

y haciendo el reemplazo

$$\begin{aligned} \phi &\to \hat{\phi} \\ \pi &\to \hat{\pi} \\ f &\to \hat{f} \\ Q_a &\to \hat{Q}_a \\ \{,\} &\to \tfrac{1}{i}\,[,] \end{aligned} \tag{334}$$

obtenemos

$$\hat{f}'(\hat{\phi},\hat{\pi}) = \hat{f}(\hat{\phi},\hat{\pi}) - \frac{(-i\epsilon^a)}{1!}\left[\hat{Q}_a, \hat{f}(\hat{\phi},\hat{\pi})\right] + \frac{(-i\epsilon^a)^2}{2!}\left[\hat{Q}_a, \left[\hat{Q}_a, \hat{f}(\hat{\phi},\hat{\pi})\right]\right] + ... \tag{335}$$

que podemos reconocer como

$$\hat{f}'(\hat{\phi},\hat{\pi}) = e^{i\epsilon^a \hat{Q}_a} \hat{f} e^{-i\epsilon^a \hat{Q}_a} = U^\dagger(\epsilon^a)\hat{f}U(\epsilon^a). \tag{336}$$

Así toda transformación canónica continua en el espacio de fases de la teoría clásica genera una transfomación unitaria continua en el espacio de Hilbert de la teoría cuántica. En particular si dicha transformación es una simetría continua entonces el generador es su carga conservada (Advertencia: Esto es en realidad lo que uno quisiera que pase pero podría no ocurrir. Una razón es que nada nos garantiza que al cuantizar canónicamente la carga clásica obtengamos un operador $\hat{Q}$ autoadjunto. En los casos que consideraremos pueden chequear que esto efectivamente sucede).

Por ejemplo, para el campo escalar real la traslación de parámetro a^μ es una transformación de simetría de la teoría clásica cuya carga conservada es el momento P^μ, con lo cual usando (336) tenemos

$$\hat{\phi}'(x^\mu) = \hat{\phi}(x^\mu + a^\mu) = e^{ia_\mu \hat{P}^\mu} \hat{\phi}(x^\mu) e^{-ia_\mu \hat{P}^\mu}. \tag{337}$$

Para ver que el vacío $|0\rangle$ definido como

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0, \quad \forall \hat{a}_{\mathbf{p}} \tag{338}$$

es invariante ante una transformación del grupo de Poincaré (Λ, a) debemos ver que

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}|0\rangle' = 0, \quad \forall \hat{a}_{\mathbf{p}} \tag{339}$$

siendo $|0\rangle' = U(\Lambda, a)|0\rangle$ (esto junto con la unicidad del vacío le permitirá a uno concluir que $|0\rangle' = |0\rangle$). Para ello basta escribir

$$U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{a}_{\mathbf{p}}|0\rangle' = U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{a}_{\mathbf{p}} U(\Lambda, a)\,|0\rangle = \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{p}}}} e^{-i(\Lambda^{-1}p)a} \hat{a}_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}}|0\rangle = 0, \tag{340}$$

donde usamos cómo transforman los operadores de destrucción. Eso se puede ver de la siguiente manera

$$\hat{\phi}(\Lambda x^\mu + a^\mu) = U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{\phi}(x^\mu) U(\Lambda, a) \tag{341}$$

$$\int \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ip(\Lambda x + a)} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ip(\Lambda x + a)} d^3\mathbf{p} = \int U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{a}_{\mathbf{p}} U(\Lambda, a)\, e^{-ipx} + U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} U(\Lambda, a)\, e^{ipx} d^3\mathbf{p} \tag{342}$$

y haciendo el cambio de variable $\Lambda p = \tilde{p}$ tenemos

$$\int \left[\hat{a}_{\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{p}}} e^{i\tilde{p}x} e^{-i\Lambda^{-1}\tilde{p}a} + \hat{a}^\dagger_{\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{p}}} e^{-i\tilde{p}x} e^{i\Lambda^{-1}\tilde{p}a}\right] \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3 2\omega_{\tilde{\mathbf{p}}}}$$

$$= \int \left[U^\dagger(\Lambda,a)\,\hat{a}_{\mathbf{p}} U(\Lambda,a)\, e^{-ipx} + U^\dagger(\Lambda,a)\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} U(\Lambda,a)\, e^{ipx}\right] \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \tag{343}$$

(usamos la invariancia de la medida de integración) y podemos concluir que

$$U^\dagger(\Lambda,a)\,\hat{a}_{\mathbf{p}} U(\Lambda,a) = \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{p}}}}\hat{a}_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}} e^{-i(\Lambda^{-1}p)a}. \tag{344}$$

En la guía se propone mostrar la invariancia del vacío por otro camino, para lo cual les será esencial usar la hipótesis de que $\hat{Q}$ es un operador hermítico. La ventaja de este método es que uno puede decir más y mostrar que $U^\dagger(\Lambda,a)|\mathbf{p}\rangle' = |\Lambda^{-1}\mathbf{p}\rangle$.

4.2. Cuantización del campo escalar complejo

Recordemos que el lagrangiano del campo escalar complejo viene dado por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

que tiene dos grados de libertad que podemos tomar como ϕ y ϕ^*que satisfacen las ecuaciones de movimiento

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^* = 0$$

cuyas soluciones cuánticas podemos expandir en ondas planas como

$$\hat{\phi}(x) = \int \left[\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx}\right] \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x) = \int \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} + \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-ipx}\right] \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}$$

cuyos momentos canónico conjugados son

$$\hat{\pi}(x) = \partial_0 \hat{\phi}^\dagger(x) = \int \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} - \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-ipx}\right] i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}$$

$$\hat{\pi}^\dagger(x) = \int \left[\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{-ipx}\right] i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}.$$

Imponiendo las siguientes relaciones de conmutación sobre los campos y los momentos

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta(x-y)$$

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\pi(x), \pi(y)] = 0$$

podemos deducir las siguientes relaciones de conmutación para los operadores de creación y destrucción

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\right] = \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\right] = 0.$$

Con estas relaciones asociamos entonces a $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}$ y $\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{p}}$ con operadores que crean dos tipos distintos de partículas.

Ejercicio: *Para el caso del campo escalar complejo, hay una cantidad conservada asociada a la invariancia ante multiplicar el campo por una fase. Halle la expresión de esta a nivel cuántico y muestre que este operador cuenta el número de partículas creadas por $a^{\dagger}$ menos el numero de partículas creadas por $b^{\dagger}$.*

Como dijimos antes el campo escalar complejo, de la misma forma que el campo escalar real, será invariante antes transformaciones globales del grupo de Poincaré. Previamente habíamos visto que además el campo tiene una simetría global continua ante U(1) que corresponde a multiplicar el campo por una fase. Dicha simetría está asociada a través del teorema de Noether con la corriente

$$\hat{j}^{\mu} = -i\left[\left(\partial^{\mu}\hat{\phi}^{\dagger}\right)\hat{\phi} - \hat{\phi}^{\dagger}\left(\partial^{\mu}\hat{\phi}\right)\right] \tag{345}$$

cuya carga conservada viene dada por

$$\hat{Q} = \int :\hat{j}^0: d^3\mathbf{x} = -\int i :\left[\hat{\phi}\hat{\pi} - \hat{\phi}^{\dagger}\hat{\pi}^{\dagger}\right]: d^3\mathbf{x} \tag{346}$$

donde tomamos orden normal para que su valor de expectación en el vacío sea nulo. Noten que como adelantamos este operador ES autoadjunto y por lo tanto estará asociado a un observable de la teoría. Calculemos entonces

$$\int :\hat{\phi}\hat{\pi}: d^3\mathbf{x} = \int\int\int :\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}e^{-ipx} + \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{p}}e^{ipx}\right]\left[\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}'}e^{ip'x} - \hat{b}_{\mathbf{p}'}e^{-ip'x}\right]: i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{2}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \tag{347}$$

$$= \frac{i}{2(2\pi)^3}\int\int\int :\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}'}e^{i(p'-p)x} + \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}'}e^{i(p'+p)x} - \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}'}e^{-i(p'+p)x} - \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}'}e^{-i(p'-p)x}\right]: \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}}d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'d^3\mathbf{x} \tag{348}$$

$$= \frac{i}{2}\int :\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}} + \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{p}} - \hat{a}_{-\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}\right]: d^3\mathbf{p} \tag{349}$$

$$= \frac{i}{2}\int \left[\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{p}} - \hat{a}_{-\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}\right] d^3\mathbf{p} \tag{350}$$

para el siguiente término podemos usar que $\left(:\hat{\phi}\hat{\pi}:\right)^{\dagger} =: \hat{\pi}^{\dagger}\hat{\phi}^{\dagger} :=: \hat{\phi}^{\dagger}\hat{\pi}^{\dagger} :$ (todo lo que está adentro de un orden normal lo podemos conmutar como queramos dado que al final igualmente

será reacomodador por el orden normal). Entonces

$$-\int :\hat{\phi}^\dagger\hat{\pi}^\dagger: d^3\mathbf{x} = -\left(\int :\hat{\phi}\hat{\pi}: d^3\mathbf{x}\right)^\dagger = \frac{i}{2}\int \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{-\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}\right] d^3\mathbf{p} \tag{351}$$

Sumando esto a lo anterior tenemos

$$\hat{Q} = \int :\hat{j}^0: d^3x = -\int \left[\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\right] d^3\mathbf{p} \tag{352}$$

$$\hat{Q} = \hat{N}^a - \hat{N}^b$$

es decir que la diferencia entre el número de partículas de tipo b y a debe conservarse. Si les asignamos carga positiva a las partículas de tipo a y negativa a las de tipo b esto es lo mismo que decir que la carga total se conserva. Vemos entonces que tenemos dos tipos de partículas de la misma masa y carga opuesta, decimos entonces que el operador $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}$ crea partículas con carga positiva y momento $\mathbf{p}$ mientras que $\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}$ crea anti-partículas de carga opuesta y momento $\mathbf{p}$.

4.2.1. Propagador

Hasta aquí hemos obtenido y estudiado las ecuaciones diferenciales para nuevos campos desde el punto de vista clásico y cuántico. Surgen entonces dos preguntas de uno y otro lado. Desde el punto de vista clásico sabemos que la ecuación de Klein-Gordon es una generalización masiva de la ecuación de ondas, cabe entonces preguntarse dadas ciertas condiciones iniciales cómo evolucionan las soluciones (para el caso de la ecuación de ondas unidimensional la respuesta venía dada por la fórmula de D'Alambert) y cómo se modican por la presencia de un término de fuente (comparándo lo que hemos hecho con el electromagnetismo $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$ solo hemos considerado hasta ahora $\rho = 0$). Desde el punto de vista cuántico la pregunta es cómo interactúan estos campos con otros y dada una interacción particular cómo podemos calcular resultados observables, como por ejemplo secciones de scattering. Como habrán visto previamente en otras materias la respuesta a la primera pregunta es la función de Green. Veremos más adelante que sorprendentemente la respuesta la segunda pregunta será también una función de Green que llamamos el propagador de Feynman y estudiaremos en el siguiente ejercicio.

Ejercicio: Propagador del campo escalar neutro o complejo (Práctica 3, Ejercicio 43)

(a) *Exprese*

$$D(x-y) \equiv \langle 0|T(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y))|0\rangle$$

como una suma de dos funciones de dos puntos pesadas adecuadamente (en el caso del campo neutro, la expresión final es la misma).

Por definición de T tenemos que

$$D(x-y) = \begin{cases} \left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) \right\rangle & \text{si } x^0 > y^0 \\ \left\langle \hat{\phi}^\dagger(y)\hat{\phi}(x) \right\rangle & \text{si } x^0 < y^0 \end{cases} . \tag{353}$$

Esta expresión se puede reescribir usando funciones de heaviside como

$$D(x-y) = \left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) \right\rangle \theta(x^0-y^0) + \left\langle \hat{\phi}^\dagger(y)\hat{\phi}(x) \right\rangle \theta(y^0-x^0) \tag{354}$$

que es una suma pesada de dos funciones de dos puntos.

(b) *Exprese el resultado como la transformada de Fourier de*

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\epsilon \to 0)$$

Muestre esto mediante integrales en el plano complejo, en caminos que esquiven los polos dados por ϵ, ubicados en distintos lugares segun sea ϵ positivo o negativo.

Comencemos calculando explícitamente

$$\left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) \right\rangle = \left\langle \int\int \left[\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx}\right] \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'} e^{ip'y} + \hat{b}_{\mathbf{p}'} e^{-ip'y}\right] \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \right\rangle \tag{355}$$

Para hacer estas cuentas rápidamente recuerden siempre que

$$\langle 0|\hat{a}^n_{\mathbf{p}}|0\rangle = \langle 0|\hat{a}^n_{\mathbf{p}}\hat{b}^m_{\mathbf{p}'}|0\rangle = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^3 \tag{356}$$

$$\langle 0|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}'}|0\rangle = \langle 0|(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}})^n\hat{a}^m_{\mathbf{p}'}|0\rangle = 0 \quad \forall n \neq m \in \mathbb{N} \quad \mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^3. \tag{357}$$

Así obtenemos

$$\left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) \right\rangle = \int\int \delta(p'-p) e^{-ipx} e^{ip'y} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \tag{358}$$

$$\left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) \right\rangle = \int e^{-ip(x-y)} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}. \tag{359}$$

Entonces, si $x^0 > y^0$ podemos escribir el propagador como

$$D(x-y) = \int e^{-ip(x-y)} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}.$$

Por otro lado, la transformada de Fourier es

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} = \lim_{\epsilon\to 0} \int\int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}} + i\epsilon} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4} dp_0\,; \tag{360}$$

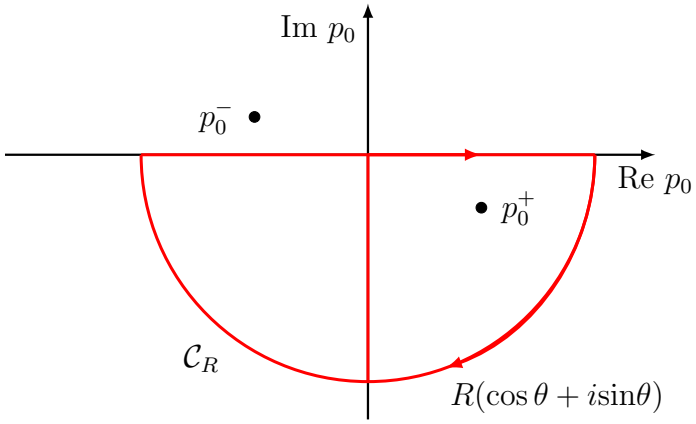

Fig. 3: **Circuito de integración $\mathcal{C}_R$ para $x^0 > y^0$.** Dado que, por el teorema de la curva de Cauchy, no importa cómo deformemos la curva de integración siempre obtendremos como resultado el residuo en el polo encerrado, muchas veces lo que se hace es directamente eliminar el ϵ (con lo cual los polos quedan en el eje real) y definir la integral en el plano complejo de manera tal de evitar los polos, por abajo del p_0^- y por arriba del p_0^+ (ver por ejemplo la figura 5, página 39 de las notas de Tong). Más todavía, se pueden obtener otras funciones de Green (avanzadas o retardadas, por ejemplo) utilizando otras prescripciones de cómo rodear los polos.

---

viendo el integrando como función de p_0 tiene polos en $p_0^{\pm} = \pm(\omega_{\mathbf{p}} - i\epsilon)$. Si $x^0 - y^0 > 0$ uno puede calcular esto cerrando el contorno por debajo con la curva $\mathcal{C}_R$ (ver Figura 3) de manera tal de que la integral sobre la semi-circunferencia tienda a cero ($e^{-iR(x^0-y^0)(\cos\theta+i\sin\theta)} \to 0$ cuando $R \to \infty$ si $\pi < \theta < 2\pi$). Así encerramos al polo p_0^+ y usando el teorema de residuos la integral resulta

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{361}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{C}_R} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4} dp_0 \tag{362}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{p_0\to p_0^+} 2\pi i(p_0 - p_0^+) \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \tag{363}$$

$$= \int e^{-ip(x-y)} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \tag{364}$$

donde usamos que $p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\epsilon = (p_0 - p_0^+)(p_0 - p_0^-)$.

Análogamente si $x^0 < y^0$ podemos calcular

$$\left\langle \hat{\phi}^\dagger(y)\hat{\phi}(x) \right\rangle = \int e^{ip(x-y)} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} = \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{365}$$

donde la última igualdad se obtiene haciendo un cuenta análoga cerrando el contorno por arriba. Así obtenemos entonces

$$D(x-y) = \lim_{\epsilon\to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \tag{366}$$

(c) *Muestre que se cumple* $(\Box_x + m^2)D(x-y) = -i\delta^4(x-y)$.

Finalmente podemos ver que el propagador es una función de Green de la ecuación de movimiento calculando

$$\left(\Box_x + m^2\right) D(x-y) = \lim_{\epsilon\to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{367}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int \left[(-p^2)e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + m^2 e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\right] \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{368}$$

$$= -i \int e^{-ip(x-y)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} = -i\delta^4(x-y). \tag{369}$$

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- Las transformaciones de simetría continua $f \to f'$ de carga Q y parámetro ϵ^a de la teoría clásica son implementadas en la teoría cuántica mediante la transformación unitaria
$$\hat{f}' = e^{i\epsilon^a \hat{Q}} \hat{f} e^{-i\epsilon^a \hat{Q}} = U^\dagger(\epsilon^a) \hat{f} U(\epsilon^a)$$

- El campo escalar complejo posee dos grados de libertad que dan lugar a dos tipos de partículas con la misma masa y cargas opuestas, partículas y anti-partículas.

- Para el campo escalar real que vimos las clases pasadas las partículas coinciden con las antipartículas (el campo escalar real no tiene carga).

- El propagador
$$D(x-y) \equiv \langle 0|T(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y))|0\rangle = \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$
es una función de Green del campo escalar.

A. Derivadas Funcionales

Sea $F[\phi]$ un funcional, es decir, una función que asigna un número en $\mathbb{C}$ (o cualquier otro cuerpo) a cada función ϕ de cierto espacio normado M

$$F : M \to \mathbb{C} \,. \tag{370}$$

La relación que vincula la *variación* $\delta F[\phi]$ de un funcional $F[\phi]$, debida a variaciones infinitesimales $\delta\phi$ de su argumento, permite definir la *derivada funcional* $\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)}$:

$$\delta F[\phi] = F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] := \int d^3x \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) \,. \tag{371}$$

El cálculo formal de la derivada funcional puede también hacerse tomando variaciones en ϕ de la forma $\delta\phi(x) = \epsilon\delta(x-y)$. De este modo, la derivada funcional se expresa como

$$\frac{\delta F[\phi(x)]}{\delta\phi(y)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{F[\phi(x) + \epsilon\delta(x-y)] - F[\phi(x)]}{\epsilon} \,. \tag{372}$$

Tomando la ecuación (372) como la definición de la derivada funcional, les proponemos:

1. Encontrar las derivadas funcionales de los siguientes funcionales

   a) $F[\phi] = \int dx\, (\phi(x))^n$;

   b) $F[\phi] = \int dx \left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right)^n$;

   c) $F_y[\phi] = \int dx' K(y,x')\,\phi(x')$;

   d) $F_x[\phi] = \phi(x)$;

   e) $F_x[\phi] = \partial_x\phi(x)$;

2. Dentro del formalismo de Hamilton, definimos el corchete de Poisson entre dos funcionales $F[\phi,\pi]$ y $G[\phi,\pi]$ del siguiente modo

   $$\{F,G\} = \int dx \left[\frac{\delta F}{\delta\phi(x)}\frac{\delta G}{\delta\pi(x)} - \frac{\delta F}{\delta\pi(x)}\frac{\delta G}{\delta\phi(x)}\right] \,. \tag{373}$$

   Demostrar las siguientes identidades (a tiempos iguales) de los corchetes de Poisson entre el campo y su momento canónico conjugado

   $$\{\phi(t,x), \pi(t,x')\} = \delta(x-x') \;,\;\; \{\phi(t,x), \phi(t,x')\} = \{\pi(t,x), \pi(t,x')\} = 0 \tag{374}$$

3. Expresar las ecuaciones de Euler-Lagrange, que surgen de anular la variación de la acción, en término de derivadas funcionales de los campos.