TEORÍA DE CAMPOS

NOTAS DE LA PRÁCTICA

Docentes:
David Blanco, Nicolás Del Grosso

Primer cuatrimestre 2020

Actualizadas al 10/06/2020

Estas notas cubren los temas de la práctica de Teoría de Campos. La idea es actualizar este material semanalmente a medida que avancemos con los temas. Tengan en cuenta que estas notas están en pleno desarrollo y por lo tanto pueden tener errores, typos, etc. Por este motivo, les pedimos que las lean críticamente. Se agradecen todo tipo de comentarios, sugerencias y correcciones.

Índice

1. Grupo de Poincaré **4**

1.1. Generalidades sobre grupos y álgebras 4

1.1.1. Grupos 4

1.1.2. Representaciones de grupos 6

1.1.3. Álgebra de Lie asociada a un grupo 8

1.2. Grupo Euclídeo 13

1.3. Representaciones irreducibles 14

1.4. Grupo de Lorentz 15

1.4.1. Transformaciones de Lorentz 15

1.4.2. Componentes del grupo de Lorentz 17

1.4.3. Álgebra del grupo de Lorentz 18

1.4.4. Espinores 22

1.5. Grupo de Poincaré 23

1.6. Material adicional: El grupo conforme 24

2. Ecuaciones de onda relativistas **26**

2.1. Ecuación de Klein-Gordon 26

2.2. Ecuacion de Klein-Gordon para un campo complejo 29

2.3. Ecuación de Dirac 32

2.3.1. Representación Quiral 33

3. Formulación Lagrangiana de teorías de campos **38**

3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange 39

3.2. Teorema de Noether 43

3.2.1. Invariancia bajo traslaciones. Tensor de energía-impulso 45

3.2.2. Invariancia bajo el grupo de Lorentz 49

3.3. Material adicional: Segundo Teorema de Noether 53

4. Teorías libres **54**

4.1. Cuantización canónica del campo escalar real 54

4.1.1. Hamiltoniano 54

4.1.2. Orden normal de operadores 57

4.1.3. Evolución de los campos 58

4.1.4. Espacio de estados 59

4.1.5. Estado de vacío. Energía de punto cero 61

4.1.6. Interpretación de partícula 63

4.1.7. Funciones de n puntos 66

4.1.8. Microcausalidad 68

4.1.9. Simetrías 71

4.1.10. Material adicional: Efecto Unruh 73

4.2. Cuantización del campo escalar complejo 75

4.2.1. Simetría interna 76

4.2.2. Propagador 77

4.3. Cuantización canónica del campo de Dirac 81

4.3.1. Soluciones clásicas de la ecuación de Dirac 81

4.3.2. Cuantización canónica del campo de Dirac 83

4.3.3. Masa, espín y helicidad. Partículas idénticas 89

4.3.4. Conexión entre espín y estadística 90

4.3.5. Simetrías internas 94

4.3.6. Simetrías globales 98

4.3.7. Funciones de dos puntos y propagadores 102

4.3.8. Material adicional: Violación de las condiciones de energía en QFT 105

4.4. Campo de Proca 106

4.4.1. Teoría clásica 106

4.4.2. Cuantización canónica 108

4.5. Campo de Maxwell 110

4.5.1. Cuantización canónica 112

4.5.2. Condición de Gupta-Bleuler 115

4.5.3. Función de dos puntos y propagador 119

5. Teorías interactuantes **122**

5.1. Algunas propiedades generales de las teorías de campos 124

5.1.1. Axiomas de Wightman 124

5.1.2. Representación de Källen-Lehmann 126

5.2. Matriz de scattering 131

5.2.1. Teorema de Wick 132

5.2.2. Diagramas disconexos 134

5.2.3. Reglas de Feynman para $\frac{\lambda}{\alpha!}\phi^\alpha$ 135

A. Derivadas Funcionales **141**

1. Grupo de Poincaré

La teoría cuántica de campos que estudiaremos es una teoría invariante ante el grupo de simetrías relativistas, que se conoce como grupo de Poincaré, y contiene al llamado grupo de Lorentz. Gracias al aporte de Minkowski, este grupo puede pensarse como el grupo de transformaciones que deja invariante a la métrica pseudoeculídea que lleva su nombre. En esta primera parte veremos aspectos de este grupo y su álgebra, comenzando con su análogo euclídeo. Veremos además cómo aparecen los espinores como representación del grupo de Lorentz.

1.1. Generalidades sobre grupos y álgebras

1.1.1. Grupos

Antes de comenzar con el estudio de los grupos mencionados, vamos a decir primero lo que es un grupo.

Definición: Un **grupo** es un conjunto G con una operación de multiplicación "$\cdot$" *cerrada* en el grupo, es decir tal que $g_1 \cdot g_2 \in G$ si g_1, $g_2 \in G$, y tal que

(a) Cumple *asociatividad*: $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$, para todo g_1, g_2, $g_3 \in G$;

(b) Existe *elemento neutro*: Existe $1_{\mathrm{G}} \in G$ tal que $1_{\mathrm{G}} \cdot g = g \cdot 1_{\mathrm{G}} = g$, para todo $g \in G$;

(c) Existe *elemento inverso*: Dado $g \in G$, existe $g' \in G$ tal que $g \cdot g' = g' \cdot g = 1_{\mathrm{G}}$.

Un ejemplo de grupo es el conjunto de los números reales tomando el producto del grupo como la operación suma entre números reales. La suma entre reales da un número real, es asociativa, tiene elemento neutro (el 0), y tiene elemento inverso (el elemento opuesto). En general, todo espacio vectorial define un grupo con respecto a su suma.

Noten que el conjunto de los números reales tomando la multiplicación como el producto entre reales no es un grupo: si bien el producto es asociativo y tiene elemento neutro (el 1), no todo elemento de $\mathbb{R}$ tiene inverso (el cero no lo tiene, ya que no existe $g' \in \mathbb{R}$ tal que $g'.0 = 1 = 1_{\mathrm{G}}$). Sin embargo, como pueden fácilmente verificar, $\mathbb{R} - \{0\}$ sí es un grupo con respecto al producto usual.

Los grupos que mencionamos en los párrafos anteriores tienen **orden** (cantidad de elementos) infinito. Un ejemplo de grupo de orden finito es el dado por el conjunto de las potencias enteras de la unidad imaginaria i, tomando la multiplicación del grupo como el producto usual entre números complejos. Este grupo es una realización del llamado *grupo cíclico de* 4 *elementos*. El conjunto de elementos del grupo es $\{1, i, -1, -i\}$, por lo que el grupo tiene orden 4.

Todos los grupos que mencionamos hasta este punto son grupos **abelianos**. Esto significa que la multiplicación entre dos elementos del grupo da el mismo resultado independientemente del orden en el cual se multiplique. Cuando el orden de la multiplicación en un grupo altera el resultado decimos que el grupo es **no abeliano**. El grupo de simetrías del modelo estándar (que está construido a partir de un producto directo de grupos unitarios que veremos más adelante) es un ejemplo de grupo no abeliano relevante en física. Los ejemplos más comunes de grupos no abelianos están dados por grupos de matrices. Uno de ellos se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: (Práctica 1, Ejercicio 1) *Considere las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^D$ que dejan invariante la forma cuadrática $x^T x$, siendo $x \in \mathbb{R}^D$.*

(a) *Muestre que la matriz M que implementa la transformación lineal debe cumplir $M^T M = \mathbb{I}$, y como consecuencia de esto $|\det(M)| = 1$. El grupo de matrices que cumple $M^T M = \mathbb{I}$ se conoce como grupo ortogonal y se lo denota como $O(D)$.*

Sea $x' = Mx$ (el elemento x transformado por M). Imponiendo que la forma cuadrática sea invariante, es decir que $x^T x = x'^T x'$, resulta $x^T x = x'^T x' = x^T M^T M x$. Por lo tanto,

$$M^T M = \mathbb{I}\,. \tag{1}$$

lo que implica que $M^T = M^{-1}$. Tomando el determinante a ambos lados de esta última ecuación, y teniendo en cuenta que el determinante no cambia al trasponer la matriz, resulta $|\det(M)| = 1$.

Es sencillo ver que el conjunto de matrices invertibles que cumplen $M^T M = \mathbb{I}$ es un grupo tomando la multiplicación del grupo como el producto usual entre matrices. Verifiquemos esto:

- La multiplicación es cerrada: dados dos elementos M_1 y M_2 que cumplen la condición dada por la ecuación (1), $M_1 M_2$ también la cumple. En efecto,

$$(M_1 M_2)^T (M_1 M_2) = M_2^T M_1^T M_1 M_2 = M_2^T \mathbb{I} M_2 = M_2^T M_2 = \mathbb{I}\,. \tag{2}$$

- La multiplicación es asociativa (ya que el producto de matrices es asociativo);
- Existe el elemento neutro dentro del conjunto. Para la multiplicación entre matrices, el elemento neutro es la matriz identidad $\mathbb{I}$, que pertenece al conjunto ya que $\mathbb{I}^T \mathbb{I} = \mathbb{I}$;
- Existe el elemento inverso dentro del conjunto. Como partimos de considerar matrices invertibles sólo tenemos que ver que si M cumple (1), entonces M^{-1} también lo cumple. En efecto,

$$\left(M^{-1}\right)^T M^{-1} = (M^T)^{-1} M^{-1} = (M^{-1})^{-1} M^{-1} = M M^{-1} = \mathbb{I}\,, \tag{3}$$

donde en la penúltima igualdad utilizamos que M cumple (1) y por lo tanto $M^T = M^{-1}$.

(b) *Al subgrupo de matrices de $O(D)$ con determinante $+1$ se lo denomina $SO(D)$ ("S" por "special"). Argumente que para el subgrupo de matrices de $O(D)$ conectadas continuamente con la identidad el determinante debe ser $+1$. (Ocurre que la condición determinante $+1$ garantiza que la matriz se halla en el subgrupo conectado con la identidad, de modo que $SO(D)$ tiene una sola componente conexa que incluye a la identidad).*

Un **subgrupo** de un grupo dado es un subconjunto del conjunto original que es en sí mismo un grupo (con la multiplicación heredada del grupo original). Pueden probar que efectivamente las matrices del grupo ortogonal que tienen determinante $+1$ forman un grupo.

Que una matriz M_0 dada esté "conectada continuamente con la identidad" significa que existe al menos una función continua $M(s_i)$ (que dados ciertos números reales s_i me da una matriz $M(s_i)$), y tal que las matrices M_0 y la matriz identidad están en la imagen de dicha función $M(s)$. Pueden imaginar que, en el espacio de las matrices, dicha función nos permiter construir una curva continua que conecta a la matriz M_0 con la identidad. Como la función $M(s)$ es continua, y la función determinante también lo es (ya que consiste en multiplicar y sumar entradas de la matriz), $\det[M(s)]$ también es continua. Dado que las matrices de $O(D)$ tienen determinante ± 1, y como $\det[\mathbb{I}] = 1$, para que $\det[M(s)]$ sea continua debe ser $\det[M(s)] = 1$. Las matrices de $O(D)$ que tienen ese determinante son justamente las matrices de $SO(D)$ que constituyen el grupo ortogonal especial o *grupo de rotaciones* en D dimensiones.

1.1.2. Representaciones de grupos

En esta sección vamos a presentar el concepto de representación de un grupo. Si bien este concepto va a ser relevante para nosotros recién en la próxima clase, es natural introducirlo mientras estamos hablando de grupos. En la definición que vamos a dar aparece el conjunto $gl(V)$, que es simplemente el conjunto de transformaciones lineales (biyectivas) que van de V en V, es decir

$$gl(V) = \{T : V \to V\,,\ \text{con } T \text{ biyectiva}\}\ .$$

Definición: Una **representación** de un grupo G sobre un espacio vectorial V es una aplicación $\pi : G \to gl(V)$ que cumple

$$\pi\left(g_1 \cdot g_2\right) = \pi\left(g_1\right)\,\pi\left(g_2\right)\ ,$$

para todo g_1, g_2 en G y tal que $\pi(1_{\mathrm{G}}) = \mathbb{I}_V$ (identidad sobre V) .

Tomemos un poco de tiempo para analizar esta definición. Si g es un elemento del grupo, y π es una representación, entonces $\pi(g)$ es un elemento de $gl(V)$. Es decir que $\pi(g)$ actúa sobre V y me devuelve un elemento de V. Para no ser tan abstractos, si V es por ejemplo $\mathbb{C}^2$, $\pi(g)$ es una matriz de 2×2 cuyos coeficientes dependerán en general del elemento g del grupo. Pero para constituir una representación del grupo, estas matrices tienen que respetar la multiplicación del grupo: la matriz asociada a la multiplicación de dos elementos del grupo es el producto de las matrices asociadas a cada uno de ellos.

Observaciones:

(a) Dado V siempre existe una representación de G sobre V: si se toma $\pi(g) = \mathbb{I}_V$ (la identidad sobre V) para todo $g \in G$ es trivial ver que π es una representación de G. Cuando $V = \mathbb{C}$ (o $V = \mathbb{R}$) dicha representación se conoce como **representación trivial**.

(b) Si V tiene producto interno, se dice que una dada representación π de G en V es **unitaria** si $\pi(g)^\dagger \pi(g) = \mathbb{I}_V$ para todo g en G.

(c) Se dice que una representación es **fiel** si $\pi(g)$ es distinto para cada elemento g del grupo.

(d) V no tiene por qué ser necesariamente un espacio de dimensión finita. De hecho, como comentaremos más adelante, no existen representaciones unitarias de dimensión finita (no triviales) del grupo de Poincaré.

Ejercicio: *Considerar el grupo cíclico de cuatro elementos en la realización vista anteriormente en la cual el conjunto de elementos es $G = \{1, i, -1, -i\}$. Verificar que $\pi : G \to \mathbb{R}^2$ definido por*

$$\pi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pi(i) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi(-1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \pi(-i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

es una representación sobre $\mathbb{R}^2$ del grupo cíclico de cuatro elementos. Notar que esta representación no es trivial, es unitaria y es fiel. Intentar encontrar una representación del grupo pero ahora sobre $\mathbb{R}^3$.

Noten que podemos interpretar a cada una de las matrices anteriores como matrices de rotación de los vectores de $\mathbb{R}^2$ alrededor del eje z en ángulos de 0, $3\pi/2$, π y $\pi/2$, respectivamente. Quizás esto hace que sospechen algo que es efectivamente correcto: el grupo cíclico de cuatro elementos es un subgrupo del grupo de rotaciones en 2 dimensiones $SO(2)$ (cuyo orden es infinito). Esto puede servirles como ayuda para pensar cómo encontrar representaciones sobre $\mathbb{R}^3$, como se pide en el ejercicio.

El grupo de rotaciones en tres dimensiones $SO(3)$, que será de relevancia por ser un subgrupo del grupo de Poincaré que estudiaremos más adelante, está estrechamente relacionado con otro grupo matricial importante en física denominado $SU(2)$ (grupo de matrices unitarias de dimensión 2 que tienen determinante $+1$). Aunque $SO(3)$ surge naturalmente al considerar las rotaciones espaciales, $SU(2)$ es más sencillo[1] y más fácilmente visualizable: $SU(2)$ es la esfera S^3 (para ver esto pueden mirar por ejemplo el artículo de Wikipedia que habla sobre la 3-esfera). Cuando decimos que el grupo es "visualizable" estamos haciendo referencia al hecho de que tanto $SO(3)$ como $SU(2)$, además de tener estructura de grupo, tienen estructura de variedad diferenciable.

Los grupos que tienen una estructura de variedad diferenciable compatible con la estructura de grupo se denominan **grupos de Lie**. Cada elemento de un grupo de Lie se puede reescribir como la exponencial de lo que se conoce como generador, y el conjunto de generadores forman un *álgebra de Lie*. A continuación veremos la definición de álgebra de Lie y estudiaremos cuál es el álgebra de Lie del grupo de rotaciones.

1.1.3. Álgebra de Lie asociada a un grupo

Definición: Un **álgebra de Lie** es un espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) con una operación corchete (o conmutador) "$[,]$" que cumple las siguientes propiedades

(a) Es *bilineal*:

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]\,,$$
$$[x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z]\,,$$

para todo x, y, $z \in V$ y α, $\beta \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$);

(b) Es *antisimétrica*: $[x, y] = -[y, x]$, para todo x, $y \in V$.

(c) Cumple la *identidad de Jacobi*: $[[x, y], z]+[[z, x], y]+[[y, z], x] = 0$, para todo x, y, $z \in V$.

Vean que lo que esencialmente diferencia la estructura de grupo de la de un álgebra es que esta última tiene, además de la multiplicación (corchete), una suma (por ser un espacio vectorial). Además, el producto de las álgebras de Lie no es asociativo, a diferencia de lo que sucede con los grupos. Esta falta de asociatividad se expresa a través de la identidad de Jacobi.

Un ejemplo que todos conocen de álgebra de Lie está dado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, donde se

[1] Esto no quiere decir que $SU(2)$ no surja naturalmente en física. De hecho, la libertad de la elección en la fase de la función de onda en mecánica cuántica hace que sean de interés las llamadas representaciones bivaluadas de $SO(3)$, es decir, tanto las verdaderas representaciones unitarias de $SO(3)$ así como también aquellas que están determinadas salvo un factor de fase (y que se denominan *representaciones proyectivas*). Las representaciones bivaluadas de $SO(3)$ son justamente las representaciones de $SU(2)$.

define el corchete como el producto vectorial entre dos vectores (pueden verificar que cumple las propiedades mencionadas arriba).

Vamos a utilizar una propiedad, que no vamos a demostrar, que dice que dado un elemento del álgebra x, el conjunto $\{e^{tx}\}$ con $t \in \mathbb{R}$ es un subgrupo monoparamétrico (porque depende sólo del parámetro t) del grupo de Lie asociado al álgebra. Para que esto no suene tan abstracto piensen en el grupo de rotaciones en 3 dimensiones: los elementos del álgebra van a estar asociados a los operadores de momento angular en una dirección determinada y el parámetro t estaría asociado al ángulo de la rotación alrededor de esa dirección; estas rotaciones alrededor de un eje son claramente un subgrupo del grupo total de rotaciones y están caracterizadas por un sólo parámetro.

A continuación, vamos a estudiar con más detalle el álgebra del grupo de rotaciones. Para caracterizar dicho álgebra vamos a utilizar como guía el siguiente ejercicio de la práctica.

Ejercicio: (Práctica 1, Ejercicio 2) *Una matriz cualquiera M del grupo $SO(D)$ puede escribirse como la exponencial de otra: $M = e^A$. El conjunto de matrices que aparecen en la exponencial forman un álgebra, tomando el corchete como el conmutador entre matrices.*

(a) *Muestre que esta matriz A debe ser antisimétrica.*

En este inciso queremos comenzar a caracterizar el álgebra asociada al grupo de Lie $SO(D)$, que se denota $so(D)$ (en general se utilizan mayúsculas para denotar a los grupos y minúsculas para sus respectivas álgebras). Teniendo en cuenta la discusión previa a este ejercicio, sabemos que el conjunto de matrices dadas por e^{tA} con $t \in \mathbb{R}$ es un subgrupo de $SO(D)$, por lo que tiene que valer

$$\left(e^{tA}\right)^T \left(e^{tA}\right) = \mathbb{I}\,, \tag{5}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Noten que la traspuesta de la exponencial es la exponencial de la traspuesta (esto se puede ver recordando la definición de la exponencial de una matriz), así que

$$\left(e^{tA^T}\right) \left(e^{tA}\right) = \mathbb{I}\,. \tag{6}$$

Derivando respecto de t y tomando $t = 0$ llegamos a

$$A^T + A = 0\,, \tag{7}$$

lo que nos dice que A es antisimétrica.

(b) *Definimos la dimensión de un grupo de Lie como la dimensión del espacio vectorial de su álgebra asociada. A partir del inciso anterior, muestre que la dimensión de $SO(D)$ es $D(D-1)/2$.*

Sabemos que la matriz A es antisimétrica, por lo que sus elementos diagonales son nulos, y los de la supra-diagonal quedan determinados a partir de los de la sub-diagonal. La dimensión del espacio vectorial de las matrices antisimétricas es entonces la cantidad de elementos que hay en la sub-diagonal, que son $D(D-1)/2$.

(c) *Los generadores del espacio vectorial de matrices antisimétricas (cuya exponencial genera el grupo) pueden escribirse convenientemente en términos de una colección de matrices Σ_{IJ} (I, $J = 1, ..., D$), siendo por definción $\Sigma_{IJ} = -\Sigma_{JI}$ (note que aquí I y J no son las componentes de la matriz sino un doble índice que etiqueta cada matriz). En términos de estas, la matriz M de $SO(D)$ puede escribirse como:*

$$M = e^{\frac{1}{2}\Sigma_{IJ}\omega^{IJ}} \tag{8}$$

siendo ω^{IJ} parámetros reales sujetos a la relación $\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$. Para el caso $D = 3$, halle un conjunto de matrices Σ_{IJ} y parámetros ω^{IJ} en términos de los generadores y ángulos usuales de rotación que expresan la rotación en torno a un eje. Relacione el indice IJ con el plano de rotación.

Comenzamos aclarando que en la ecuación (8) hay una suma doble implícita sobre los índices I y J. Siempre que aparezcan índices repetidos consideren que hay una suma implícita, a menos que se indique lo contrario.

Para el caso $D = 3$ la cantidad de generadores es $3 \times (3-1)/2 = 3$. Veamos por ejemplo cuál es el generador Σ_{xy} asociado a la matriz de rotación en ángulo θ alrededor del eje z $R_z(\theta)$. Recuerden que

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Estamos buscando una matriz Σ_{xy} de 3×3 y una constante ω_{xy} tales que resulte

$$e^{\omega_{xy}\Sigma_{xy}} = R_z(\theta)\,. \tag{10}$$

Noten que no incluimos en la exponencial el término $\omega_{yx}\Sigma_{yx}$, ya que $\omega_{yx}\Sigma_{yx} = (-\omega_{xy})(-\Sigma_{xy}) = \omega_{xy}\Sigma_{xy}$ y esto cancela el factor $1/2$ que aparece en el exponente de la ecuación (8). Como $R_z(\theta)$ es una matriz por bloques, el bloque de un solo elemento (donde aparece el valor 1) se podrá obtener fácilmente haciendo la exponencial de una matriz con la misma estructura de bloques y cuyo elemento diagonal inferior es un 0. Es decir, la estructura de Σ_{xy} debe ser la siguiente

$$\Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Ahora nos queda determinar los coeficientes α_{ij} para que resulte

$$\exp\left(\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Para esto, es útil recordar la propiedad

$$e^{i\theta\hat{n}\cdot\bar{\sigma}} = \cos\theta\,\mathbb{I} + i\sin\theta\,\hat{n}\cdot\bar{\sigma}\,, \tag{13}$$

donde $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ es un versor y $\bar{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, siendo σ_i las matrices de Pauli. Noten que para obtener los sin en la antidiagonal de la matriz de la ecuación (12) tenemos que elegir $\hat{n} = (0, 1, 0)$. En efecto, resulta

$$e^{i\theta\sigma_y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \tag{14}$$

por lo que vamos a tomar

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = i\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Finalmente, tenemos entonces

$$\Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

y $\omega_{xy} = \theta$. Noten que Σ_{xy} es antisimétrica, como debía serlo. Tenemos aquí un ejemplo concreto de un subgrupo monoparamétrico de $SO(3)$ (el parámetro es θ y el generador Σ_{xy}): las matrices de rotación alrededor del eje z. La resolución se tornó un poco larga porque trabajamos a fuerza bruta. Noten que el procedimiento de hallar los generadores se simplifica mucho si recordamos que el conjunto de las matrices $R_z(\theta)$ es un subgrupo monoparamétrico de $SO(3)$, donde el parámetro es θ. Escribiendo $R_z(\theta) = e^{\theta\,\Sigma_{xy}}$, vemos que debe ser

$$\Sigma_{xy} = \left.\frac{dR_z(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0}. \tag{17}$$

Por esta última ecuación se suele decir que "el álgebra es la aproximación lineal del grupo"; el álgebra puede pensarse como el espacio tangente al grupo en la identidad. Retomando el ejercicio, podemos calcular Σ_{xy} del siguiente modo

$$\Sigma_{xy} = \left.\frac{dR_z(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta}\left.\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

que coincide con el resultado que ya habíamos obtenido. De forma similar, pueden ustedes hallar los dos generadores restantes

$$\Sigma_{yz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y } \Sigma_{zx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Ya determinamos los elementos del álgebra de Lie asociada al grupo de rotaciones. En el Ejercicio 3 de la práctica les pedimos a ustedes que vean que el corchete entre los generadores es

$$[\Sigma_{IJ}, \Sigma_{MN}] = \delta_{IN}\Sigma_{JM} + \delta_{JM}\Sigma_{IN} - \delta_{IM}\Sigma_{JN} - \delta_{JN}\Sigma_{IM} \,. \tag{20}$$

Esto determina completamente el álgebra $so(D)$ asociada al grupo de rotaciones. Definiendo

$$J_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_{jk} \,, \tag{21}$$

la relación (20) nos da (en el Ejercicio 8 se pide esta misma cuenta pero con una ligera variante en la definición de los generadores)

$$[J_i, J_j] = -\epsilon_{ijk}J_k \,, \tag{22}$$

que, salvo el signo del lado derecho y la falta de una i (y que se arregla al redefinir los generadores multiplicándolos por $-i$) deben reconocer como el álgebra de momento angular $su(2)$: $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$ (ver ecuación (50)). Esto nos dice que $so(3) = su(2)$. Ustedes ya conocen representaciones de este álgebra[2]. Una representación de $su(2)$ sobre $\mathbb{C}^2$ está dada por las matrices de Pauli

$$J_1 \to \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \,, \quad J_2 \to \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \,, \quad J_3 \to \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \,. \tag{23}$$

Esta representación la conocen como la de momento angular $j = 1/2$. También conocen representaciones sobre espacios de mayor dimensión. Por ejemplo, una representación de $su(2)$ sobre $\mathbb{C}^3$ queda definida tomando

$$J_1 \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \,, \quad J_2 \to \frac{1}{\sqrt{2}i}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \,, \quad J_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \,. \tag{24}$$

Esta es la representación asociada a $j = 1$. En general, las representaciones irreducibles (ya veremos mejor qué significa esto) de $su(2)$ están caracterizadas por un semientero j y actúan sobre $\mathbb{C}^{2j+1}$ (es decir, son matrices cuadradas de tamaño $2j+1$).

Si bien $so(3) = su(2)$, como mencionamos anteriormente los grupos $SO(3)$ y $SU(2)$ no coinciden. Anteriormente mencionamos que $SU(2)$ se puede visualizar como una esfera. $SO(3)$ es en efecto una esfera pero con los puntos antipodales identificados. Si tomamos un pedazo pequeño de esa esfera, el punto antipodal de uno dado no nos interesa, está fuera del pedazo tomado. Localmente, la esfera y la esfera con los puntos antipodales identificados son iguales. Esto es justamente lo que nos dice la igualdad entre las álgebras asociadas: localmente los grupos son iguales.

[2] La definición de representación de un álgebra es análoga a la de representación de un grupo. En esencia, la representación de un elemento del álgebra será una matriz, y el producto y suma de matrices da la matriz asociada al producto y suma de elementos del álgebra.

1.2. Grupo Euclídeo

El grupo Euclídeo es el grupo de transformaciones que dejan invariantes a la distancia euclídea entre dos puntos. Dicho grupo está compuesto por el grupo de rotaciones y el grupo de traslaciones, y se denota por $ISO(3)$ (o $ISO(D)$ en D dimensiones). En el ejercicio 4 les pedimos que estudien el álgebra asociada al grupo Euclídeo.

La clase que viene vamos a estudiar lo que sería el análogo al grupo Euclídeo en relatividad especial, es decir, el grupo de transformaciones que deja invariante la "distancia" entre dos puntos en el espacio-tiempo. A las rotaciones y traslaciones se van agregar otras transformaciones que mezclan tiempo y espacio y se denominan *boosts*.

Algunas cosas para llevarse de esta clase

- Un grupo es un conjunto de elementos con una multiplicación asociativa entre elementos del grupo, y que tiene elemento neutro e inverso.
- Un álgebra de Lie es un espacio vectorial donde además hay un producto entre elementos del álgebra (corchete) que es bilineal, antisimétrico y que cumple Jacobi.
- Para los llamados grupos de Lie (que son los que más nos van interesar), dado g en el grupo, existe x en un álgebra de Lie tal que $g = e^x$. x se conoce como generador.
- En el contexto del inciso anterior, el conjunto $g(t) = e^{tx}$ con $t \in \mathbb{R}$ define un subgrupo. Noten que $x = g'(t)|_{t=0}$.
- Lista de grupos para recordar: $O(D)$, $SO(D)$, $U(D)$, $SU(D)$, $ISO(D)$. Las álgebras asociadas se notan con minúsculas.
- Las representaciones *irreducibles* (ya veremos qué significa esta palabra) de $su(2)$ quedan clasificadas por un semientero $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$. Fijado j, la dimensión de la representación es $2j + 1$ (son las matrices de momento angular que ya han visto).

1.3. Representaciones irreducibles

Al estudiar las distintas representaciones de un grupo es importante poder descomponer una dada representación en "partes" más simples. Una manera de conseguir esto es buscar cuáles son los menores subespacios invariantes (no triviales) de la representación.

Consideremos una representación $\pi : G \to gl(V)$. Decimos que un subespacio W de V es invariante por π si $\pi(g)(W) \subseteq W$ para todo elemento g del grupo. Visto esto, podemos definir lo que significa que una representación sea irreducible (que se suele abreviar como irrep).

Definición: Una representación $\pi : G \to gl(V)$ dada es **irreducible** si V no posee subespacios invariantes por π no triviales.

Toda representación de dimensión 1 es irreducible ya que los únicos subespacios de un espacio de dimensión 1 son los subespacios triviales. Veamos un ejemplo menos trivial que nos permita entender mejor esta definición.

Consideremos el grupo de rotaciones en dos dimensiones $SO(2)$. Una representación de este grupo sobre $V = \mathbb{R}^3$ está dada por la asignación de elementos del grupo a matrices de la forma dada por la ecuación (9). Veamos que esta representación de $SO(2)$ es reducible. Para ello, consideremos el subespacio W de V generado por el vector $(0, 0, 1)$, o sea, el eje z. Las rotaciones alrededor de este eje dejan obviamente al eje invariante,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R}), \tag{25}$$

Por lo tanto, $W = \langle (0, 0, 1) \rangle$ es un subespacio invariante por la representación dada (y es no trivial, es decir, no es ni el espacio total ni el nulo). La representación es entonces reducible. Una estructura en bloques como la de la matriz de la ecuación (9) es sinónimo de que la representación es reducible.

Les dejamos como ejercicio que prueben que la aplicación que a un elemento $R(\theta)$ de $SO(2)$ le asigna la matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{26}$$

define una representación irreducible (o irrep) de $SO(2)$ sobre $\mathbb{R}^2$.

Toda representación reducible puede descomponerse como suma directa de representaciones irreducibles. Las representaciones irreducibles son en cambio bloques indivisibles, *elementales*. Se suele decir que "las partículas elementales transforman como las representaciones unitarias irreducibles del grupo de Poincaré". A lo largo del curso vamos a ir dándole sentido y precisión a esta

frase. Por lo pronto, sepan que la propia definición de lo que en nuestra teoría es una partícula elemental va a estar fuertemente relacionada con las irreps del grupo de Poincaré.

Sobre el final de la clase de hoy presentamos el grupo de Poincaré y les dejamos un ejercicio que introduce los dos operadores de Casimir de su álgebra, que servirán para clasificar la acción de las representaciones del grupo sobre los estados de una partícula. Con esta perspectiva en mente, vamos a comenzar estudiando varios aspectos de un subgrupo del grupo de Poincaré: el grupo de Lorentz.

1.4. Grupo de Lorentz

1.4.1. Transformaciones de Lorentz

La clase pasada estudiamos el grupo de rotaciones. Vamos a ver ahora lo que sería el análogo a este grupo para la geometría Minkowskiana.

Ejercicio: (Práctica 1, Ejercicio 6) *Considere una transformación dada por una matriz* Λ

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu \,, \tag{27}$$

que deje invariante la forma $x^T \eta x$*, siendo* x *una coordenada de un punto del espacio-tiempo 4 dimensional y*

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \tag{28}$$

En componentes, $x^T \eta x = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$*,* $\mu = 0, 1, 2, 3$*. Al grupo de transformaciones lineales que deja esa forma cuadrática invariante se lo llama grupo de Lorentz.*

Halle la condición análoga a la del grupo de rotaciones (Ejercicio 1.a) para la matriz Λ*. Muestre que la matriz* λ *definida por* $\Lambda = e^\lambda$ *satisface* $\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}$*, siendo* $\lambda_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\rho}\lambda^\rho_{\ \nu}$*.*

Sea $x' = \Lambda x$ (el elemento x transformado por Λ). Imponiendo que la forma cuadrática sea invariante, es decir que $x^T \eta x = x'^T \eta x'$, resulta $x^T \eta x = x'^T \eta x' = x^T \Lambda^T \eta \Lambda x$. Por lo tanto,

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \,. \tag{29}$$

Veamos ahora cómo queda caracterizada el álgebra asociada a este grupo. Escribimos un elemento genérico Λ del grupo en términos de un elemento del álgebra

$$\Lambda = e^\lambda \,. \tag{30}$$

Luego, sabemos que el conjunto $\Lambda(t) = e^{t\lambda}$ con $t \in \mathbb{R}$ es un subgrupo monoparamétrico del Lorentz, por lo que vale

$$\Lambda^T(t)\eta\Lambda(t) = \eta\,. \tag{31}$$

Desarrollando esta expresión análogamente a como hicimos en el Ejercicio 1, derivando respecto a t y evaluando en $t = 0$, se obtiene

$$\lambda^T\eta + \eta\lambda = 0\,, \tag{32}$$

que, usando que $\eta = \eta^T$, en componentes se reduce a

$$\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}\,. \tag{33}$$

Vean que el resultado es completamente análogo al del Ejercicio 1, con la diferencia de que aquí aparece una métrica η no trivial (la del espacio de Minkowski). Noten que la dimensión del álgebra es $4 \times (4-1)/2 = 6$.

Veamos algunos ejemplos de transformaciones de Lorentz. Después de lo visto la clase anterior, seguramente están pensando en las rotaciones alrededor de los ejes x, y y z

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ 0 & 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 \\ 0 & -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{34}$$

También tenemos los boosts en las direcciones x, y y z

$$\begin{bmatrix} \cosh\beta_x & \sinh\beta_x & 0 & 0 \\ \sinh\beta_x & \cosh\beta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cosh\beta_y & 0 & \sinh\beta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh\beta_y & 0 & \cosh\beta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cosh\beta_z & 0 & 0 & \sinh\beta_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\beta_z & 0 & 0 & \cosh\beta_z \end{bmatrix}, \tag{35}$$

donde β_i está relacionada con la velocidad v_i del boost en la dirección i por

$$\cos\beta_i = \frac{1}{\sqrt{1-v_i^2}}\,, \quad \sin\beta_i = \frac{v_i}{\sqrt{1-v_i^2}}\,. \tag{36}$$

La reflexión total

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{37}$$

es también una transformación de Lorentz, así como también lo es la inversión temporal

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{38}$$

La elección de los ejemplos que mostramos no es aleatoria: cualqueier transformación de Lorentz puede descomponerse como un producto de estos cuatro tipos de transformaciones.

Las matrices de los ejemplos anteriores dan una representación del grupo de Lorentz sobre $\mathbb{C}^4$. En esta clase vamos a hacer un estudio más general de las representaciones del grupo de Lorentz y para ello estudiaremos su álgebra de Lie. Pero antes de eso, hablemos un poco de la estructura de este grupo (esta discusión que sigue responde al Ejercicio 7 de la práctica).

1.4.2. Componentes del grupo de Lorentz

Noten que si toman el determinante de ambos miembros de la ecuación (29) se obtiene

$$\det(\Lambda) = \pm 1 \,. \tag{39}$$

Esto define dos subconjuntos de las transformaciones de Lorentz

- $\det \Lambda = +1$: **transformaciones propias**.
- $\det \Lambda = -1$: **transformaciones impropias**.

Ejemplos de transformaciones propias son la identidad, las rotaciones, la reflexión total. La reflexión espacial ($\Lambda = \eta$) es un ejemplo de una transformación impropia.

Hay una clasificación adicional dentro del grupo de Lorentz, que sale de escribir la componente 00 de la ecuación (29)

$$(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{j=1}^{3} (\Lambda^j_0)^2 = 1 \implies \Lambda^0_0 \geq 1 \quad \text{ó} \quad \Lambda^0_0 \leq -1 \,. \tag{40}$$

Podemos clasificar entonces a las transformaciones de acuerdo a lo siguiente.

- $\Lambda^0_0 \geq 1$: **transformaciones ortócronas**.
- $\Lambda^0_0 \leq -1$: **transformaciones no ortócronas** (invierten el sentido del tiempo).

El grupo de Lorentz consiste entonces de cuatro componentes conexas (ver figura 1):

$$\begin{aligned} L^{\uparrow}_{+} \quad &: \quad \det \Lambda = +1 \;\; \Lambda^0_0 \geq 1 \,; \\ L^{\downarrow}_{+} \quad &: \quad \det \Lambda = +1 \;\; \Lambda^0_0 \leq -1 \,; \\ L^{\uparrow}_{-} \quad &: \quad \det \Lambda = -1 \;\; \Lambda^0_0 \geq 1 \,; \\ L^{\downarrow}_{-} \quad &: \quad \det \Lambda = -1 \;\; \Lambda^0_0 \leq -1 \,. \end{aligned}$$

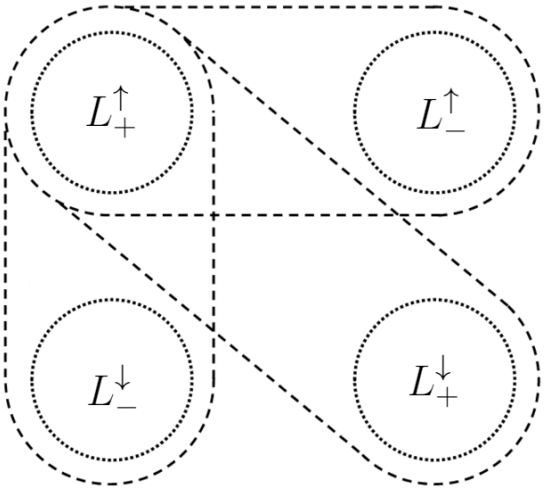


Fig. 1: **Grupo de Lorentz.** Las cuatro componentes conexas del grupo de Lorentz se esquematizan con círculos punteados en la figura, mientras que las líneas de trazos encierran a los tres subgrupos del grupo de Lorentz (noten que todo grupo debe contener a $L_+^\uparrow$ ya que dicha componente es la que contiene a la identidad). El subgrupo $L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow$ se conoce como Grupo de Lorentz propio y es el relevante para toda la fenomenología de partículas.

$L_+^\uparrow$ es un subgrupo y se conoce como Grupo de Lorentz propio ortócrono. Sin embargo, este no es el único subgrupo de grupo de Lorentz. De hecho, $L_+^\uparrow$ junto a cualquiera de las otras tres componentes son subgrupos. El que nos va a interesar a nosotros es $L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow$, que se conoce como **Grupo de Lorentz propio** y se nota $SO(3,1)$ (el 3 por la dimensión espacial, el 1 por la temporal).

1.4.3. Álgebra del grupo de Lorentz

En esta sección, vamos a encontrar los generadores de las rotaciones y los boosts, y los conmutadores entre dichos generadores. Como las relaciones de conmutación valen lo mismo en cualquier representación (recuerden por ejemplo lo que vimos sobre las representaciones de $su(2)$) al hacer esto vamos a tener determinada en forma abstracta el álgebra del grupo de Lorentz. Una vez que tengamos el álgebra, será cuestión de estudiar sus representaciones para ver las que se inducen sobre el grupo.

A modo de ejemplo, comencemos calculando el generador de los boosts en la dirección x. Recordamos que dicho boosts se representa por la siguiente matriz

$$\Lambda(\beta_x) = \begin{bmatrix} \cosh\beta_x & \sinh\beta_x & 0 & 0 \\ \sinh\beta_x & \cosh\beta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{41}$$

Buscamos una matriz $M_{tx} = -M_{xt}$ tal que resulte

$$\Lambda(\beta_x) = e^{\frac{i}{2}(\beta_x M_{tx} - \beta_x M_{xt})} = e^{i\beta_x M_{tx}} . \tag{42}$$

β_x juega aquí el rol análogo a los ω^{IJ} de la ecuación (8). Por eso M_{xt} aparece multiplicado por $-\beta_x$, ya que recuerden que $\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$. Agregamos además la unidad imaginaria i para ser consistentes con la definición más común de los generadores que suele hacerse en la literatura de física. En virtud de la ecuación (42) se tiene $M_{tx} = -i\Lambda'(\beta_x)|_{\beta_x=0}$, que introduciendo la forma explícita del boost nos da

$$M_{tx} = -i\Lambda'(\beta_x)|_{\beta_x=0} = -i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{43}$$

Siguiendo un procedimiento similar pueden obtener los generadores asociados a los boosts en y y z

$$M_{ty} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad M_{tz} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \tag{44}$$

y los asociados a las rotaciones en x, y y z

$$M_{yz} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} , \quad M_{zx} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad M_{xy} = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{45}$$

Noten que, salvo por la dimensión y por el factor $-i$ asociado al cambio de definición, los generadores de las rotaciones tienen la misma forma que ya habíamos hallado en las ecuaciones (18) y (19). Pueden convencerse de que

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) , \tag{46}$$

haciendo los conmutadores entre las matrices (recuerden que los subíndices aquí etiquetan a las matrices y no denotan componentes). Este es el álgebra del grupo de Lorentz propio y se nota $so(3,1)$.

Ejercicio: Demostrar que la asignación que a la matriz $M_{\mu\nu}$ le hace corresponder el operador $i\left(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\right)$ es una representación del álgebra de Lorentz. En este caso, estamos tomando una representación sobre el espacio de funciones del espacio-tiempo. Noten que si μ y ν corresponden a las coordenadas espaciales (las notamos con i, j), el operador $i\left(x_i\partial_j - x_j\partial_i\right)$ es una componente del momento angular. Esto es razonable, recuerden que el grupo de Lorentz tiene como subgrupo al grupo de rotaciones.

Ayuda: recuerden que ya conocen cuánto vale el conmutador entre el operador de multiplicación y la derivación

$$[x, \partial_x] = i\,. \tag{47}$$

Ya tenemos el álgebra de Lorentz. Ahora vamos a realizar unos desarrollos que nos permitirán escribir las representaciones de $so(3,1)$ en términos de representaciones de $su(2)$. Estos desarrollos responden a los Ejercicios 8 y 9 de la práctica.

Primero, veamos una forma de reescribir las relaciones entre los generadores $M_{\mu\nu}$ dadas por (46) que definen el álgebra de Lorentz. Definimos

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}\,, \tag{48}$$

$$K_i = M_{i0}\,, \tag{49}$$

donde i, j, k hacen referencia a parte espacial. Veamos cuánto valen los conmutadores entre estos generadores. Una parte ya está hecha, ya que en la clase pasada vimos que

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k\,. \tag{50}$$

Esto nos dice que el álgebra asociada al grupo de rotaciones es $su(2)$. Veamos los otros conmutadores, comenzando por el de dos boosts

$$[K_i, K_j] = [M_{i0}, M_{j0}] = i(g_{i0}M_{0j} + g_{0j}M_{i0} - g_{ij}M_{00} - g_{00}M_{ij}) = \tag{51}$$

$$= i(-g_{00}M_{ij}) = -iM_{ij}\,. \tag{52}$$

Usando que $M_{ij} = -M_{ji}$, podemos reescribir M_{ij} como $(M_{ij} - M_{ji})/2$. Entonces

$$[K_i, K_j] = -i\left[\frac{1}{2}(M_{ij} - M_{ji})\right] = -i\left(\epsilon_{kij}J_k\right) = -i\epsilon_{ijk}J_k\,, \tag{53}$$

donde en la penúltima igualdad utilizamos que $J_k\epsilon_{kmn} = \frac{1}{2}(M_{mn} - M_{nm})$ (para probar esto necesitan usar que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$). Vemos entonces que los generadores de los boosts no conmutan entre sí. El conmutador que resta entre generadores de boosts y rotaciones sale de forma similar. En resumen, se tiene

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k\,, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k\,, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k\,.$$

Noten que de las relaciones anteriores se puede concluir que los boosts no forman un grupo ya que el álgebra de sus generadores no es cerrada, a diferencia de lo que sucede con las rotaciones.

Veamos ahora que definiendo

$$\bar{A} = \frac{1}{2}(\bar{J} - i\bar{K})\,, \quad \bar{B} = \frac{1}{2}(\bar{J} + i\bar{K})\,, \tag{54}$$

donde $\bar{J} = (J_1, J_2, J_3)$ y $\bar{K} = (K_1, K_2, K_3)$, el álgebra de Lorentz es suma directa de dos $su(2)$. Para ello, hallamos los conmutadores entre estos nuevos generadores

$$\begin{aligned}
[A_i, A_j] &= \left[\frac{1}{2}(J_i - iK_i), \frac{1}{2}(J_j - iK_j)\right] = \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] - i[K_i, J_j] - i[J_i, K_j] - [K_i, K_j]\right) = && (55)\\
&= \frac{1}{4}\left(i\epsilon_{ijk}J_k + \epsilon_{ijk}K_k + \epsilon_{ijk}K_k + i\epsilon_{ijk}J_k\right) = \frac{i\epsilon_{ijk}}{2}\left(J_k - iK_k\right) = && (56)\\
&= i\epsilon_{ijk}A_k\,. && (57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[B_i, B_j] &= \left[\frac{1}{2}(J_i + iK_i), \frac{1}{2}(J_j + iK_j)\right] = \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] + i[K_i, J_j] + i[J_i, K_j] - [K_i, K_j]\right) = && (58)\\
&= \frac{1}{4}\left(i\epsilon_{ijk}J_k - \epsilon_{ijk}K_k - \epsilon_{ijk}K_k + i\epsilon_{ijk}J_k\right) = \frac{i\epsilon_{ijk}}{2}\left(J_k + iK_k\right) = && (59)\\
&= i\epsilon_{ijk}B_k\,. && (60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[A_i, B_j] &= \left[\frac{1}{2}(J_i - iK_i), \frac{1}{2}(J_j + iK_j)\right] = \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] - i[K_i, J_j] + i[J_i, K_j] + [K_i, K_j]\right) = && (61)\\
&= \frac{1}{4}\left(i\epsilon_{ijk}J_k + \epsilon_{ijk}K_k - \epsilon_{ijk}K_k - i\epsilon_{ijk}J_k\right) = 0\,. && (62)
\end{aligned}$$

Vemos entonces que los operadores A_i y B_i conmutan entre ellos, es decir, sus álgebras son independientes entre sí, y además, el álgebra de cada uno de ellos es el álgebra de $su(2)$. En términos matemáticos, $so(3,1) = su(2) \oplus su(2)$. De esta propiedad para el álgebra de Lorentz se desprende que:

> Las representaciones del grupo de Lorentz se etiquetan por el par de semienteros (j_1, j_2), que corresponden al espín de la representación de cada $su(2)$.

1.4.4. Espinores

Como un ejemplo de lo visto al final de la sección anterior, vamos a ver que los espinores surgen de las representaciones del grupo de Lorentz etiquetadas por $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Recordemos que al escribir (j_1, j_2) estamos haciendo referencia a dos representaciones del álgebra de $su(2)$, de momentos angulares j_1 y j_2. Para $\left(\frac{1}{2},0\right)$, estamos buscando representar al operador momento angular $\bar{A}$ en término de matrices cuadradas de orden $2\times\frac{1}{2}+1=2$. Esto puede hacerse tomando

$$\bar{A} \to \frac{1}{2}\bar{\sigma}\,, \tag{63}$$

donde $\bar{\sigma}$ es un vector cuyas componentes son las matrices de Pauli. Ya han verificado en mecánica cuántica que esta es una representación de $su(2)$. Por otro lado, el momento angular $\bar{B}$ debe ser representado por matrices de orden $2\times 0+1=1$. La representación en este caso es la trivial

$$\bar{B} \to 0\,. \tag{64}$$

Noten que haber elegido representaciones para $\bar{A}$ y $\bar{B}$ nos permite escribir representaciones para los boosts y las rotaciones (invirtiendo las ecuaciones dadas en (54))

$$\text{Para}\quad \left(\frac{1}{2},0\right):\quad \bar{J}\to\frac{1}{2}\bar{\sigma}\,,\quad \bar{K}\to\frac{i}{2}\bar{\sigma}\,. \tag{65}$$

Trabajando de forma análoga para la representación $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, llegamos a que

$$\text{Para}\quad \left(0,\frac{1}{2}\right):\quad \bar{J}\to\frac{1}{2}\bar{\sigma}\,,\quad \bar{K}\to-\frac{i}{2}\bar{\sigma}\,. \tag{66}$$

Las matrices de Pauli son hermíticas, con lo que las rotaciones también lo son. Los boots en cambio son antihermíticos. Noten que los generadores en la representación $\left(\frac{1}{2},0\right)$ son los adjuntos de los de la representación $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Por eso se dice que estas representaciones son complejas conjugadas.

Los elementos del espacio vectorial sobre el cual actúa la representación de $j=1/2$ se conocen como **espinores** (ver Ejercicio 5 de la práctica). Los espinores asociados a $\left(\frac{1}{2},0\right)$ se conocen como **espinores izquierdos** y se suelen denotar como ψ_L, mientras que los asociados a $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ son los **espinores derechos** ψ_R. Estos espinores se conocen como **espinores de Weyl**. Los espinores de Dirac van a surgir al considerar $\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Volveremos sobre este tema más adelante en el curso.

Un último comentario antes de terminar con esta sección. Noten que estas representaciones del álgebra inducen representaciones en el grupo que no son unitarias, debido a que la representación de los boosts no es hermítica (recuerden que los elementos del grupo son exponenciales de i por los generadores). Esto es general: cualquier representación del grupo de Lorentz construida usando las representaciones finito dimensionales del grupo $SU(2)\times SU(2)$ será no unitaria. No

hay representaciones unitarias de dimensión finita del grupo de Lorentz[3]. Más adelante veremos cómo construir representaciones unitarias de dimensión infinita.

1.5. Grupo de Poincaré

El grupo de Poincaré se obtiene al agregar traslaciones al grupo de Lorentz. Se pueden definir subgrupos del grupo de Poincaré análogos a los vistos para el grupo de Lorentz. Por ejemplo, $P_+^\uparrow$ simboliza el grupo formado por $L_+^\uparrow$ y las traslaciones.

En el Ejercicio 10 de la práctica les pedimos que escriban esquemáticamente las relaciones de conmutación entre los generadores del grupo de Poincaré. A continuación, les dejamos dichas relaciones, intenten darle sentido de acuerdo a lo que ya vieron para el grupo Euclídeo:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0\,, \tag{67}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = -ig_{\mu\sigma}P_\nu + ig_{\nu\sigma}P_\mu\,, \tag{68}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = ig_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + ig_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\,. \tag{69}$$

Para terminar la clase, les dejamos un último ejercicio, al cual volveremos cuando empecemos a estudiar la cuantización de campos libres.

Ejercicio: Probar que $P^2 \equiv P_\mu P^\mu$ y $W := -W_\mu W^\mu$, con $W^\mu \equiv -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}$ (pseudovector de Pauli-Lubanski) son operadores de Casimir de $P_+^\uparrow$ (esto quiere decir que conmutan con todos los elementos del álgebra).

Comentario: Estos operadores nos van a pertimir "etiquetar" a las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré. Si les genera ansiedad y quieren leer un poco más sobre esto ahora, pueden comenzar viendo el artículo de Wikipedia "Wigner's classification" y las referencias que allí se mencionan.

---

[3]Este resultado está asociado a que el grupo no es *compacto*.

Algunas cosas para llevarse de esta clase

- Grupos para recordar: grupo de Lorentz y subgrupos, grupo de Poincaré.
- $so(3,1) = su(2) + su(2) \implies$ Irreps de $SO(3,1)$ se etiquetan por (j_1, j_2) (espín de cada $su(2)$).
- Un espinor es un elemento sobre el cual actúa la irrep de $su(2)$ de $j = 1/2$.
- Espinor de Weyl $\begin{cases} \text{izquierdo} \to \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ \text{derecho} \quad \to \left(0, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$
- Las irreps del grupo de Poincaré van a estar asociadas al concepto de partícula elemental en nuestra teoría.

1.6. Material adicional: El grupo conforme

Vimos que el grupo de Poincaré preserva la distancia o intervalo. El grupo de Poincaré es un subgrupo de un grupo más grande que es muy relevante en la física teórica y se conoce como **grupo conforme**. El grupo conforme deja invariante los conos de luz, es decir, preserva los ángulos. Ante la transformación $x \to x'$, los ángulos se preservan si ocurre

$$ds^2(x') = F(x) ds^2(x)\,, \tag{70}$$

para cierta $F(x)$ adecuadamente regular. Les proponemos que resuelvan el siguiente ejercicio para hallar la forma explícita que tienen las transformaciones conformes a nivel infinitesimal para dimensión del espacio-tiempo $d \geq 3$.

Ejercicio: Considerando transformacions infinitesimales

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)\,, \tag{71}$$

muestre que,

(a) La condicion (70) es equivalente a

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(x) g_{\mu\nu}, \qquad \text{donde } f(x) = F(x) - 1\,. \tag{72}$$

(b) Aplicando derivadas a (72) se obtiene

$$(2-d)\partial_\mu\partial_\nu f = g_{\mu\nu}\Box f\,. \tag{73}$$

(c) Para $d \geq 3$

$$\partial_\mu\partial_\nu f = 0\,. \tag{74}$$

(d) Que en el caso anterior ϵ_μ es una función a lo sumo cuadrática en las coordenadas.

(e) Que las transformaciones admisibles son

$$\begin{aligned}
x'_\mu &= x_\mu + a_\mu \;\;, && \text{Traslaciones}\,.\\
x'_\mu &= (1+\alpha)x_\mu\,, && \text{Dilataciones}\,.\\
x'_\mu &= (g^\nu_\mu + \epsilon^\nu_\mu)x_\nu\,, \;\; \text{con} \;\; \epsilon^\nu_\mu = -\epsilon^\mu_\nu\,, && \text{Rotaciones}\,.\\
x'_\mu &= x_\mu + 2(x.b)x_\mu - b_\mu x^2 \;\;, && \text{Transformaciones especiales conformes}\,.
\end{aligned}$$

Este es el **grupo conforme** en $d \geq 3$. Estas expresiones corresponden a las versiones infinitesimales de las transformaciones. A partir de ellas pueden hallarse expresiones generales para cada transformación.

El grupo conforme en $d \geq 3$ contiene entonces al grupo de Poincaré y además a las dilataciones y las llamadas transformaciones especiales conformes. Para $d = 2$, donde el resultado del inciso (c) del ejercicio anterior no es válido, el grupo conforme se hace más grande. De hecho, en $d = 2$ el grupo conforme contiene infinitos tipos de nuevas transformaciones (aparecen infinitos generadores para su álgebra). Esto hace que los modelos que manifiestan la simetría conforme en dimensión $1+1$ sean muy ricos para el estudio analítico y es uno de los motivos por los cuales las teorías conformes en $1+1$ tienen tanta relevancia en física teórica.

Si les interesa el tema, les recomendamos que lean por ejemplo la introducción del libro "Conformal Field Theory" de los autores P. Di Francesco, P. Mathieu y D. Senechal. También pueden encontrar en la web varios reviews o lectures en los que se suele mencionar al comienzo las motivaciones para estudiar teorías conformes.

2. Ecuaciones de onda relativistas

En esta clase vamos a estudiar algunos aspectos de las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac siguiendo varios ejercicios de la práctica. Dichas ecuaciones de onda relativistas son ejemplos de ecuaciones que manifiestan la simetría ante el grupo de Poincaré que estuvimos estudiando la clase anterior. Es importante remarcar que si bien el tratamiento que haremos de estas ecuaciones será completamente clásico (los campos serán funciones escalares y no operadores) las propiedades que mostraremos serán esenciales más adelante cuando queramos hacer un tratamiento cuántico.

2.1. Ecuación de Klein-Gordon

Recordemos que la ecuación de Klein-Gordon surge originalmente con la intención de obtener una ecuación cuántica relativista. Para ese entonces se conocía la ecuación de Schrödinger que podemos escribir como

$$\hat{H}\psi = \left(\frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}\right)\psi \tag{75}$$

donde $\hat{H} = i\partial_t$ y $\hat{P} = -i\nabla$, y que como notarán se basa en la expresión clásica de la energía $E = P^2/2m + V$. La idea entonces para generalizarla fue utilizar la expresión relativista $E^2 = P^2 + m^2$ promoviendo los escalares a operadores y aplicandola a una función para llegar a $(-\hat{H}^2 + \hat{P}^2 + m^2)\phi = 0$. Finalmente, si uno reemplaza las relaciones anteriores para $\hat{H}$ y $\hat{P}$ obtiene la ecuación de Klein-Gordon

$$\partial_t^2\phi - \nabla^2\phi + m^2\phi = 0.$$

Notemos que para $m = 0$ esto no es nada más que la ecuación de ondas de siempre y agregar el término de masa desde el punto de vista puramente matemático no modifica demasiado; seguimos teniendo una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden que podemos resolver transformando Fourier y que requiere de condiciones iniciales $\phi(t = 0, x, y, z) = \phi_0$ y $\dot{\phi}(t = 0, x, y, z) = \dot{\phi}_0$. Sin embargo, desde el punto de vista físico no sabemos todavía qué es ϕ. Hasta acá por la derivación que hicimos análoga a la de la ecuación de Schrödinger pensaríamos que es una función de onda análoga a ψ cuyo módulo al cuadrado nos daría la probabilidad de encontrar a esta partícula relativista en un dado tiempo y lugar; sin embargo, veremos que esa interpretación ya no es posible. En última instancia la versión cuántica de esta ecuación nos permitirá describir bosones escalares de spin-0 como los piones o el bosón de Higgs.

Ejercicio: (Práctica 1, Ejercicio 11) *Considere la ecuación de (Oskar)Klein - (Walter)Gordon:*

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

siendo ϕ una función de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{C}$. ϕ puede considerarse como una representación del grupo de Lorentz del tipo $(0,0)$ (ver Ejercicio 9).

(a) *Muestre que si ϕ es solución, también lo es $\phi\circ(\Lambda, a)$ (invariancia de Poincaré de la ecuación).*

Comencemos con un poco de notación, para simplificar notaremos a $\phi(t,x,y,z)$ como $\phi(x^\mu)$. Queremos ver que si esta función satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + m^2\phi\right)(x^\sigma) = 0 \quad \forall x \tag{76}$$

entonces $\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)$ también lo hace.

Reemplazando $\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)$ en (76) debemos resolver

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\left(\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)\right). \tag{77}$$

Algo obvio, pero que puede confundir a simple vista es que

$$f'(g(x)) = \left(\frac{d}{dx}f\right)(g(x)) \neq \frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = \frac{d}{dx}\left(f\circ g\right)(x) = f'(g(x))g'(x). \tag{78}$$

Una cosa es la derivada de f evaluada en el punto $g(x)$ y otra cosa es la derivada de la función f compuesta con g evaluada en x. Tengan en cuenta esto porque es un error muy común. Voy a estar poniendo paréntesis de más que los libros suelen obviar para enfatizar esto. En este caso tenemos que derivar la composición

$$\begin{aligned}(77) &= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\left(\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) && (79)\\ &= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\Lambda^\alpha_\sigma\left(\partial_\nu x^\sigma\right)\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma). && (80)\end{aligned}$$

Esto no es más que la regla de la cadena usando notación de índices, por ejemplo,

$$\frac{d}{dx_1}f(g^1(x_1,x_2), g^2(x_1,x_2)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g^1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g^2}{\partial x_1} = \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g^j}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g^j}{\partial x_1} = \left(\partial_j f\right)\left(\partial_1 g^j\right) \tag{81}$$

Notemos que cada vez que queremos hacer la regla de la cadena tenemos que introducir un índice auxiliar nuevo diferente a los otros que tengamos dando vuelta, en el ejemplo anterior sería j, de lo contrario al repetir el índice estaríamos introduciendo una sumatoria que no debería estar.

Usando que $\partial_\nu x^\rho = \delta^\rho_\nu$ (esta es la delta de kronecker de siempre, mantenemos la posición de los índices para recordar cómo se contraen)

$$\begin{aligned}(80) &= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\Lambda^\alpha_\sigma\delta^\sigma_\nu\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) && (82)\\ &= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\Lambda^\alpha_\nu\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) && (83)\\ &= \eta^{\mu\nu}\Lambda^\alpha_\nu\Lambda^\beta_\mu\left(\partial_\alpha\partial_\beta\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma). && (84)\end{aligned}$$

Ahora recordemos que

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \implies \Lambda^\alpha_\mu \eta^{\mu\nu} \Lambda^\beta_\nu = \eta^{\alpha\beta} \tag{85}$$

con lo cual tenemos

$$(84) = \eta^{\alpha\beta} \left(\partial_\alpha \partial_\beta \phi\right) \left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right) + m^2 \phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{86}$$

que es la ecuación de Klein-Gordon solo que evaluada en el punto $(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)$, pero como la ecuación vale para todo punto tenemos que

$$(86) = \eta^{\alpha\beta} \left(\partial_\alpha \partial_\beta \phi\right) \left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right) + m^2 \phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) = 0. \tag{87}$$

Esto prueba que la composición es también una solución de la ecuación de Klein-Gordon y por la tanto la ecuación es invariante ante el Grupo de Poincaré.

(b) *Verifique que esta ecuación es invariante ante el grupo discreto de transformaciones C y P y T, siendo C la operación de conjugar, P la composición con inversión espacial y T la composición con inversión temporal.*

Recordemos la acción de estas operaciones para el caso del campo escalar

$$C\left(\phi(t, \mathbf{x})\right) = \phi^*(t, \mathbf{x}) \tag{88}$$

$$P\left(\phi(t, \mathbf{x})\right) = \phi(t, -\mathbf{x}) \tag{89}$$

$$T\left(\phi(t, \mathbf{x})\right) = \phi(-t, \mathbf{x}) \tag{90}$$

Queremos ver que dada ϕ solución de la ecuación de Klein-Gordon

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + m^2 \phi = 0 \tag{91}$$

ϕ^* también es solución. Conjugando la ecuación anterior tenemos

$$0 = \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + m^2 \phi\right)^* = \left(\eta^{\mu\nu}\right)^* \partial_\mu \partial_\nu \phi^* + \left(m^2\right)^* \phi^* = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi^* + m^2 \phi^* \tag{92}$$

donde usamos que tanto $\eta^{\mu\nu}$ como ϕ y m^2 son reales. Esto es exactamente lo que queríamos ver.

Derivando es fácil ver que al transformar $(t, x, y, z) \to (t, -x, y, z)$ tenemos

$$\partial_x^2 \left(\phi(t, -x, y, z)\right) = -\partial_x \left(\left(\partial_x \phi\right)(t, -x, y, z)\right) = (-1)^2 \left(\partial_x \partial_x \phi\right)(t, -x, y, z) = \tag{93}$$

$$= \left(\partial_x^2 \phi\right)(t, -x, y, z) \tag{94}$$

y que también

$$\partial_y^2 \left(\phi(t, -x, y, z)\right) = \left(\partial_y^2 \phi\right)(t, -x, y, z). \tag{95}$$

es evidente que lo mismo vale cambiando cualquier componente (incluso t) por menos ella. Luego, haciendo explícita la suma sobre la ecuación de Klein-Gordon tenemos que (76) se reduce a

$$\left(\Box + m^2\right) \phi = \partial_t \partial_t \phi - \partial_x^2 \phi - \partial_y^2 \phi - \partial_z^2 \phi + m^2 \phi = 0 \tag{96}$$

y como los términos con dos derivadas no cambian (y la constante tampoco) ante reflexiones de una coordenada es claro que la misma ecuación sigue valiendo para $\phi(t, -x, y, z)$

$$\left(\Box + m^2\right)(\phi(t, -x, y, z)) = \left(\left(\Box + m^2\right)\phi\right)(t, -x, y, z). \tag{97}$$

Esta cuenta vale igual cambiando la reflexión en x por una en t lo que muestra la invariancia ante T. Por último, dado que reflejar una de las coordenadas es solución, reflejando de a una x, y, z es claro que aplicar P también es solución. De hecho las reflexiones espaciales y temporales pertenecen al grupo de lorentz y son un caso particular del ítem anterior ya que solo usamos que la transformación preservaba la métrica pero no cual era su determinante o la componente Λ^0_0.

2.2. Ecuacion de Klein-Gordon para un campo complejo

Ejercicio: (Práctica 1, Ejercicio 12) *Considere la ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo.*

(a) *Muestre que la cantidad (llamada corriente, por su interpretación como corriente conservada que se verá en la guía siguiente)* $j_\mu \equiv -\frac{i}{2}(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*)$ *satisface la ecuación de continuidad* $\partial_u j^u = 0$ *si* φ *satisface la ecuación de Klein-Gordon.*

Veamos que la corriente $j_\mu = -\frac{i}{2}\left(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*\right)$ satisface la ecuación de continuidad para un campo escalar complejo ϕ:

$$\partial_\mu j^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu j_\nu = -\frac{i}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\phi^*\partial_\nu\phi - \phi\partial_\nu\phi^*\right) = \tag{98}$$

$$= -\frac{i}{2}\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi^*\partial_\nu\phi + \phi^*\partial_\mu\partial_\nu\phi - \phi\partial_\mu\partial_\nu\phi^* - \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^*\right) \tag{99}$$

el primer y el último término se cancelan al contraer con $\eta^{\mu\nu}$ y nos queda

$$\partial_\mu j^\mu = -\frac{i}{2}\left(\phi^*\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - \phi\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi^*\right) \tag{100}$$

usando que el campo satisface la ecuación de Klein-Gordon tenemos que

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = -m^2\phi \tag{101}$$

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi^* = -m^2\phi^* \tag{102}$$

y reemplazando

$$\partial_\mu j^\mu = m^2\frac{i}{2}\left(\phi^*\phi - \phi\phi^*\right) = 0. \tag{103}$$

Evidentemente esto seguiría valiendo si la multiplicasemos por cualquier número complejo; sin embargo, es fácil ver que la unidad imaginaria es necesaria para que esta corriente sea real

$$j_\mu = -\frac{i}{2} 2i \mathrm{Im}\left(\phi^* \partial_\mu \phi\right) = \mathrm{Im}\left(\phi^* \partial_\mu \phi\right). \tag{104}$$

(b) *Evalúe la corriente para las soluciones de frecuencia positiva y negativa* $\varphi_\pm(x,t) = e^{\mp ikx}$, *siendo* $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Si tenemos

$$\phi_\pm(x) = e^{\mp ik^\mu x_\mu} \tag{105}$$

entonces su corriente asociada es

$$j_\mu^\pm = -\frac{i}{2}\left(\phi_\pm^* \partial_\mu \phi_\pm - \phi_\pm \partial_\mu \phi_\pm^*\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{\pm ik^\nu x_\nu} \partial_\mu e^{\mp ik^\nu x_\nu} - e^{\mp ik^\nu x_\nu} \partial_\mu e^{\pm ik^\nu x_\nu}\right) = \tag{106}$$

$$= -\frac{i}{2}\left(e^{\pm ik^\nu x_\nu} \left(\mp ik_\mu\right) e^{\mp ik^\nu x_\nu} - e^{\mp ik^\nu x_\nu} \left(\pm ik_\mu\right) e^{\pm ik^\nu x_\nu}\right) = \tag{107}$$

$$= -\frac{i}{2}\left(\left(\mp ik_\mu\right) - \left(\pm ik_\mu\right)\right) = \mp k_\mu. \tag{108}$$

(c) *Muestre que la componente* j_0 *no es definida positiva (o negativa) en el espacio de soluciones generado por soluciones de frecuencia positiva y negativa.*

Del ítem anterior tenemos entonces que $j_0^\pm = \mp k^0 = \mp\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ que es positiva para las soluciones de frecuencia negativa y negativa para las soluciones de frecuencia positiva. Sin embargo, si

$$\phi = a\phi_+ + b\phi_-, \tag{109}$$

entonces

$$j_\mu = \mathrm{Im}\left(\left(a\phi_+ + b\phi_-\right)^* \partial_\mu \left(a\phi_+ + b\phi_-\right)\right) = \mathrm{Im}\left(\left(a^*\phi_+^* + b^*\phi_-^*\right) \partial_\mu \left(a\phi_+ + b\phi_-\right)\right) \tag{110}$$

$$= \mathrm{Im}\left(|a|^2 \phi_+^* \partial_\mu \phi_+ + |b|^2 \phi_-^* \partial_\mu \phi_- + b^*\phi_-^* a \partial_\mu \phi_+ + a^*\phi_+^* b \partial_\mu \phi_-\right) \tag{111}$$

$$= \mathrm{Im}\left(|a|^2 \phi_+^* \partial_\mu \phi_+\right) + \mathrm{Im}\left(|b|^2 \phi_-^* \partial_\mu \phi_-\right) + \mathrm{Im}\left(b^*\phi_-^* a \partial_\mu \phi_+ + a^*\phi_+^* b \partial_\mu \phi_-\right) \tag{112}$$

pero como $\phi_+ = \phi_-^*$, tenemos que $(a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-)^* = a\phi_+ b^* \partial_\mu \phi_-^* = a\phi_-^* b^* \partial_\mu \phi_+$, entonces

$$j_\mu = |a|^2 j_\mu^+ + |b|^2 j_\mu^- + \mathrm{Im}\left(\mathrm{Re}\left(a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-\right)\right) = |a|^2 j_\mu^+ + |b|^2 j_\mu^- \tag{113}$$

y en particular

$$j_0 = |a|^2 j_0^+ + |b|^2 j_0^- = \left(|b|^2 - |a|^2\right) k^0 \tag{114}$$

que no tiene un signo bien definido sino que depende de la combinación lineal.

¿Por qué es importante esta observación de que j_0 no tiene un signo bien definido? Es importante porque la ecuación de Klein-Gordon surgió originalmente con la intención de obtener una versión covariante de la ecuación de Schrodinger y recordemos que la función

de onda, $\psi(\mathbf{x}, t)$, de dicha ecuación estaba asociada a la amplitud de probabilidad, o sea que $|\psi(\mathbf{x}, t)|^2$ nos daba la probabilidad de encontrar a la partícula en la posición x a tiempo t. Matemáticamente, una de las piezas fundamentales en esta interpretación provenía de que al definir la corriente de probabilidad

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right) \tag{115}$$

teníamos la ecuación de continuidad para la probabilidad

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(\mathbf{x}, t)|^2 + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \tag{116}$$

Al notar que la ecuación para $\mathbf{j}$ es idéntica a j_μ con $\mu = 1, 2, 3$ (a menos de un factor) y que (116) es idéntica a (103), uno se ve tentado de interpretar a ϕ como una función de onda con una densidad de probabilidad dada por j_0. Sin embargo, lo que este ejercicio nos dice es que esto no es posible, pues si así fuera j_0 debería ser definida positiva o negativa (si fuese negativa podríamos redefinir a j_μ multiplicandola por -1 y hacerla positiva) para definir correctamente una probabilidad (que por definición es no negativa).

En cambio una interpretación que pareciera ser más adecuada viene del lado del electromagnetismo. Allí recordemos que la conservación de la carga eléctrica podía expresarse por la ley de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{117}$$

siendo ρ la densidad de carga y $\mathbf{j}$ la densidad de corriente. En ese caso ρ podía ser tanto positiva como negativa y era sólo la carga total la conservada; de manera similar podríamos pensar en las soluciones de frecuencia positiva o negativa como portadoras de distintas "cargas". Vale aclarar que todo este ejercicio sólo tiene sentido con un campo escalar complejo ya que si fuese real la corriente que definimos sería idénticamente 0.

Empezamos buscando una generalización de la ecuación de Schrödinger compatible con la relatividad especial. Sin embargo, llegamos a una ecuación que, o bien no tiene una corriente conservada del mismo tipo (si el campo es real) o bien cuando la podemos definir no obtenemos una densidad de probabilidad para la partícula. Si a eso agregamos que ahora debemos dar más condiciones iniciales, pues no sólo debemos dar el valor de ϕ a tiempo inicial sino también su derivada (lo cual no sucedía con la ecuación de Schródinger) y que además transformando Fourier la ecuación de Klein-Gordon obtenemos la relación de dispersión $E^2 = p^2 + m^2$ que permite energías negativas (recordemos que esto no pasaba con Schrodinger por ser el hamiltoniano un operador hermítico) no es difícil entender que esta ecuación haya sido inicialmente descartada.

2.3. Ecuación de Dirac

Así las cosas parecería necesario entonces obtener una nueva ecuación. Dos de los problemas anteriores podrían ser resueltos con una ecuación de primer orden puesto que no necesitaríamos dar $\dot{\phi}_0$ y permitiría potencialmente eliminar el cuadrado que permite energías negativas en la relación de dispersión anterior (de manera tal que $E = \sqrt{p^2 + m^2} > 0$). Esto motivó a Dirac a buscar un operador lineal $O = (A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z + iD\partial_t)$ tal que $O^2 = \nabla^2 - \partial_t^2 \sim E^2 - p^2$, de esta relación se deducen relaciones de conmutación entre A, B, C, D que determinan el álgebra de Dirac. Su solución resulta ser la ecuación de Dirac

$$O\Psi = (i\gamma^\mu \partial_\mu)\Psi = m\Psi$$

por analogía con $O \sim \sqrt{E^2 - p^2} = m$.

Ejercicio: (Práctica 1, Ejercicio 13) *Considere ahora la ecuación de Dirac:*

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0$$

siendo Ψ una función del espacio-tiempo en $\mathbb{C}^4$. Las γ^μ son matrices que cumplen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} 1_{4\times 4}$. Por cada solución Ψ de la ecuación de Dirac, es posible generarse otra solución $\tilde{\Psi}$, definida por $\tilde{\Psi}(x) \equiv S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)$, con $S(\Lambda)$ una matriz asociada a la transformación de Lorentz.

(a) *Muestre que S debe cumplir: $S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$.*

Notemos que la simplicidad que ganamos al tener ahora una ecuación lineal la perdimos en que Ψ ya no es un *escalar* como lo era ϕ, que podía pensarse como una representación del grupo de Lorentz tipo $(0,0)$. Ahora Ψ es un vector, lo que significa que al hacer una transformación de Lorentz no sólo debemos transformar el punto en el que se evalúa, sino además también las componentes de su vector (esto es lo que hace $S(\Lambda)$).

Yendo al ejercicio, si el campo transforma como $\tilde{\Psi}(x) = S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)$ y pedimos que la ecuación de Dirac sea invariante de Lorentz tenemos

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x) = S(\Lambda)S(\Lambda)^{-1}\left(i\gamma^\mu \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu_\mu \partial_\nu - m\right) S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x) \tag{118}$$

$$0 = S(\Lambda)\left(iS(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda)\left(\Lambda^{-1}\right)^\nu_\mu \partial_\nu \Psi - m\Psi\right)(\Lambda^{-1}x) \tag{119}$$

Necesitamos entonces que

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda)\left(\Lambda^{-1}\right)^\nu_\mu = \gamma^\nu \tag{120}$$

(de manera tal que al reemplazar en (119) obtengamos $S(\Lambda^{-1})\left(i\gamma^\nu \partial_\nu \Psi - m\Psi\right)(\Lambda^{-1}x) = 0$). Luego multiplicando (120) por Λ^μ_ν y sumando sobre ν obtenemos

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \tag{121}$$

como queríamos. Lo que nos dice este ejercicio es que si queremos que la ecuación de Dirac sea invariante ante transformaciones de Lorentz, las matrices de Dirac deben transformar de manera covariante. Esto es razonable, puesto que si queremos que la ecuación sea invariante de Lorentz el término $\gamma^\mu\partial_\mu$ debería ser invariante y dado que la derivada transforma como un vector covariante la matriz gamma debería transformar como uno contravariante.

(b) *Compruebe que* $S \equiv e^{\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$, *con* $\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, *satisface la condición previa a primer orden en el parámetro* $\omega^{\mu\nu}$ *de la transformación de Lorentz* Λ.

Sea

$$S(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) \approx 1 + \frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \tag{122}$$

la matriz de transformación de los espinores de Dirac a causa de una tranformación de Lorentz Λ del sistema de coordenadas (donde $\approx$ significa a primer orden en $\omega^{\mu\nu}$). Entonces tenemos que su transformación inversa viene dada por

$$S(\Lambda)^{-1} = \exp\left(-\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) \approx 1 - \frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}. \tag{123}$$

Además podemos expresar a Λ en términos de los generadores del grupo de Lorentz como

$$\Lambda = \exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\sigma\rho}M_{\sigma\rho}\right) \approx 1 + \frac{i}{2}\omega^{\sigma\rho}M_{\sigma\rho} \tag{124}$$

y reemplazando en la relación obtenida en el ejercicio anterior

$$\Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu = S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda) \tag{125}$$

$$\left(1 + \frac{i}{2}\omega^{\sigma\rho}M_{\sigma\rho}\right)^\mu_\nu \gamma^\nu = \left(1 - \frac{i}{2}\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}\right)\gamma^\mu\left(1 + \frac{i}{2}\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}\right) \approx \gamma^\mu + \frac{i}{2}\left(\gamma^\mu\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho} - \Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}\gamma^\mu\right) \tag{126}$$

$$(M_{\sigma\rho})^\mu_\nu\gamma^\nu = (\gamma^\mu\Sigma_{\sigma\rho} - \Sigma_{\sigma\rho}\gamma^\mu) = [\gamma^\mu, \Sigma_{\sigma\rho}]\,. \tag{127}$$

Sólo queda como ejercicio reemplazar las matrices $M_{\sigma\rho}$ y γ^μ que ya conocemos y la matriz $\Sigma_{\sigma\rho}$ que nos dan en la expresión anterior y ver que efectivamente el lado izquierdo coincide con el derecho.

2.3.1. Representación Quiral

Nuevamente nos encontramos con una representación del grupo de Lorentz, ahora dada por las matrices $S(\Lambda)$. Esta representación tiene un álgebra de Lorentz asociada cuyos generadores son las matrices $\Sigma_{\sigma\rho}$, como vimos en el ejercicio anterior. También vimos antes que toda representación del álgebra de Lorentz puede ser escrita como suma directa de 2 su(2). La pregunta natural sería cuál es el espín de estas dos representaciones en este caso particular y qué significan físicamente.

Ejercicio: (Práctica 1, Ejercicio 14) *La representación del grupo de Lorentz (incluyendo paridad) de dimensión más baja es una suma directa de representaciones de espín* $\frac{1}{2}$*:* $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$*. Esta es la representación espinorial. A fin de ver esto, considere la llamada representación quiral de las matrices de Dirac, en las que el único cambio respecto a la representación estandard es en* $\gamma^0_{quiral} = \begin{bmatrix} 0 & 1_{2\times 2} \\ 1_{2\times 2} & 0 \end{bmatrix}$

(a) *Muestre que una transformación de Lorentz preserva espinores de la forma* $\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $\begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix}$.

Como vimos en el ejercicio anterior los generadores de las transformaciones de espinores vienen dados por

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right). \tag{128}$$

Notemos que

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AD & 0 \\ 0 & BC \end{bmatrix}$$

y, como las matrices γ^μ en esta representación tienen justo esa forma, pues

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix},$$

tenemos que $\Sigma_{\mu\nu}$ resulta diagonal por bloques. Además dado que

$$\exp\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(A) & 0 \\ 0 & \exp(B) \end{bmatrix},$$

es claro que la transformación S será de la forma

$$S = \exp\left(\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Así, dado un espinor $\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix}$ en el subespacio

$$T^+ = \left\langle \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\rangle$$

tendremos que $S\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\xi \\ 0 \end{bmatrix} \in T^+$.

De la misma forma, dado un espinor $\begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix}$ en el subespacio

$$T^- = \left\langle \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\rangle$$

tendremos que $S \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B\chi \end{bmatrix} \in T^-$.

Esto que a simple vista puede parecer solo una curiosidad matemática nos dice que la ecuación de Dirac preserva la quiralidad y más adelante veremos que está relacionado con un observable que se puede medir en el laboratorio.

(b) *Calcule los generadores A y B del Ejercicio 9 en esta representación y verifique que los dos tipos de espinores del inciso anterior corresponden a la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$.*

Necesitamos calcular

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_{jk} \tag{129}$$

$$K_i = \Sigma_{i0} \tag{130}$$

(usamos letras latinas para los enteros del 1 al 3) para luego obtener

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\vec{J} - i\vec{K}\right) \tag{131}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\left(\vec{J} + i\vec{K}\right). \tag{132}$$

Recordemos que los generadores de rotaciones en esta representación del álgebra de Lorentz son

$$\Sigma_{jk} = \frac{i}{4}\left[\gamma^j, \gamma^k\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^j\gamma^k - \gamma^k\gamma^j\right) \tag{133}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{134}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} -\sigma^j\sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^j\sigma^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sigma^k\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^k\sigma^j \end{bmatrix}\right) \tag{135}$$

$$= \frac{i}{4}\begin{bmatrix} \sigma^k\sigma^j - \sigma^j\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k\sigma^j - \sigma^j\sigma^k \end{bmatrix} = \frac{i}{4}2i\epsilon_{kji}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} \tag{136}$$

$$= -\frac{1}{2}\epsilon_{kji}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} \tag{137}$$

Mientras que los generadores de boosts están dados por

$$\Sigma_{i0} = \frac{i}{4}\left[\gamma^i, \gamma^0\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^i\gamma^0 - \gamma^i\gamma^0\right) \tag{138}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{139}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix}\right) \tag{140}$$

$$= \frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix} \tag{141}$$

Reemplazando esto en (129) tenemos

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_{jk} = \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon_{qjk}\begin{bmatrix} \sigma^q & 0 \\ 0 & \sigma^q \end{bmatrix} \tag{142}$$

$$= \frac{1}{4}2\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} \tag{143}$$

$$K_i = \Sigma_{i0} = \frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix} \tag{144}$$

donde usamos que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{qjk} = 2\delta_{iq}$, y en virtud de (131) obtenemos

$$A_i = \frac{1}{2}\left(J_i - iK_i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} - i\frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}\right) \tag{145}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{146}$$

$$B_i = \frac{1}{2}\left(J_i + iK_i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} + i\frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}\right) \tag{147}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} \tag{148}$$

como vemos efectivamente $\vec{A}$ actúa sobre T^+ y $\vec{B}$ sobre T^- y además, como son las matrices de Pauli, sabemos que su álgebra es $su(2)$.

Lo que nos dice este ejercicio es algo que ya habíamos adelantado: las soluciones de la ecuación de Dirac son espinores de Dirac Ψ que pueden descomponerse como suma de espinores de Weyl $\Psi = \Psi_L + \Psi_R$ con $\Psi_L \in T^+, \Psi_R \in T^-$ (usando que $T^+ \oplus T^- = \mathbb{C}^4$) y esta descomposición no cambia frente a transformaciones del grupo de Lorentz.

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

...sobre la ecuación de Klein-Gordon

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de segundo orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré y transformaciones C, P y T.
- ϕ es un escalar (representación del grupo de Lorentz del tipo $(0,0)$).
- No define una función de onda.

...sobre la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Psi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de primer orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré.
- Ψ es un vector complejo de 4 componentes.
- $\Psi = \Psi_L + \Psi_R$ es un espinor de Dirac (corresponde a $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$).
- Las componentes Ψ_L y Ψ_R no cambian ante transformaciones de Lorentz.

3. Formulación Lagrangiana de teorías de campos

Hasta ahora la búsqueda de una teoría cuántica compatible con los principios de la relatividad especial nos ha llevado naturalmente a considerar la noción de campos. Hemos encontrado las ecuaciones de movimiento para un campo de Klein-Gordon y de Dirac y hemos estudiado algunas de sus simetrías. En lo que sigue intentaremos comprender cuáles son algunas de las consecuencias físicas de la existencia de estas simetrías. Para ello, y para luego poder introducir interacciones en la teoría, será útil contar con una descripción Lagrangiana.

Recordemos que el Lagrangiano L es un funcional de los campos y sus derivadas $L(\phi, \partial_\mu \phi)$, es decir, un escalar de Lorentz. En teoría de campos, el mismo se escribirá usualmente en términos de una densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ integrando sobre las coordenadas espaciales

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\,. \tag{149}$$

Recordamos la definición de la acción

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{150}$$

Las ecuaciones de movimiento para los campos se obtienen a partir del principio de mínima acción, extremando (150). La ecuación para la acción nos dice que una cuadri-divergencia en el Lagrangiano sólo produce un término de borde en la acción (aplicando el teorema de Stokes) y no modifica las ecuaciones de movimiento. Encontramos entonces que el campo que minimiza la acción debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0. \tag{151}$$

Dada una densidad Lagrangiana, la ecuación de Euler-Lagrange entonces nos dará las ecuaciones de movimiento.

Definiendo el momento canónico conjugado a ϕ como

$$\Pi_\phi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)}, \tag{152}$$

podremos escribir el Hamiltoniano

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(x), \tag{153}$$

con

$$\mathcal{H}(x) = \sum_\phi \Pi_\phi(x) \partial_0 \phi(x) - \mathcal{L}(x). \tag{154}$$

3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Veamos algunos ejemplos de cómo derivar las ecuaciones de Euler-Lagrange. Empecemos con el caso del campo escalar.

Ejemplo: (Práctica 2, Ejercicio 21) *Considere la densidad Lagrangiana* $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2$, *con* ϕ *real.*

(a) *Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange.*

Comencemos calculando las derivadas que necesitaremos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi \tag{155}$$

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial_\mu\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}\left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi\right) = \partial_\mu\left[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\beta\phi + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\frac{\partial\left(\partial_\beta\phi\right)}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] \tag{156}$$

$$= \partial_\mu\left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\delta^\mu_\alpha\partial_\beta\phi + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\delta^\mu_\beta\right) = \partial_\mu\left(\frac{1}{2}2\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right) = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi \tag{157}$$

Luego reemplando estas en la ecuación de Euler-Lagrange tenemos

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = -m^2\phi - \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi, \tag{158}$$

que es la ecuación de Klein-Gordon que ya habíamos visto. Podemos además obtener el momento canónico conjugado de ϕ

$$\Pi_\phi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi \tag{159}$$

con lo que el Hamiltoniano resulta ser

$$\mathcal{H}(x) = \partial_0\phi\partial_0\phi(x) - \mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi} + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{160}$$

que podemos reconocer como la suma de la energía cinética más la potencial.

(b) *Considere ahora la densidad Lagrangiana* $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*$, *donde* ϕ *ahora es un campo complejo. Note que ahora no está el factor* $\frac{1}{2}$ *en el término cinético y en el de masa. Escribiendo* $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, *con* ϕ_1 *y* ϕ_2 *reales, obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange para* ϕ_1 *y* ϕ_2 *y muestre que ambos cumplen la ecuación de Klein-Gordon.*

Expandamos primero el Lagrangiano

$$\begin{aligned}
\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^* - m^2\phi\phi^* &= \\
&= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\partial_\nu\left(\phi_1 - i\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\left(\phi_1 - i\phi_2\right) \\
&= \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_1 + i\partial_\mu\phi_2\partial_\nu\phi_1 - i\partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_1 + \partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) \\
&= \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_1 + \partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)
\end{aligned} \tag{161}$$

Calculemos ahora las derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_j} = -m^2 \phi_j \,, \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_j)} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi_j \,. \tag{162}$$

Reemplazando entonces en la ecuación de Euler-Lagrange

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_j} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_j)} = -m^2 \phi_j - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi_j \tag{163}$$

obtenemos que los campos ϕ_1 y ϕ_2 satisfacen la ecuación de Klein-Gordon.

(c) *Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange considerando ϕ y ϕ^* como variables independientes y verifique que obtiene las mismas ecuaciones de movimiento que en el inciso anterior.*

Calculando las derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -m^2 \phi \tag{164}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi^*\right) = \partial_\nu \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi\right) \tag{165}$$

Introduciendo esto en la ecuación de Euler-Lagrange

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = -m^2 \phi - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi \tag{166}$$

y reemplazando aquí $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ tenemos

$$0 = -m^2 \left(\phi_1 + i\phi_2\right) - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \left(\phi_1 + i\phi_2\right) \tag{167}$$

y como la parte imaginaria y real deben anularse por separado obtenemos

$$0 = -m^2 \phi_j - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi_j \tag{168}$$

con lo cual reobtuvimos las ecuaciones de movimiento del item anterior.

Tenemos entonces que el momento canónico conjugado a ϕ es

$$\Pi_\phi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^* \tag{169}$$

y análogamente $\Pi_{\phi^*}(x) = \partial_0 \phi$ con lo que el Hamiltoniano resulta ser

$$\mathcal{H}(x) = \partial_0 \phi^* \partial_0 \phi(x) + \partial_0 \phi \partial_0 \phi^*(x) - \mathcal{L}(x) = \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi + m^2 |\phi|^2 \tag{170}$$

$$= \dot{\phi_1}^2 + \left(\nabla \phi_1\right)^2 + m^2 \phi_1^2 + \dot{\phi_2}^2 + \left(\nabla \phi_2\right)^2 + m^2 \phi_2^2 \tag{171}$$

que reconocemos como la suma de dos Hamiltonianos de campos escalares reales independientes (para que aparezcan los factores 1/2 de la ec. (160) podríamos haber empezado escribiendo $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ en lugar de $\phi = \phi_1 + i\phi_2$).

Veamos ahora el caso del campo de Dirac.

Ejemplo: (Práctica 2, Ejercicio 26 a) *Considere ahora el Lagrangiano de un campo de Dirac con masa m.*

(a) *Derive la ecuación de Dirac como ecuación de Euler-Lagrange de este Lagrangiano.*

A partir del Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi \tag{172}$$

podemos obtener la ecuación de movimiento para un campo de Dirac

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} = i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi. \tag{173}$$

El momento canónico conjugado a Ψ es entonces

$$\Pi_\Psi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \Psi)} = \bar{\Psi} i\gamma^0 = i\Psi\gamma^0\gamma^0 = i\Psi^\dagger \tag{174}$$

mientras que el momento canónico conjugado de $\Psi^\dagger$ es

$$\Pi_{\Psi^\dagger}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \Psi^\dagger)} = 0 \tag{175}$$

y el Hamiltoniano resulta

$$\mathcal{H} = \bar{\Psi}\left[-i\gamma^j \partial_j + m\right]\Psi. \tag{176}$$

La densidad Lagrangiana dada por la ecuación (172) (cuando se piensa a los campos evaluados en algún punto) da un número que en principio no es real. Sin embargo, es posible definir una densidad Lagrangiana real, que lleve a las mismas ecuaciones de movimientos (y las mismas cantidades conservadas). Para ver esto, pueden leer la discusión que se hace en el libro de Greiner alrededor de las ecuaciones 5.27 y 5.28.

En general, uno puede construir Lagrangianos a partir de notar que hay ciertas simetrías y pedir que se respeten algunas condiciones adicionales que facilitan el estudio de los mismos (por ejemplo, para requerir que las ecuaciones de movimiento tengan un orden particular que nos permita resolverlas fijando datos iniciales sobre los campos y derivadas de cierto orden). Veamos un último ejercicio, donde se ilustra esta construcción para campos vectoriales.

Ejercicio: (Práctica 2, Ejercicio 22) *Escriba la forma más general posible del Lagrangiano invariante de Lorentz para un campo cuadrivectorial con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo. ¿A qué se reduce este Lagrangiano en el caso en que además se requiera invariancia ante transformaciones de gauge? Derive las ecuaciones de movimiento y compare con las de Maxwell.*

Los términos que tenga este Lagrangiano deben ser escalares de Lorentz y deberemos construirlos contrayendo índices del campo cuadrivectorial A^μ y la derivada ∂_μ. Como los índices se contraen de a pares deberá haber una cantidad par de estos objetos. Si tenemos 2 las opciones son $A^\mu A_\mu$ y $\partial_\mu A^\mu$. Sin embargo, podemos obviar este último, ya que es una cuadri-divergencia que en la acción sólo contribuye con un término de borde.

Si tenemos 4 objetos, las opciones son $\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu = (\partial_\mu A^\mu)^2$, $(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu)$, $(\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu)$, $(\partial_\mu \partial_\nu A^\nu) A^\mu$ y $\partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu$. El último término es también una cuadri-divergencia de $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu$, con lo cual podemos ignorarlo. Además, el término $(\partial_\mu \partial_\nu A^\nu) A^\mu$ difiere del primero también en una cuadri-divergencia $((\partial_\mu \partial_\nu A^\nu) A^\mu + (\partial_\nu A^\nu)(\partial_\mu A^\mu) = \partial_\mu (\partial_\nu A^\nu A^\mu))$, con lo cual también lo descartamos.

El Lagrangiano más general, con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo, es entonces

$$\mathcal{L} = \alpha (\partial_\mu A^\mu)^2 + \beta (\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu) + \gamma (\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu) + \delta A_\mu A^\mu. \tag{177}$$

Para hallar la ecuación de movimiento calculemos las derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 2\delta A^\mu \tag{178}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A_\mu)} = \alpha 2\eta^\mu_\nu (\partial_\sigma A^\sigma) + \beta 2\partial_\nu A^\mu + \gamma 2\partial^\mu A_\nu \tag{179}$$

y reemplazando en la ecuación de Euler-Lagrange obtenemos

$$\delta A^\mu - \partial^\nu \left[\alpha \eta^\mu_\nu (\partial_\sigma A^\sigma) + \beta \partial_\nu A^\mu + \gamma \partial^\mu A_\nu\right] = 0 \tag{180}$$

$$\delta A^\mu = (\alpha + \gamma)\partial^\mu (\partial_\sigma A^\sigma) + \beta \Box A^\mu. \tag{181}$$

con lo cual podemos eliminar el término con α del Lagrangiano sin perder generalidad. Así el lagrangiano resulta

$$\mathcal{L} = \beta (\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu) + \gamma (\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu) + \delta A_\mu A^\mu. \tag{182}$$

Si pedimos que además tenga invariancia de gauge, o sea que al reemplazar $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ las ecuaciones de movimiento no cambien

$$\delta (A^\mu + \partial^\mu \Lambda) = \gamma \partial^\mu (\partial_\sigma A^\sigma + \Box \Lambda) + \beta \Box (A^\mu + \partial^\mu \Lambda) \tag{183}$$

pidiendo que esto coincida con la ecuación de movimiento original tenemos

$$\delta \partial^\mu \Lambda = \gamma \partial^\mu \Box \Lambda + \beta \partial^\mu \Box \Lambda \quad \forall \Lambda, \tag{184}$$

en particular tomando una función Λ tal que $\Box\Lambda = 0$ tenemos que $\delta = 0$ y la ecuación anterior resulta $(\gamma + \beta)\partial^\mu \Box\Lambda = 0$ lo que nos dice que $\gamma = -\beta$. Así, el Lagrangiano resulta

$$\mathcal{L} = \beta\left(\partial_\mu A^\nu\right)\left(\partial^\mu A_\nu\right) - \beta\left(\partial_\mu A^\nu\right)\left(\partial_\nu A^\mu\right) = -2\beta\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right). \tag{185}$$

que coincide con el Lagrangiano para el campo de Maxwell.

3.2. Teorema de Noether

La razón por la que hemos hecho tanto hincapié en las simetrías de una teoría es que existe una relación entre las simetrías de esta y las leyes de conservación. En nuestro caso, una simetría es una transformación de los campos que deja invariante la acción. Las simetrías pueden ser *internas* si sólo afectan al campo y no cambian las coordenadas o *espacio-temporales* en caso contrario. Por ejemplo, si tenemos un campo escalar sin masa su Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \tag{186}$$

es invariante si hacemos la transformación $\phi \to \phi + \alpha$ con α una constante. Esta es una simetría interna. Mientras que cambiar $\phi(x) \to \phi(x+\alpha)$ también es una simetría pero espacio-temporal. Estas son simetrías continuas puesto que uno puede variar α de manera continua. Mientras que las simetrías discretas son por ejemplo C, P y T.

El teorema de Noether nos dice que a cada simetría continua de un sistema le corresponde una ley de conservación. Matemáticamente, si ante una transformación de simetría infinitesimal (en esta clase nos limitamos a transformaciones de los campos)

$$\phi \to \phi(x) + \alpha\Delta\phi \tag{187}$$

el lagrangiano pasa a

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \alpha\partial_\mu\mathcal{J}^\mu \tag{188}$$

entonces tenemos la ecuación de conservación

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{189}$$

siendo

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi - \mathcal{J}^\mu. \tag{190}$$

En el caso de la simetría interna para el campo escalar sin masa que mostramos antes tenemos

$$\phi \to \phi(x) + \alpha \tag{191}$$

y como el lagrangiano no cambia $\mathcal{J}^\mu = 0$ tenemos la ley de conservación

$$0 = \partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \partial^\mu \phi \tag{192}$$

que en este caso no nos aporta nada nuevo pues es la ecuación de movimiento para el campo.

Otra simetría interna que podemos considerar es multiplicar a un campo escalar complejo por un número complejo $\phi \to e^{i\theta}\phi$ pues

$$\mathcal{L} \to \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi e^{i\theta})(\partial_\nu \phi^* e^{-i\theta}) - m^2 e^{i\theta}\phi e^{-i\theta}\phi^* = \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi^*) - m^2\phi\phi^*. \tag{193}$$

Si tratamos a los campos ϕ y ϕ^* como independientes, esta simetría genera las transformaciones infinitesimales

$$\phi \to \phi + i\theta\phi\,, \quad \phi^* \to \phi^* - i\theta\phi^*\,, \tag{194}$$

y la corriente conservada resulta ser

$$j^\mu = i\left[(\partial^\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu\phi)\right] \tag{195}$$

que es la misma corriente que habíamos estudiado anteriormente y ahora podemos ver que proviene de la simetría interna del campo ante multiplicar por una fase. Como mencionamos previamente veremos que esta corriente estará asociada con la carga del campo.

La clase siguiente vamos a estudiar con más detalle distintos ejemplos de simetrías, haciendo énfasis particular en las simetrías espacio-temporales.

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- Ecuación de Euler-Lagrange para un campo: $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0$
- Algunos Lagrangianos para recordar:
  - Klein-Gordon (cargado): $\mathcal{L}_{\text{K-G}} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*$
  - Dirac: $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\Psi} i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi$
  - Maxwell: $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$
- Idea del Teorema de Noether: A cada simetría continua de un sistema le corresponde una corriente conservada.

La clase pasada dimos un primer vistazo rápido al teorema de Noether, que nos dice que por cada transformación de simetría del sistema tenemos una cantidad conservada. Escribimos una versión reducida, que aplicaba al caso particular en el cual el tipo de transformaciones no afectaba las coordenadas del espacio-tiempo. En la clase de hoy, vamos a estudiar la versión general del teorema. Calcularemos las cantidades conservadas que aparecen asociadas a la simetría bajo transformaciones del grupo de Poincaré. Comencemos entonces recordando la versión general del teorema de Noether, cuya demostración ya han visto en la clase teórica.

Supongamos que tenemos una transformación infinitesimal, que se escribe en términos de ciertos parámetros ϵ^a, que cambia las coordenadas y los campos de la siguiente manera

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A^\mu_a(x) \tag{196}$$

$$\phi_i(x) \to \phi'_i(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\,. \tag{197}$$

El índice a etiqueta la cantidad de parámetros infinitesimales, mientras que el índice i el número de campos si hay más de uno o de componentes del campo si el mismo es por ejemplo un espinor de Dirac. Decimos que esta transformación es una **simetría** si deja invariante la acción. En dicho caso, el teorema de Noether asegura que

$$\partial_\mu j^\mu_a = 0\,, \tag{198}$$

sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento, siendo

$$j^\mu_a = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A^\nu_a(x) \partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] \right\} - A^\mu_a(x) \mathcal{L}(x)\,. \tag{199}$$

Además, la cantidad

$$Q_a = \int d^3x j^0_a(x)\,, \tag{200}$$

es una **constante de movimiento**, es decir, no cambia en el tiempo (sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento).

Para entender el teorema, y cómo usarlo, lo mejor es empezar con un ejemplo. Comencemos viendo el caso en el cual se tiene invariancia ante traslaciones.

3.2.1. Invariancia bajo traslaciones. Tensor de energía-impulso

Para ilustrar cuáles son las corrientes conservadas asociadas a la invariancia ante traslaciones vamos a seguir el siguiente ejercicio.

Ejercicio: (Práctica 2, Ejercicio 24) *Considere la densidad Lagrangiana del campo escalar complejo del ejercicio 21.*

(a) *Halle las corrientes de Noether asociadas a la invariancia ante traslaciones espaciales y temporales.*

Recordamos el Lagrangiano de Klein-Gordon para un campo complejo (cargado)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi \,. \tag{201}$$

Una traslación espacio-temporal en un parámetro ϵ^μ,

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu = x^\mu + \epsilon^\nu g^\mu_\nu \,, \tag{202}$$

(noten que según la ecuación (196), en este caso es $A^\mu_\nu = g^\mu_\nu$) induce la siguiente transformación en los campos

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x' - \epsilon) = \phi(x) \,, \tag{203}$$

y lo análogo para ϕ^* (esto es idéntico a lo que hacían en electromagnetismo para ver cómo escribir la densidad de carga transformada por una traslación en términos de la densidad de carga original). Comparando la ecuación (203) con (197), vemos que en este caso, resulta

$$F_{i,\mu} = 0 \,, \tag{204}$$

para todo i y μ. Noten que identificamos $a \to \mu$, porque hay cuatro traslaciones infinitesimales, una por cada dirección del espacio-tiempo. El índice i toma los valores 1 y 2 (asociados a ϕ y ϕ^*).

Hasta aquí, lo único que hicimos fue ver qué sucede con las coordenadas y los campos ante una traslación. Para poder aplicar el teorema de Noether, necesitamos ver si esta transformación es una simetría, es decir, si deja invariante la acción. En este caso, mostrar esto es sencillo, ya que el mismo Lagrangiano queda invariante

$$\mathcal{L}'(x') \equiv \mathcal{L}\left[\phi'(x'), \frac{\partial \phi'}{\partial x'}, x'\right] = \mathcal{L}\left[\phi(x), \frac{\partial \phi}{\partial x'}, x'\right] \,, \tag{205}$$

pero como ϵ^μ es un cuadrivector constante, derivar respecto a x' es lo mismo que derivar respecto a x, por lo que

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}\left[\phi(x), \frac{\partial \phi}{\partial x}, x'\right] \,. \tag{206}$$

El último término en el corchete, x', está puesto porque podría pasar que el Lagrangiano dependiera explícitamente de las coordenadas. En nuestro caso, la única dependencia en las coordenadas aparece a través de los campos, de modo que podemos obviar eso. De este modo, resulta

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}\left[\phi(x), \frac{\partial \phi}{\partial x}\right] = \mathcal{L}(x) \,, \tag{207}$$

y como $d^4x' = d^4x$ la acción también es invariante. Esto nos dice que las traslaciones son simetrías y entonces hay corrientes conservadas. Recurriendo a la ecuación (199) y

recordando que $A^\mu_\nu = g^\mu_\nu$ y $F_\mu = 0$, las corrientes quedan

$$\begin{aligned} j^\mu_\sigma &= \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A^\nu_\sigma(x) \partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] \right\} - A^\mu_\sigma(x) \mathcal{L}(x) = && (208) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} g^\nu_\sigma \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} g^\nu_\sigma \partial_\nu \phi^* - g^\mu_\sigma \mathcal{L} = && (209) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\sigma \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \partial_\sigma \phi^* - g^\mu_\sigma \mathcal{L} = && (210) \\ &= \partial^\mu \phi^* \partial_\sigma \phi + \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi^* - g^\mu_\sigma \left(\partial_\nu \phi \partial^\nu \phi^* - m^2 \phi^* \phi \right) = && (211) \\ &= \partial^\mu \phi^* \partial_\sigma \phi + \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi^* - g^\mu_\sigma \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi^* + g^\mu_\sigma m^2 \phi^* \phi \,. && (212) \end{aligned}$$

En general, a la corriente j^μ_σ asociada a la invariancia ante traslaciones se la llama **tensor de energía-impulso**, y se la denota con la letra θ. Como acabamos de ver, en el caso del campo escalar cargado, el tensor de energía-impulso es

$$\theta^\mu_\sigma = \partial^\mu \phi^* \partial_\sigma \phi + \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi^* - g^\mu_\sigma \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi^* + g^\mu_\sigma m^2 \phi^* \phi \,. \tag{213}$$

Verifiquen explícitamente, <u>usando las ecuaciones de movimiento</u>, que el tensor de energía-impulso es una corriente conservada como lo asegura el teorema de Noether, es decir, que

$$\partial_\mu \theta^\mu_\sigma = 0 \,. \tag{214}$$

(b) *Halle la expresión de la energía y el momento como integrales de ϕ y sus derivadas*

A partir de la corriente conservada podemos encontrar cuatro cargas/constantes de movimiento dadas por la ecuación (200)

$$Q_\sigma = \int d^3x j^0_\sigma(x) = \int d^3x \theta^0_\sigma(x) \,. \tag{215}$$

Q^0 es la **energía** o Hamiltoniano (ahora veremos que el integrando es justamente la densidad Hamiltoniana dada por la ecuación (160)) y Q^i ($i = 1, 2, 3$) son las componentes del **momento**. Veamos explícitamente cuánto valen. La energía es

$$\begin{aligned} E &\equiv Q^0 = \int d^3\, x \theta^{00}(x) = && (216) \\ &= \int d^3x \left(\partial^0 \phi \partial^0 \phi^* + \bar{\nabla}\phi \cdot \bar{\nabla}\phi^* + m^2 \phi^* \phi \right) = && (217) \\ &= \int d^3x \left(|\partial^0 \phi|^2 + |\bar{\nabla}\phi|^2 + m^2 |\phi|^2 \right) \,. && (218) \end{aligned}$$

Noten que tanto la energía como la *densidad de energía* θ^{00} son positivas. Esto es algo general de la teoría clásica de campos: la densidad de energía es positiva. Veremos sin embargo que cuando entre en juego la mecánica cuántica, tendremos configuraciones de campos para las cuales la densidad de energía podrá tomar valores negativos en algunas regiones del espacio-tiempo, siempre resultando en una energía positiva. Esto ocurre por ejemplo en el efecto Casimir.

Volvamos al ejercicio para hallar la componente i-ésima del impulso, que resulta

$$P^i \equiv Q^i = \int d^3x\, j^{0i}(x) = \tag{219}$$

$$= \int d^3x \left(\partial^0\phi^*\partial^i\phi + \partial^i\phi^*\partial^0\phi\right) . \tag{220}$$

Observaciones:

(a) Ya lo hemos resaltado varias veces, pero no viene mal recordar nuevamente que las corrientes se conservan y las cargas son constante para configuraciones de campo que son soluciones de las ecuaciones de movimiento.

(b) Luego del ejercicio que desarrollamos recién, les resultará sencillo ver que la expresión del tensor de energía-impulso para cualquier teoría de campos descripta por un Lagrangiano $\mathcal{L}$ y campos ϕ_i está dada por

$$\theta^{\mu\nu} = \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial^\nu\phi_i\right] - g^{\mu\nu}\mathcal{L} . \tag{221}$$

(c) Los invitamos a que, usando la expresión anterior, calculen los tensores de energía-impulso del campo de Dirac (Ejercicio 26) y el de Maxwell (Ejercicio 28, caso $m = 0$). Los resultados son

$$\theta^{\mu\nu}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - g^{\mu\nu}\bar{\psi}\left(i\gamma^\sigma\partial_\sigma - m\right)\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi , \tag{222}$$

$$\theta^{\mu\nu}_{\text{Maxwell}} = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F^{\mu\alpha}\partial^\nu A_\alpha , \tag{223}$$

donde $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$. Noten que para simplificar la expresión de $\theta^{\mu\nu}_{\text{Dirac}}$ usamos que

$$\left(i\gamma^\sigma\partial_\sigma - m\right)\psi = 0$$

si ψ es solución de las ecuaciones de movimiento (que es el caso en el cual estas corrientes se conservan). El Lagrangiano de Dirac $\bar{\psi}\left(i\gamma^\sigma\partial_\sigma - m\right)\psi$ se anula entonces para soluciones de las ecuaciones de movimiento, por lo que al momento de calcular corrientes conservadas asociadas a simetrías del mismo podemos anular el último término de la ecuación (199).

(d) Muchas veces se nota al tensor de energía-impulso como $T^{\mu\nu}$. Nosotros vamos a reservar la letra T para referirnos al tensor de energía-impulso simetrizado o *tensor de Belinfante*, como se lo conoce usualmente por la persona que sugirió cómo construirlo. Noten que si a cualquier corriente conservada le sumamos una cantidad que tenga cuadridivergencia nula, la cantidad resultante también será una corriente conservada. Podemos usar esta libertad para

construir un tensor de energía-impulso que sea simétrico, el procedimiento es el siguiente. Definimos

$$T_{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial^\sigma \chi_{\sigma\mu\nu} \,, \tag{224}$$

donde $\chi_{\sigma\mu\nu}$ es un tensor arbitrario antisimétrico en sus dos primeros índices, es decir

$$\chi_{\sigma\mu\nu} = -\chi_{\mu\sigma\nu} \,, \tag{225}$$

ya que esta condición nos asegura que tenga divergencia nula y que entonces $T_{\mu\nu}$ también sea una corriente conservada. En efecto

$$\begin{aligned} \partial^\mu T_{\mu\nu} &= \partial^\mu \theta^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\sigma \chi_{\sigma\mu\nu} = && (226)\\ &= \partial^\mu \theta^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^\mu \partial^\sigma \left(\chi_{\sigma\mu\nu} + \chi_{\mu\sigma\nu}\right) = \partial^\mu \theta^{\mu\nu} = && (227)\\ &= 0 \,. && (228) \end{aligned}$$

Se verifica además que $T^{\mu\mu}$ y $\theta^{\mu\mu}$ tienen las mismas cargas conservadas. La libertad en la elección de $\chi_{\sigma\mu\nu}$ puede utilizarse para construir un tensor de energía momento simétrico ante el intercambio $\mu \leftrightarrow \nu$. Por ejemplo, para simetrizar el tensor de energía-impulso del campo de Maxwell dado por la ecuación (223) podemos tomar $\chi^{\sigma\mu\nu} = F^{\mu\sigma} A^\nu$ y se obtiene

$$T^{\mu\nu}_{\text{Maxwell}} = \theta^{\mu\nu}_{\text{Maxwell}} + \partial_\sigma F^{\mu\sigma} A^\nu = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{\mu\alpha} F^\nu_\alpha \,, \tag{229}$$

que como pueden ver es un tensor simétrico (y además, las densidades de energía y momento son $T^{00} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E^2} + \mathbf{B^2}\right)$ y $T^{0i} = \left(\mathbf{E} \times \mathbf{B}\right)^i$, respectivamente, que ya deben identificar como densidad de energía de los campos y componentes del vector de Poynting).

Quienes hayan cursado relatividad general pueden leer la discusión alrededor de la ecuación (1.48) de las notas de Tong para ver otra forma de obtener el tensor de energía-impulso que automáticamente nos da una forma simétrica. Tener un tensor de energía-impulso simétrico es práctico pero también necesario en algunas circunstancias (por ejemplo, si estamos utilizándolo como fuente de las ecuaciones de Einstein).

3.2.2. Invariancia bajo el grupo de Lorentz

En la clase de teoría ya vieron cuáles son las corrientes conservadas asociada a la invariancia ante el grupo de Lorentz. Para no repetir la misma derivación, veamos el ejercicio análogo para el campo de Dirac.

Ejercicio: (Práctica 2, Ejercicio 27) *Halle la expresión de la carga conservada asociada a la invariancia ante rotaciones en el caso del Lagrangiano de Dirac. Distinga la contribución a*

la carga conservada de la parte orbital e intrínseca (presencia o ausencia respectivamente de derivadas espaciales de los campos).

Recordamos el Lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \,. \tag{230}$$

Como vimos al comienzo del curso, una transformación de Lorentz de las coordenadas se puede escribir como

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \,, \tag{231}$$

donde

$$\Lambda^\mu_\nu = \left(e^{\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}}\right)^\mu_\nu \,. \tag{232}$$

Recuerden que los índices $\alpha\beta$ que acompañan a M se utilizan para etiquetar distintas matrices y no sus componentes. Los índices $\mu\nu$ en la ecuación anterior hacen en cambio referencia a la componente $\mu\nu$ de la matriz exponencial. Una transformación de Lorentz infinitesimal se obtiene considerando que los parámetros $\omega_{\alpha\beta}$ son pequeños, en cuyo caso, expandiendo la exponencial en (232) y quedándonos a primer orden en los parámetros podemos reescribir la transformación (231) como

$$x'^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(M^{\alpha\beta}\right)^\mu_\nu x^\nu \,, \tag{233}$$

donde $\left(M^{\alpha\beta}\right)^\mu_\nu$ significa la componente $\mu\nu$ de la matriz que se etiqueta con los índices $\alpha\beta$ (usamos el paréntesis para diferenciar estos índices).

Ante una transformación de Lorentz, el campo de Dirac transforma con la matriz $S(\Lambda)$ dada por la ecuación (122), es decir

$$\psi(x) \to \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') = S(\Lambda)\psi(x) \,. \tag{234}$$

La diferencia con el caso del campo escalar es que el campo de Dirac tiene es un vector de 4 componentes, la matriz $S(\Lambda)$ lo que hace es implementar la transformación de Lorentz sobre dichas componentes (esto es análogo a lo que hacían para analizar la transformación ante rotaciones del campo eléctrico). Recuerden que las matrices $\Sigma^{\alpha\beta}$ (que aparecen en la definición de $S(\Lambda)$ y las matrices $M^{\alpha\beta}$ (que aparecen en Λ) no son las mismas aunque satisfacen el mismo álgebra (Lorentz), pero los números $\omega^{\alpha\beta}$ sí lo son (por eso los escribimos con la misma la letra). Esto nos asegura que estamos haciendo la misma transformación de Lorentz a las coordenadas y los campos.

La transformación que estamos haciendo es infinitesimal, por lo que reescribimos la ecuación (234) para parámetros ω pequeños

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = \psi(x) + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}\psi(x) \,, \tag{235}$$

que escrita para cada componente ψ^σ del espinor, para llevarlo a la forma dada por la ecuación (197) y que sea sencillo leer $F_{i,a}$, queda

$$\psi'^\sigma(x') = (S(\Lambda))^\sigma_\rho\, \psi^\rho(x) = \psi^\sigma(x) + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)^\sigma_\rho\, \psi^\rho(x)\,. \tag{236}$$

Mirando las ecuaciones (196) y (197), e identificando $a \to \alpha\beta$, $\epsilon^a \to \omega^{\alpha\beta}$, obtenemos

$$A^\mu_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}(M_{\alpha\beta})^\mu_\nu x^\nu\,, \tag{237}$$

$$F_{\sigma,\alpha\beta} = \frac{i}{2}(\Sigma_{\alpha\beta})_{\sigma\rho}\psi^\rho(x)\,. \tag{238}$$

Con esto ya estamos en posición de calcular la corriente conservada asociada a la simetría ante transformaciones de Lorentz. ¿Simetría? Todavía no dijimos que esto efectivamente dejaba invariante la acción, pero sí lo hace. Esto está asociado a que el Lagrangiano de Dirac (230) es una suma de dos términos que son escalares ante transformaciones de Lorentz (puede ser útil que vean el video en el que discutimos las propiedades de transformación de los bilineales de Dirac). En general, como dijimos la clase pasada, vamos a estudiar justamente Lagrangianos que sean escalares de Lorentz.

Les dejamos un par de consejos esenciales para que continúen este cálculo y luego daremos el resultado final:

1. Hay una forma sencilla de escribir las componentes de las matrices $M^{\alpha\beta}$ en términos de la métrica de Minkowski
$$(M^{\alpha\beta})^\mu_\nu = -i\left(g^{\alpha\mu}g^\beta_\nu - g^{\beta\mu}g^\alpha_\nu\right)\,. \tag{239}$$
Pueden verificar explícitamente esta propiedad viendo la forma que tiene cada una de estas 6 matrices en la sección 1.4.3.

2. El último término de la corriente dada por la ecuación (199) donde aparece $\mathcal{L}$ se anula (ya que el Lagrangiano de Dirac se anula cuando los campos son soluciones de las ecuaciones de movimiento, como mencionamos al escribir el tensor de energía-impulso del campo de Dirac).

3. Para llegar a la expresión que vamos a escribir (así pueden comparar) será necesario que utilicen además la expresión del tensor de energía-impulso del campo de Dirac dada por la ecuación (222).

Trabajando un poco (no hay en principio nada esencial que puedan perderse si entendieron todo lo anterior), deberían llegar a ver que las corrientes conservadas son[4]

$$j^\mu_{\alpha\beta} = x_\alpha\theta^\mu_\beta - x_\beta\theta^\mu_\alpha + \bar{\psi}\gamma^\mu\Sigma_{\alpha\beta}\psi\,. \tag{240}$$

[4]Miren la ecuación (7.4.15) del libro de Weinberg para ver que esta corriente escrita en términos del tensor de energía impulso simetrizado - que allí llaman con la letra θ en lugar de T - toma una forma mucho más sencilla. Este es uno de los motivos prácticos por los cuales se utiliza el tensor simetrizado.

De acuerdo a las convenciones que utilicen (hay muchas definiciones de por medio, que cambian factores y unidades imaginarias) pueden obtener distintos signos y factores, pero deberían llegar a la misma estructura. Noten que al calcular las constantes de movimiento usando la ecuación (200) tenemos

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3x\, j^0_{\alpha\beta}(x) = \tag{241}$$

$$= \int d^3x\, \left(x_\alpha \theta^0_\beta - x_\beta \theta^0_\alpha\right) + \int d^3x\, \bar{\psi}\gamma^0 \Sigma_{\alpha\beta}\psi\,. \tag{242}$$

Este es el **tensor de momento angular generalizado** del campo y está compuesto por dos partes que para partículas no relativistas corresponden al momento angular "orbital" (primer sumando en la última línea) y al espín (segundo sumando). Noten que el espín del campo está asociado a la representación del álgebra de Lorentz dada por las matrices Σ. Cuando estudiemos la cuantización del campo de Dirac volveremos a hablar sobre esto.

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- Teorema de Noether: si las transformaciones

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A^\mu_a\,,$$

$$\phi_i(x) \to \phi'_i(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\,,$$

dejan invariante la acción $S = \int d^4x\, \mathcal{L}(x)$ entonces

$$\partial_\mu j^\mu_a = 0$$

sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento, siendo

$$j^\mu_a = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A^\nu_a(x)\partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\right]\right\} - A^\mu_a(x)\mathcal{L}(x)\,.$$

Además, las cargas

$$Q_a = \int d^3x j^0_a(x)\,,$$

son constantes de movimiento.

- Corrientes conservadas por la invariancia ante el grupo de Poincaré:
  - Traslaciones: Tensor de energía-impulso $\theta^{\mu\nu} = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\partial^\nu \phi_i\right] - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$.
  - Lorentz: Tensor de momento angular generalizado.

3.3. Material adicional: Segundo Teorema de Noether

El teorema de Noether que vimos, o Primer Teorema de Noether, dice que por cada transformación que es una simetría (continua) de nuestro sistema podemos encontrar una corriente que se conserva sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento. Hay un segundo teorema de Noether, que da identidades que valen en general, incluso fuera del espectro de soluciones de las ecuaciones de movimiento.

Sin entrar en muchos detalles, el Segundo Teorema de Noether dice que si la acción es invariante ante un grupo de transformaciones locales (es decir, que son parametrizadas por un conjunto de funciones $\lambda(x)$, que dependen del punto del espacio-tiempo), existe entonces un conjunto de identidades entre cantidades construidas a partir de la acción, que se conocen como Identidades de Bianchi. Dichas identidades valen en general, aún si los campos que aparecen en ellas no son soluciones de las ecuaciones de movimiento.

Cuando el grupo es, por ejemplo, el de transformaciones de gauge del electromagnetismo,

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \lambda(x)\,, \tag{243}$$

las identidades de Bianchi son simplemente las ecuaciones de Maxwell.

4. Teorías libres

Hoy vamos a comenzar a estudiar las teorías cuánticas de campos relativistas. Comenzaremos estudiando la cuantización de teorías libres, es decir, de aquellas para las cuales no aparecen términos de interacción (o sea, términos con tres o más campos) en el Lagrangiano. Una de los motivos por los cuales las teorías libres son relevantes es porque se asume que en los procesos de scattering los estados asintóticos pueden ser descriptos por una teoría libre. Más allá de esto, el estudio de las teorías libres nos permitirá entender algunos aspectos de las teorías cuánticas de campos relativistas.

En esta primera parte utilizaremos el método de cuantización canónica. Sobre el final del curso la idea es presentar otro método de cuantización, el de integrales de camino.

Tengan en cuenta que vamos a trabajar en la representación de Heisenberg de la mecánica cuántica: los operadores son los que evolucionan en el tiempo, mientras que los estados están fijos. Si no recuerdan este picture, les recomendamos que realicen un breve repaso antes de leer esta clase.

4.1. Cuantización canónica del campo escalar real

4.1.1. Hamiltoniano

Gran parte de la clase de hoy será un repaso de cosas que han visto en la clase teórica, ya que como muchas cosas se van a repetir en la cuantización del resto de los campos libres, creemos que es bueno que estas temas se afiancen.

Empezamos recordando que el Hamiltoniano del campo escalar real clásico es

$$H = \int d^3\mathbf{x}\,\mathcal{H} = \int d^3\mathbf{x}\,\frac{1}{2}\left[\pi^2 + \left(\bar{\nabla}\phi\right)^2 + m^2\phi^2\right] , \tag{244}$$

donde $\pi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \partial_0\phi$. Vamos a utilizar negrita para diferenciar al vector tridimensional $\mathbf{x}$ del cuadrivector x.

Es posible generalizar la definición de corchete de Poisson para contemplar el caso en el cual tenemos grados de libertad continuos, para ello hace falta introducir lo que se conoce como derivada funcional. No vamos a dar el detalle en esta sección, pero si les interesa pueden revisar el Apéndice A. Allí damos la definición de la derivada funcional y algunos ejercicios. No es esencial que lo miren, por lo pronto nos alcanza con saber que el corchete de Poisson se puede generalizar para contemplar el caso en el que se tiene un continuo de grados de libertad, y que

usando dicha generalización se tiene

$$\{\phi(x_0,\mathbf{x}),\pi(x_0,\mathbf{y})\} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{245}$$
$$\{\phi(x_0,\mathbf{x}),\phi(x_0,\mathbf{y})\} = 0, \tag{246}$$
$$\{\pi(x_0,\mathbf{x}),\pi(x_0,\mathbf{y})\} = 0. \tag{247}$$

Este es el punto de partida de la cuantización canónica que ya conocen. Vamos a introducir campos cuánticos hermíticos $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$ que cumplan las siguientes relaciones de conmutación a tiempos iguales (tomamos $t_0 \equiv x_0 = 0$)

$$\left[\hat{\phi}(0,\mathbf{x}),\hat{\pi}(0,\mathbf{y})\right] = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{248}$$
$$\left[\hat{\phi}(0,\mathbf{x}),\hat{\phi}(0,\mathbf{y})\right] = 0, \tag{249}$$
$$\left[\hat{\pi}(0,\mathbf{x}),\hat{\pi}(0,\mathbf{y})\right] = 0. \tag{250}$$

Lo que hicimos fue usar la regla de correspondencia $\{\,,\,\} \to \frac{1}{i\hbar}[\,,\,]$, tomando $\hbar = 1$. En este caso, el Hamiltoniano cuántico queda con la misma forma que (244) simplemente reemplazando los campos clásicos por su versiones cuánticas

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{x}\,\frac{1}{2}\left[\hat{\pi}^2 + \left(\bar{\nabla}\hat{\phi}\right)^2 + m^2\hat{\phi}^2\right]. \tag{251}$$

En general, pueden aparecer problemas asociados al orden de los operadores y tendremos que dar una prescripción para construir el Hamiltoniano cuántico (ya veremos algo de esto más adelante y también cómo se visualizan estos problemas de orden desde el formalismo de integrales de camino).

Volvamos al Hamiltoniano. Vamos a ver que hay mucho en común entre el oscilador armónico y esta teoría de campos. Escribimos el desarrollo de los campos en modos de Fourier

$$\hat{\phi}(0,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\mathbf{k}\,\hat{q}_{\mathbf{k}}(0)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{252}$$
$$\hat{\pi}(0,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\mathbf{k}\,\hat{p}_{\mathbf{k}}(0)\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{253}$$

Usando que $\hat{\phi}^\dagger = \hat{\phi}$, $\hat{\pi}^\dagger = \hat{\pi}$ resulta

$$\hat{q}^\dagger_{\mathbf{k}} = \hat{q}_{-\mathbf{k}}, \tag{254}$$
$$\hat{p}^\dagger_{\mathbf{k}} = \hat{p}_{-\mathbf{k}}. \tag{255}$$

Para aligerar la notación omitimos poner explícitamente la parte temporal $t_0 = 0$). Reescribimos el Hamiltoniano (251) en término de estos nuevos operadores

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\left[\hat{\pi}^2 + \left(\bar{\nabla}\hat{\phi}\right)^2 + m^2\hat{\phi}^2\right] = \tag{256}$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}}\left\{\hat{p}_{\mathbf{k}}\hat{p}_{\mathbf{k}'}e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + \hat{q}_{\mathbf{k}}\hat{q}_{\mathbf{k}'}e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}\left[(i\mathbf{k})\cdot(i\mathbf{k}') + m^2\right]\right\} = \tag{257}$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{k}\left(\hat{p}_{\mathbf{k}}\hat{p}^\dagger_{\mathbf{k}} + \omega^2_{\mathbf{k}}\hat{q}_{\mathbf{k}}\hat{q}^\dagger_{\mathbf{k}}\right), \tag{258}$$

donde en la última igualdad usamos las ecuaciones (254) y (255), y definimos $\omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Esta última expresión es muy parecida a la expresión del Hamiltoniano de un conjunto infinito (uno por cada $\mathbf{k}$) de osciladores armónicos. Para ver esto explícitamente, definimos

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left(\hat{q}_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}^\dagger_{\mathbf{k}} \right) , \tag{259}$$

con lo que

$$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left(\hat{q}^\dagger_{\mathbf{k}} - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \hat{p}_{\mathbf{k}} \right) . \tag{260}$$

Les dejamos a ustedes que calculen las siguientes expresiones de los campos a tiempo constante en términos de los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$. Por ejemplo, el campo ϕ (a tiempo 0) queda

$$\phi = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) . \tag{261}$$

Utilizando las relaciones de conmutación entre $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$, pueden verificar que

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'} \right] = \delta^3 \left(\mathbf{k} - \mathbf{k}' \right) , \tag{262}$$

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'} \right] = 0 , \tag{263}$$

$$\left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'} \right] = 0 . \tag{264}$$

Recuerden que estos son los operadores sin evolucionar, a tiempo constante $t_0 = 0$. Noten que estos operadores cumplen relaciones análogas a los operadores de creación y destrucción del oscilador armónico, con la diferencia de que ahora aparece una delta de Dirac en lugar de una delta de Kronecker, lo que está asociado a que ahora los grados de libertad son continuos.

En términos de los operadores de creación y destrucción, el Hamiltoniano queda

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} \left(\hat{p}_{\mathbf{k}} \hat{p}^\dagger_{\mathbf{k}} + \omega^2_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}} \hat{q}^\dagger_{\mathbf{k}} \right) = \tag{265}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k}\, \omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \right) = \tag{266}$$

$$= \int d^3\mathbf{k}\, \omega_{\mathbf{k}} \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \delta^3(\mathbf{0}) \right] , \tag{267}$$

donde para escribir la última igualdad utilizamos la ecuación (262).

En resumen: vimos que, reescribiendo los campos en términos de los operadores de creación y destrucción, el Hamiltonano de la teoría se diagonaliza y corresponde al de un conjunto (continuo) de osciladores armónicos, salvo por el término donde aparece la delta de Dirac. Sobre el final de la clase vamos a entender un poco mejor de dónde proviene esta divergencia. Por ahora, vamos a dar una prescripción para librarnos de ella.

4.1.2. Orden normal de operadores

Recordemos la ecuación de Heisenberg, que dicta la evolución temporal de un operador $\hat{A}$

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = i\left[\hat{H}, \hat{A}\right] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\,. \tag{268}$$

La evolucion de $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ viene dada entonces por

$$\frac{d\hat{a}_{\mathbf{k}}}{dt} = i\left[\hat{H}, \hat{a}_{\mathbf{k}}\right] = i\left[\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{k}'\,\omega_{\mathbf{k}'}\left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\hat{a}_{\mathbf{k}'} + \hat{a}_{\mathbf{k}'}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\right], \hat{a}_{\mathbf{k}}\right] = -i\omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}\,, \tag{269}$$

donde en la primera igualdad utilizamos que $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ no depende explícitamente del tiempo y para llegar al resultado final es necesario utilizar las relaciones de conmutación entre $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$. La solución de esta ecuación es

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}(t) = e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}\hat{a}_{\mathbf{k}}\,. \tag{270}$$

Decimos que $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ *evoluciona con frecuencia positiva*. Trabajando en forma análoga, pueden ver que

$$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t) = e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} = e^{-i(-\omega_{\mathbf{k}})t}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\,. \tag{271}$$

Decimos que $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ *evoluciona con frecuencia negativa*. Con estos ingredientes, podemos pasar a dar la definición del orden normal de operadores.

Sean χ_1 χ_2 dos operadores que se pueden escribir como suma de operadores que evolucionan con frecuencia positiva (+) y negativa (-)

$$\chi_1 = \chi_1^+ + \chi_1^-\,, \quad \chi_2 = \chi_2^+ + \chi_2^-\,, \tag{272}$$

entonces, el **orden normal** de la composición $\chi_1\chi_2$ se define como

$$:\chi_1\chi_2: \equiv \chi_1^-\chi_2^- + \chi_1^-\chi_2^+ + \chi_2^-\chi_1^+ + \chi_1^+\chi_2^+\,. \tag{273}$$

En términos simples, el orden normal lleva todos los operados que evolucionan con frecuencia negativa hacia la izquierda.

Ejemplo: Vamos a escribir el integrando de la ecuación (266) en orden normal y veremos cómo esto hace que ya no aparezca la divergencia que veíamos en la ecuación (267). Tenemos

$$:\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}: = :\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}: + :\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}:, = \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} = 2\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}\,, \tag{274}$$

ya que $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ tiene sólo componente de evolución positiva y $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ sólo componente de evolución negativa. Veamos entonces que si en lugar de (266) consideramos tomar orden normal al Hamiltoniano, tenemos

$$\hat{H} =: \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{k}\,\omega_{\mathbf{k}}\left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\right) := \int d^3\mathbf{k}\,\omega_{\mathbf{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\,\hat{a}_{\mathbf{k}}\,, \tag{275}$$

donde la delta de Dirac ya no aparece, pues intencionalmente la hicimos desaparecer. Cuando hablemos del Hamiltoniano del campo escalar en las prácticas vamos a referirnos siempre a su expresión en orden normal (a menos que indiquemos lo contrario). Vamos a ver que esto se corresponderá con pedir que el estado de vacío de nuestra teoría tenga energía cero.

4.1.3. Evolución de los campos

Como ya calculamos la evolución de los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ (ecuaciones (270) y (271), respectivamente), para obtener por ejemplo la evolución de $\hat{\phi}$, podemos insertar estas expresiones en (261) y obtenemos

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right) && (276)\\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right) = && (277)\\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{-ik^\mu x_\mu} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}e^{ik^\mu x_\mu}\right) . && (278)
\end{aligned}$$

Les dejamos que hagan lo análogo para hallar la evolución de $\hat{\pi}$. También podríamos haber planteado la ecuación de Heisenberg para $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$ y resolverlas. Vamos a plantearlas porque nos van a permitir ver algo interesante. A partir de la ecuación de Heisenberg (268) verifiquen que resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\phi}}{dt} &= \hat{\pi}\,, && (279)\\
\frac{d\hat{\pi}}{dt} &= \left(\bar{\nabla}^2 - m^2\right)\hat{\phi}\,. && (280)
\end{aligned}$$

Desacoplando las ecuaciones (simplemente derivando la primera respecto al tiempo y reemplazando $\dot{\hat{\pi}}$ por lo que da la segunda de ellas) vemos que $\hat{\phi}$ satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\Box + m^2\right)\hat{\phi} = 0\,. \tag{281}$$

La expresión para la evolución del campo dada por (278) verifica naturalmente esta ecuación porque la evolución temporal es única (fijados los valores de los campos a un tiempo dado). También es posible ver esto explícitamente ya que $\hat{\phi}$ es una combinación lineal de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon $e^{\pm ik^\mu x_\mu}$ (dichas soluciones las vieron en las clases de teoría cuando estudiaron la ecuación de Klein-Gordon).

Los campos cuantizados van a cumplir en general las ecuaciones de movimiento que cumplían sus contrapartes clásicas. Por este motivo, uno sabe que la expresión para la evolución temporal del campo estará dada por una combinación lineal de las soluciones clásicas de la ecuación

asociada. Como el campo cuántico es un operador, los coeficientes de esta combinación lineal serán operadores (en el ejemplo que vimos, estos "coeficientes" son $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$) y sus relaciones de conmutación se pueden obtener a partir de las del campo y su momento conjugado. Esto es lo que se les pide que hagan en el Ejercicio 30.

4.1.4. Espacio de estados

Como dijimos anteriormente, las relaciones de conmutación entre los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ son análogas a las del oscilador armónico. Esto nos sugiere pensar en construir nuestro espacio de Hilbert como un espacio de Fock.

Asumimos que existe un estado $|0\rangle$, que llamamos **vacío**[5], que es aniquilado por todos los operadores de destrucción: $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$ para todo $\mathbf{k}$. En el siguiente ejercicio vamos a ver cómo construir el espacio de Hilbert a partir de este estado.

Ejercicio: (Práctica 3, Ejercicio 32) *A partir del estado de mínima energía (denominado vacío, por su interpretación como estado desprovisto de partículas, y denotado por $|0\rangle$) puede construirse todo el espacio de Hilbert mediante la acción de los operadores de creación. A fin de ver esta relación:*

(a) *Muestre que un estado de la forma $\prod_{i=1}^n \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle$ es autoestado del Hamiltoniano y el operador momento con autovalores iguales a $\sum_{i=1}^n \omega_{\mathbf{k_i}}$ y $\sum_{i=1}^n \mathbf{k_i}$ respectivamente.*

Vamos a ver que el estado propuesto es autoestado del Hamiltoniano (275). Para ello vamos a usar inducción. Supongamos que lo enunciado vale para cierto n, es decir, que resulta

$$\hat{H}\prod_{i=1}^n \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle = \left(\sum_{i=1}^n \omega_{\mathbf{k_i}}\right)\prod_{i=1}^n \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle \ . \tag{282}$$

Veamos que en ese caso también vale para $n+1$.

$$\begin{aligned}
\hat{H}\prod_{i=1}^{n+1} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle &= \hat{H}a^\dagger_{\mathbf{k_{n+1}}}\prod_{i=1}^{n} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle = && (283)\\
&= \left[\hat{H},\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_{n+1}}}\right]\prod_{i=1}^{n} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_{n+1}}}\hat{H}\prod_{i=1}^{n} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle = && (284)\\
&= \omega_{\mathbf{k_{n+1}}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_{n+1}}}\prod_{i=1}^{n} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_{n+1}}}\left(\sum_{i=1}^n \omega_{\mathbf{k_i}}\right)\prod_{i=1}^{n} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle = && (285)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n+1} \omega_{\mathbf{k_i}}\right)\prod_{i=1}^{n+1} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}}|0\rangle \ , && (286)
\end{aligned}$$

[5]En el enfoque axiomático de la teoría de campos, la existencia del vacío es uno de los axiomas. En clases futuras mencionaremos algo más sobre dicho enfoque.

donde usamos que $\left[\hat{H}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\right] = \omega_{\mathbf{k_i}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ (ya lo derivaron cuando revisaban las cuentas de esta clase al escribir la ecuación de movimiento para $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$). Como (282) vale en particular para $n = 1$ (para verlo hay que usar el conmutador $\left[\hat{H}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\right] = \omega_{\mathbf{k_i}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ y notar que $\hat{H}$ aniquila al vacío), por inducción vale para todo entero positivo, como queríamos demostrar.

Les dejamos a ustedes que vean, usando argumentos similares a los de recién, que

$$\hat{P}^i \prod_{i=1}^{n} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}} |0\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{k_i}\right) \prod_{i=1}^{n} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k_i}} |0\rangle \ , \tag{287}$$

donde $\hat{P}^i = \int d^3\mathbf{k}\, \mathbf{k^i}\, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\, \hat{a}_{\mathbf{k}}$ (se obtiene cuantizando la expresión clásica y tomando orden normal).

(b) *Verifique que el estado anterior es autoestado del operador número definido como* $\hat{N} = \int d^3\mathbf{k}\, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\, \hat{a}_{\mathbf{k}}$ *con autovalor* n.

Este ejercicio sale en forma similar al anterior, pero de hecho podemos demostrarlo usando el resultado del inciso anterior para el Hamiltoniano. Ustedes saben que $\omega_{\mathbf{k}}$ es una función precisa y determinada, no está libre. Pero noten que en la resolución del inciso anterior la forma que tenía $\omega_{\mathbf{k}}$ no importaba (al menos no usamos su forma explícita para nada de lo que demostramos). Hacer la cuenta que se pide en este inciso es lo mismo que tomar $\omega_{\mathbf{k}} = 1$ en el resultado del inciso anterior ($\hat{H}$ pasa a ser $\hat{N}$ y $\sum_{i=1}^{n} \omega_{\mathbf{k_i}}$ se convierte en $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$). Remarcamos nuevamente que esto no significa que uno pueda elegir $\omega_{\mathbf{k}}$, que está fijo y es igual a $\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Un estado de la forma $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} |0\rangle$ puede considerarse como el estado de una partícula de cuadrimomento definido $(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$. El espacio de Hilbert de la teoría es un espacio de Fock, una suma directa del espacio generado por el vacío, el de una partícula con momento definido, el de dos partículas, etc.

Noten que, siendo rigurosos, los estados de un número fijo de partículas con momento definido no pueden estar en el espacio de Hilbert, como puede verse al calcular formalmente su norma. Esto es análogo a lo que ocurre en mecánica cuántica no relativista, donde no existen estados de momento definido en el espacio de Hilbert. Sin embargo, es posible suavizar la expresión anterior con una función de los momentos espaciales (que decaiga suficientemente rápido para momentos grandes), para obtener un estado del espacio de Hilbert. En un enfoque más riguroso, el campo se trata entonces como una funcional o distribución, su argumento no es un punto del espacio-tiempo sino una función. Estos detalles los van a estudiar en los ejercicios 33 y 34. Como en mecánica cuántica no relativista, en general podremos manipular estas expresiones sin meternos en problemas, pero tengan presentes las sutilezas necesarias que hay que incorporar para que dichas expresiones tengan sentido.

4.1.5. Estado de vacío. Energía de punto cero

Como asumimos que el estado de vacío es aniquilado por todos los operadores de destrucción, dicho estado es un autoestado del Hamiltoniano (tomado con orden normal) de autovalor cero. Tomar orden normal en el Hamiltoniano resultó entonces en fijar la energía del estado de vacío (o *energía de punto cero*) a cero. Volvamos un poco atrás e intentemos comprender de dónde proviene la delta de Dirac de la ecuación (267).

Si escribimos la densidad de energía T^{00} del campo (el integrando de la ecuación (251)) en términos de $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}$, rastreamos que el término de la delta de la ecuación (267) proviene de la contribución a T^{00} que va como $\Lambda \equiv \int d^3\mathbf{k}\,\omega_{\mathbf{k}}/2$. Esto nos da un contribución a $\hat{H}$ de la forma

$$\int d^3\mathbf{x}\,\Lambda = \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k}\,\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} = \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{k}\,\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}{2}\,. \tag{288}$$

Esta es la contribución responsable por la aparición de la delta de Dirac en la ecuación (267). Noten que se pueden diferenciar dos tipos de divergencias:

- **Divergencia infrarroja.** Esta divergencia está asociada a que estamos integrando sobre todo el espacio $\mathbb{R}^3$, y como el integrando no tiene dependencia en $\mathbf{x}$, se tiene $\int d^3\mathbf{x} = \infty$. Este tipo de divergencias se llaman infrarrojas porque aparecen para distancia grande (frecuencia pequeña). Noten que esta divergencia no aparece si trabajamos en un volumen finito o si nos interesa la energía por unidad de volumen (en esta misma sección escribimos el origen de esta contribución desde la densidad de energía, donde naturalmnte no hay ninguna integral en el espacio).
- **Divergencia ultravioleta.** Esta divergencia aparece al integrar en los momentos. Noten que para $|\mathbf{k}|$ grande, $\omega_{\mathbf{k}} \sim |\mathbf{k}|$ y por lo tanto la integral diverge. Como diverge para frecuencia alta (pequeña distancia) se la llama ultravioleta. Para altas energías, nuestra teoría podría dejar de ser válida (por ejemplo, si hubiera una discretización del espacio-tiempo) y entonces esta divergencia no aparecería dado que deberíamos integrar los momentos hasta cierto *cut-off* k_{max}.

Como el término infinito en $\hat{H}$ no cambia las ecuaciones de movimiento de ningún operador ya que es una "constante" (por lo que conmuta con todo), vamos a utilizar la prescripción de tomar orden normal para eliminarlo. Como dijimos, esto equivale a fijar que la energía del estado de vacío es cero.

Comentario para los que vieron relatividad general: Recién mencionamos que hay una contribución a la densidad de energía dada por $T^{00} = \Lambda + \ldots$. Esta contribución sólo puede provenir de tener un tensor de energía-impulso de la forma $T^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu} + \ldots$. Esto nos dice que la energía de punto cero del campo contribuye al tensor de energía impulso en forma de constante

cosmológica. Pensando que hay una escala fundamental (la escala de Planck), que nos fija un cut-off para los momentos, se obtiene un valor finito muy grande para la energía de punto cero del campo. Las mediciones de la constante cosmológica dan sin embargo números muy pequeños (120 órdenes de magnitud menores que los cálculos de la energía de punto cero). No se entiende por qué la energía de punto cero no contribuye o, si lo hace, qué determina que dichas contribuciones se cancelen como para resultar en un valor tan pequeño para la constante cosmológica. Este es el denominado problema de la constante cosmológica.

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- El campo escalar real cuantizado describe un conjunto infinito continuo de osciladores armónicos cuánticos.

- Los campos cuánticos son solución de las ecuaciones diferenciales que cumplen sus análogos clásicos. La expresión genérica de un campo cuántico es entonces una combinación lineal de sus soluciones clásicas y los coeficientes de dicha combinación son operadores. Las relaciones de conmutación entre estos coeficientes se obtienen a partir de las de los campos.

- El ordenamiento normal de operadores consiste en mover hacia la izquierda todos los operadores de creación. Esto fija a cero la energía del vacío.

- Algunas expresiones para el campo escalar real:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik^\mu x_\mu} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} e^{ik^\mu x_\mu} \right) , \quad \hat{\pi}(x) = \partial_0 \hat{\phi}(x) \, .$$

$$\hat{P}^\mu = \int d^3\mathbf{x} \, : \hat{T}^{0\mu}(\mathbf{x}) : = \int d^3\mathbf{k} \, k^\mu \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \, ,$$

Recuerden que $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

- El espacio de Hilbert para el campo real es un espacio de Fock que se construye actuando con los operadores $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ sobre el vacío.

4.1.6. Interpretación de partícula

La clase anterior comentamos que los estados construidos a partir de actuar con n operadores de creación sobre el vacío podían considerarse como estados de n partículas con momentos definidos. Vamos a ver, siguiendo un ejercicio, que los estados $\hat{\phi}(t,\mathbf{x})\,|0\rangle$ describen lo más cercano que uno puede tener a la noción de partícula localizada en un punto del espacio $\mathbf{x}$ a tiempo t.

Ejercicio: (Práctica 3, Ejercicio 35) *El objetivo de este problema es analizar en qué medida la teoría del campo escalar real libre, restringida a los estados de una partícula, puede ser considerada como una generalización relativista de la teoría de Schrödinger, y el operador $\hat{\phi}\,(x)$ puede ser asimilado a un operador de creación de una partícula en un punto del espacio.*

(a) *Mostrar que los vectores $\hat{\phi}\,(t,\boldsymbol{x})$ a tiempo t fijo generan todo el espacio de Hilbert H_1 de una partícula.*

Para simplificar el desarrollo, tomamos el tiempo fijo $t=0$ (el resultado no cambia). Lo que se pretende ver en este inciso es que haciendo combinaciones lineales de los estados dados por $\hat{\phi}\,(0,\mathbf{x})\,|0\rangle$ podemos generarnos un estado de una partícula con una distribución arbitraria de momentos. Es decir, queremos ver que podemos fabricarnos un estado de la forma

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\, c(\mathbf{k})\,|\mathbf{k}\rangle\ , \tag{289}$$

donde $|\mathbf{k}\rangle \equiv \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\,|0\rangle$ y $c(\mathbf{k})$ es una función arbitraria (que es la que determina la distribución de momentos del estado). Mantuvimos los factores $(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}$ al hacer la combinación lineal, pero podrían absorberse en la definición de $c(\mathbf{k})$ (lo que importa es que estamos haciendo una combinación lineal).

Veamos qué forma tiene el estado $\hat{\phi}\,(0,\mathbf{x})\,|0\rangle$. Recordando la expresión (278) para $t=0$, tenemos

$$\hat{\phi}\,(0,\mathbf{x})\,|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,|\mathbf{k}\rangle\ , \tag{290}$$

ya que $\hat{a}_{\mathbf{k}}\,|0\rangle = 0$ y $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\,|0\rangle = |\mathbf{k}\rangle$. Una combinación lineal arbitraria de estos estados, con coeficientes $f(\mathbf{x})$, tendrá entonces la forma

$$\int d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x})\hat{\phi}\,(0,\mathbf{x})\,|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\left[\int d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right]|\mathbf{k}\rangle\ . \tag{291}$$

Para conseguir un estado de la forma (289) necesitamos que el término entre corchetes en (291) sea igual a $c(\mathbf{k})$. Esto se puede conseguir sencillamente tomando a $f(\mathbf{x})$ como la transformada de Fourier de $c(\mathbf{k})$.

Vimos entonces que una combinación lineal de estados $\hat{\phi}\,(0,\mathbf{x})\,|0\rangle$ generan el espacio de Hilbert de una partícula a tiempo t fijo H_1.

(b) *Se define* $|t, \boldsymbol{x}\rangle := \hat{\phi}(t, \boldsymbol{x})|0\rangle$ *(supuestos vectores de una partícula localizados) y la función* $\Psi(t, \boldsymbol{x}) := \langle t, \boldsymbol{x}| \Psi\rangle$, *con* $|\Psi\rangle \in H_1$ *(supuesta función de onda de una partícula). Probar que* $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ *satisface la ecuación de Klein-Gordon. Mostrar que además contiene sólo frecuencias positivas, y por ello satisface una ecuación más restrictiva, de primer orden en derivadas temporales*

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}) = +\sqrt{m^2 - \nabla^2}\Psi(t, \boldsymbol{x}) \ . \tag{292}$$

Mostrar que en este caso la corriente conservada de Klein-Gordon da lugar a una probabilidad conservada y positiva, pero la densidad de probabilidad no es definida positiva.

Ver que se satisface la ecuación de Klein Gordon es sencillo ya que el mismo campo $\hat{\phi}$ la satisface. En efecto

$$\begin{aligned}
\left(\Box + m^2\right)\Psi(t, \mathbf{x}) &= \left(\Box + m^2\right)\langle t, \mathbf{x}| \Psi\rangle = && (293)\\
&= \left(\Box + m^2\right)\langle 0|\hat{\phi}(t, \mathbf{x})|\Psi\rangle = && (294)\\
&= \langle 0|\left(\Box + m^2\right)\hat{\phi}(t, \mathbf{x})|\Psi\rangle = 0\,, && (295)
\end{aligned}$$

donde usamos que el campo es real (y por lo tanto es igual a su conjugado) y que cumple la ecuación de Klein Gordon (281).

Que $\Psi(t, \mathbf{x})$ contiene sólo frecuencias positivas significa que evoluciona sólo con frecuencias positivas. Esto también es sencillo de ver, ya que los operadores $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ aniquilan al vacío al actuar hacia la izquierda

$$\begin{aligned}
\Psi(t, \mathbf{x}) &= \langle 0|\hat{\phi}(t, \mathbf{x})|\Psi\rangle = && (296)\\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\langle 0|\left(\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right)|\Psi\rangle = && (297)\\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\langle 0|\hat{a}_{\mathbf{k}}|\Psi\rangle e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}\,. && (298)
\end{aligned}$$

Noten que el operador $\sqrt{m^2 - \nabla^2}$ está bien definido ya que $(m^2 - \nabla^2)$ es positivo, como pueden ver calculando

$$(m^2 - \nabla^2)\Psi(t, \mathbf{x}) = (m^2 + \mathbf{k}^2)\Psi(t, \mathbf{x}) = \omega^2_{\mathbf{k}}\Psi(t, \mathbf{x}) \ . \tag{299}$$

Veamos ahora que se cumple la ecuación (292). Para ello calculamos

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t, \mathbf{x}) = i\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\langle 0|\hat{a}_{\mathbf{k}}|\Psi\rangle e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} = \omega_{\mathbf{k}}\Psi(t, \mathbf{x}) \ , \tag{300}$$

y mirando (299) vemos que resulta

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = +\sqrt{m^2 - \nabla^2}\Psi(t, \mathbf{x}) \ . \tag{301}$$

Les dejamos a ustedes que verifiquen que la corriente conservada de Klein-Gordon da lugar a una probabilidad conservada y positiva, pero la densidad de probabilidad no es definida positiva.

(c) *Mostrar que, sin embargo, $\langle t, \boldsymbol{x}|\, t, \boldsymbol{y}\rangle$ no es proporcional a la delta de Dirac y que los estados $|t, \boldsymbol{x}\rangle$ están localizados en un tamaño típico $\Delta x \sim 1/m$ (al restaurar unidades, esta es longitud de Compton $\frac{\hbar}{mc}$).*

En mecánica cuántica no relativista, los estados de una partícula localizada en puntos distintos del espacio son ortogonales. Veamos que esto no sucede para los estados $|t, \mathbf{x}\rangle$. Calculamos

$$\begin{aligned}
\langle t, \mathbf{x}|\, t, \mathbf{y}\rangle &= \langle 0|\, \hat{\phi}\,(t, \mathbf{x})\, \hat{\phi}\,(t, \mathbf{y})\, |0\rangle = && (302)\\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y})} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\, \langle 0|\, \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}\, |0\rangle = && (303)\\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y})} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\, \delta^3\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right) = && (304)\\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}\, e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = && (305)\\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}\,. && (306)
\end{aligned}$$

Esta integral puede trabajarse un poco más pasando a coordenadas esféricas (k, φ, θ), tomando el ángulo azimutal θ como el ángulo entre los vectores $\mathbf{k}$ y $(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. Definiendo $u \equiv |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, resulta

$$\begin{aligned}
\langle t, \mathbf{x}|\, t, \mathbf{y}\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} = && (307)\\
&= \frac{1}{2\,(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} dk\, k^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \frac{e^{i\,k\,u\,\cos\theta}}{\sqrt{k^2+m^2}} = && (308)\\
&= \frac{1}{2\,(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk\, k^2}{\sqrt{k^2+m^2}} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) e^{i\,k\,u\,\cos\theta} = && (309)\\
&= \frac{1}{2\,(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk\, k^2}{\sqrt{k^2+m^2}} \frac{2\sin(ku)}{ku} = && (310)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dk \frac{k\sin(ku)}{u\sqrt{k^2+m^2}}\,. && (311)
\end{aligned}$$

La integral anterior puede escribirse en términos de funciones de Bessel modificadas. Para llevarla a una representación integral conocida de estas funciones hay que hacer el cambio de variables $k = m\sinh(\alpha)$ (verifiquen que con ese cambio de variables resulta $dk = \sqrt{k^2+m^2}d\alpha$)

$$\begin{aligned}
\langle t, \mathbf{x}|\, t, \mathbf{y}\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dk \frac{k\sin(ku)}{u\sqrt{k^2+m^2}} = && (312)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m}{u} \int_0^{+\infty} d\alpha\, \sinh(\alpha) \sin\left[mu\sinh(\alpha)\right]\,. && (313)
\end{aligned}$$

La integral que aparece en la expresión anterior es una expresión integral de la función de Bessel $K_1(mu)$ (ver por ejemplo la ecuación 10.32.7en https://dlmf.nist.gov/10.32). Recordando que $u = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ nos queda finalmente

$$\langle t, \mathbf{x}|\, t, \mathbf{y}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} K_1\left(m|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\right)\,. \qquad (314)$$

La función de Bessel K_1 diverge en el origen, tiende a cero en $+\infty$ y es decreciente para todo real positivo, pero no se anula si $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \neq 0$, por más pequeña que sea esta diferencia. En particular, no se anula para $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \sim 1/m$, que restaurando unidades es la longitud de Compton $\hbar/(mc)$. Esto nos dice que los estados no son ortogonales (algo que sí sucede en el límite no relativista, si mandamos c a infinito).

El resultado de este ejercicio ejemplifica la dificultad de definir la noción de **localización** en una teoría relativista.

En el ejercicio que vimos recién fue relevante calcular un valor de expectación en el vacío de un producto de dos campos. Estos objetos son muy importantes en la teoría de campos. A continuación, vamos a estudiar algunas de sus propiedades.

4.1.7. Funciones de n puntos

Una **función de n puntos** (o **función de correlación**, o simplemente **correlador**) es un valor de expectación en vacío de n campos

$$C(x_1,\, x_2\,, ..., x_n) = \langle 0|\, \hat{\phi}\,(x_1)\, \hat{\phi}\,(x_2)\, \ldots \hat{\phi}\,(x_n)\, |0\rangle\ . \tag{315}$$

Estas funciones son muy importantes ya que se relacionan con otros objetos centrales de la teoría, como los propagadores. Además, están conectadas con las amplitudes de scattering a través de la fórmula de reducción LSZ, como veremos más adelante. Desde el punto de vista axiomático, dar el conjunto completo de las funciones de correlación determina completamente la teoría de campos (esto se conoce como Teorema de Reconstrucción de Wightman).

Al final del ejercicio que hicimos en la sección anterior vimos un ejemplo de una función de correlación (la función de 2 puntos) a tiempos iguales

$$\langle 0|\, \hat{\phi}\,(t,\mathbf{x})\, \hat{\phi}\,(t,\mathbf{y})\, |0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} K_1\left(m|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\right)\ . \tag{316}$$

Noten que si en la expresión anterior toman el límite de masa cero (busquen la expansión de K_1), obtienen que la función de dos puntos para el campo escalar no masivo decae como $1/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2$. Cuando la masa es distinta de cero, para distancias grandes K_1 tiene un decaimiento exponencial, con lo que las correlaciones decaen más rápidamente cuando los campos son masivos.

Otra cosa que pueden notar de la expresión (316) es que no depende de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ por separado, sino que es función del módulo de su diferencia. No sólo de su diferencia, lo que podría hacernos sospechar que es invariante ante traslaciones, sino también de su módulo, lo que nos hace intuir que también es invariante ante rotaciones. De los boosts podemos decir poco porque estamos mirando un ejemplo de una función de dos puntos a tiempos iguales, pero también será invariante

ante boosts. En general, *las funciones de correlación son invariantes ante transformaciones del grupo de Poincaré.*

La demostración de la invariancia ante Poincare de los correladores la harán ustedes en el Ejercicio 37. Noten que utilizando dicha invariancia pueden obtener un correlador para dos puntos arbitrarios separados espacialmente a partir de uno a tiempos iguales. Veamos esto para el correlador de dos puntos. Usamos una tilde para referirnos a los cuadrivectores para los cuales $t = 0$. Por ejemplo $(\tilde{x}^\mu)$ es el cuadrivector de componentes $(0, \mathbf{x})$. En términos de cuadrivectores, la función de dos puntos (316) se escribe como

$$\langle 0| \hat{\phi}(t, \mathbf{x}) \hat{\phi}(t, \mathbf{y}) |0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m}{\sqrt{(\tilde{x}^\mu - \tilde{y}^\mu)(\tilde{x}_\mu - \tilde{y}_\mu)}} K_1\left(m\sqrt{(\tilde{x}^\mu - \tilde{y}^\mu)(\tilde{x}_\mu - \tilde{y}_\mu)}\right) . \tag{317}$$

Noten que la cantidad que aparece en la raíz en un escalar (de Poincaré), por lo que no cambia si hacemos transformaciones de Poincaré globales. El grupo de Poincaré es un subgrupo del grupo conforme (ver sección 1.6), que deja invariantes los conos de luz. Por lo tanto, toda tranformación global del grupo conforme no puede cambiar el tipo de separación entre dos puntos: dos puntos que estaban espacialmente separados, siguen estando espacialmente separados luego de que se aplique sobre ambos la misma tranformación conforme. Más aún, para todo par de puntos x e y espacialmente separados existe una transformación de Poincaré que los lleva a tiempos iguales. Esto es sencillo de ver y se esquematiza en la Figura 2. Allí, dados x e y espacialmente separados, hacemos una traslación que lleve x al origen (y por supuesto, traslada a y en la misma magnitud). A los transformados por dicha traslación los llamamos x' e y'. Luego, si hacemos un boost, x' no cambia pero y' se mueve por una hipérbola; basta nomás con encontrar el parámetro de boost que lleva a y' a tener tiempo cero. Los cuadrivectores transformados por este boost tienen la misma componente temporal. Como las transformaciones de Poincaré son invertibles también se puede hacer el proceso reverso.

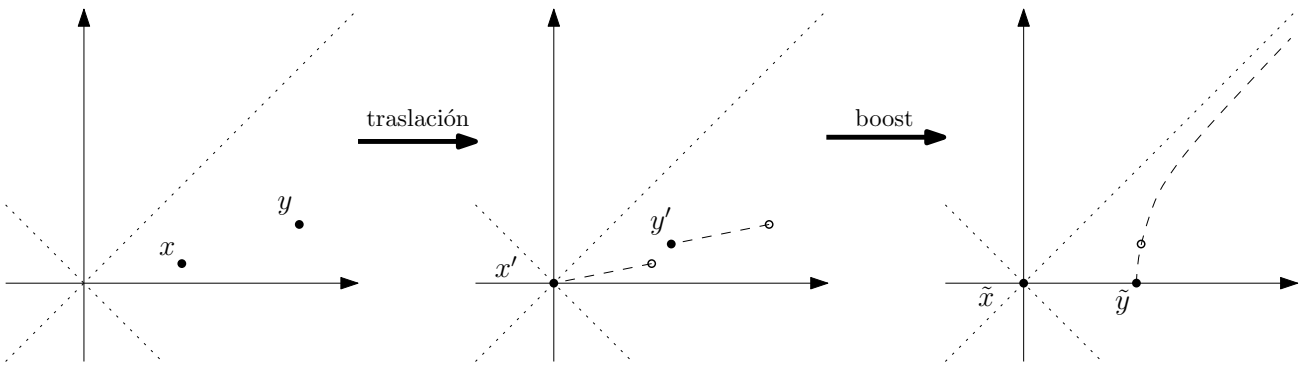


Fig. 2: **Transformación de Poincaré para llevar puntos con $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 < 0$ a t=0.** Los ejes verticales son el tiempo y los horizontales una coordenada espacial. Primero se realiza una traslación rígida para llevar uno de los puntos al origen y posteriormente se hace un boost (que no mueve el punto en el origen) hasta llevar el segundo punto a $t = 0$.

Por lo tanto, volviendo a la función de dos puntos, como $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$ están espacialmente separados, resulta

$$\langle 0|\,\hat{\phi}\,(x)\,\hat{\phi}\,(y)\,|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{m}{\sqrt{(x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu)}}K_1\left(m\sqrt{(x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu)}\right)\,, \tag{318}$$

En el Ejercicio 36(b) (el inciso (a) sale de lo que hicimos en esta clase) les pedimos que vean cómo queda la función de dos puntos para puntos temporalmente separados.

4.1.8. Microcausalidad

Al cuantizar nuestra teoría partimos de las relaciones de conmutación entre los campos al mismo tiempo. En el siguiente ejercicio vamos a ver algunos aspectos del conmutador para puntos genéricos.

Ejercicio: (Práctica 3, Ejercicio 38) *Considere un campo de Klein Gordon neutro. Muestre que el conmutador $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$ es un número complejo (es decir, un múltiplo del operador identidad) y por tanto es igual a su valor de expectación en vacío (o cualquier estado). A partir de esta observación y los resultados anteriores, muestre que el conmutador es cero para x e y espacialmente separados, es decir para $(x-y)^2 < 0$. Diga por qué no puede decir lo mismo cuando están temporalmente separados.*

Planteamos el conmutador

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\left(e^{-ikx}e^{ik'y}\left[\hat{a}_\mathbf{k}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\right] + e^{ikx}e^{-ik'y}\left[\hat{a}^\dagger_\mathbf{k}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}\right]\right) \tag{319}$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}\left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}\right)\,. \tag{320}$$

Antes de seguir queremos hacerles notar que la medida de integración $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}$ es invariante de Lorentz. Noten que la misma puede reescribirse como

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}2\pi\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0)\,. \tag{321}$$

Como el signo de k^0 es un invariante de Lorentz, la relación anterior nos muestra que $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}$ es invariante de Lorentz. Noten que el resto de lo que aparece en la ecuación (320) es también invariante de Lorentz, y los puntos x e y sólo aparecen a través de la diferencia $(x-y)$ el objeto $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$ es un invariante de Poincaré. Se suele introducir la función de Pauli-Jordan Δ

$$\Delta(u) \equiv \frac{1}{i}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}\left(e^{-iku} - e^{iku}\right)\,, \tag{322}$$

y entonces

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} \left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}\right) = \tag{323}$$

$$= i\Delta(x-y)\,. \tag{324}$$

Noten que, como se pedía en el ejercicio, el conmutador es un número ($i\Delta(x-y)$), o sea un múltiplo de la identidad. Esto no es general y sólo sucede en las teorías libres.

Hoy no vamos a calcular explícitamente la función de Pauli-Jordan, pero sí vamos a hacer algunas observaciones.

Observaciones:

(a) Como el conmutador es antisimétrico, se tiene

$$\Delta(x-y) = -\Delta(y-x)\,. \tag{325}$$

(b) Por las relaciones de conmutación a tiempos iguales entre los campos se tiene

$$\Delta((0,\mathbf{x})) = 0\,. \tag{326}$$

(c) Por las relaciones de conmutación a tiempos iguales entre el campo y el momento se tiene

$$i\delta^3(\mathbf{x}) = [\hat{\phi}(0,\mathbf{x}), \hat{\pi}(0,\mathbf{0})] = -i\,\frac{\partial}{\partial t}\Delta((t,\mathbf{x}))\Big|_{t=0} \implies \frac{\partial}{\partial t}\Delta((t,\mathbf{x}))\Big|_{t=0} = -\delta^3(\mathbf{x})\,. \tag{327}$$

(d) Δ satisface la ecuación de Klein Gordon

$$\left(\Box + m^2\right)\Delta(x) = \frac{1}{i}\left(\Box + m^2\right)[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(0)] = \frac{1}{i}[\left(\Box + m^2\right)\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(0)] = 0\,. \tag{328}$$

(e) Las propiedades (b), (c) y (d) definen unívocamente a Δ (ya que Δ es solución de una ecuación diferencial hiperbólica de orden 2, con condiciones iniciales sobre $\Delta(x)$ y $\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta(x)$ en una superficie espacial (en este caso, en la superficie espacial $x^0 = 0$).

(f) $\Delta(x) = 0$ si $x^2 = x^\mu x_\mu < 0$ (separación espacial). Esto sale del hecho de tomar valor de expectación en el vacío a $\Delta(x)$ y, recordando que es un conmutador de dos campos, ver que es una diferencia entre dos funciones de dos puntos que dependen sólo de x^2. Esto demuestra lo último que se pide en el ejercicio, es decir, que

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = 0\,, \quad \text{si } (x-y)^2 < 0\,. \tag{329}$$

No podemos usar el mismo argumento para decir algo en el caso en el que los puntos están temporalmente separados por el mismo motivo que ya explicamos al hablar de por qué no podíamos hacerlo con la función de dos puntos.

La relación (329) se conoce como **condición de microcausalidad** y lo que garantiza es que si dos observadores están espacialmente separados, las acciones que uno de ellos realice no afectan los valores de expectación de las mediciones del otro observador. La microcausalidad vale incluso si la teoría no es libre. De hecho, esta condición es otro de los axiomas de Wightman que se utilizan para definir lo que es una teoría de campos.

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- Se suele decir que al actuar $\hat{\phi}\,(x)$ sobre el vacío crea una partícula en el punto x, pero hay que recordar que el estado no está completamente localizado.

- Las funciones de n puntos

$$C(x_1,\, x_2\,, ..., x_n) = \langle 0|\, \hat{\phi}\,(x_1)\, \hat{\phi}\,(x_2)\, \ldots \hat{\phi}\,(x_n)\, |0\rangle\ ,$$

son invariantes de Poincaré. Usando la invariacia ante traslaciones podemos fijar $x_n = 0$ y notar que los correladores dependen de $n-1$ puntos.

- Medida de integración invariante de Lorentz: $\dfrac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}$.

- **Microcausalidad**

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = 0\,, \quad \text{si } (x-y)^2 < 0\,.$$

Vale en general (no sólo en teorías libres) que el conmutador de dos observables locales separados espacialmente debe anularse.

4.1.9. Simetrías

Vamos a empezar estudiando cuál es la relación entre las simetrías que hemos visto para la teoría clásica y la teoría cuántica. En la teoría clásica, dada una corriente conservada

$$j_a^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)}\left[A_a^\nu \partial_\nu \phi_i - F_{i,a}\right] - A_a^\mu \mathcal{L},$$

podemos usar su constante de movimiento $Q_a = \int \sum_i \pi_i \left[A_a^\nu \partial_\nu \phi_i - F_{i,a}\right] - A_a^0 \mathcal{L}\, d^3\mathbf{x}$ para generar una transformación canónica (de simetría) de parámetro ϵ^a sobre cualquier función $f(\phi,\pi)$ en el espacio de fase como

$$f'(\phi,\pi) = e^{-\epsilon^a G(\phi,\pi)} f(\phi,\pi) \tag{330}$$

donde definimos el operador diferencial

$$G(\phi,\pi)[\,\cdot\,] = \{Q_a,\ \cdot\,\} = \int \sum_i \left[\frac{\delta Q_a}{\delta\phi_i(x)}\frac{\delta\,\cdot}{\delta\pi_i(x)} - \frac{\delta Q_a}{\delta\pi_i(x)}\frac{\delta\,\cdot}{\delta\phi_i(x)}\right] dx. \tag{331}$$

(Este es el corchete de Poisson que habíamos definido en el apéndice sobre derivadas funcionales ec. (720)). Veamos que en particular recuperamos la transformación infinitesimal de las variables

$$\phi_i'(x) = \phi_i(x) + \delta\phi_i = \phi_i - \epsilon^a\left\{Q_a, \phi_i\right\} = \phi_i + \epsilon^a\left[A_a^\nu \partial_\nu \phi_i - F_{i,a}\right] \tag{332}$$

Mientras que el lagrangiano $\mathcal{L}(\phi,\dot{\phi},x)$ transforma según

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L} = \mathcal{L} + \sum_i \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\delta\left(\partial_\mu\phi_i\right)\right\}$$

$$= \mathcal{L} + \sum_i \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}(\epsilon^a\left[A_a^\nu\partial_\nu\phi_i - F_{i,a}\right]) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\mu(\epsilon^a\left[A_a^\nu\partial_\nu\phi_i - F_{i,a}\right])\right\} =$$

$$= \mathcal{L}(x) + \sum_i \left\{\epsilon^a\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\left[A_a^\nu\partial_\nu\phi_i - F_{i,a}\right]\right) + \epsilon^a\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right)\right]\left[A_a^\nu\partial_\nu\phi_i - F_{i,a}\right]\right\} \tag{333}$$

el último término se anula por las ecuaciones de Euler-Lagrange y nos queda

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \epsilon^a\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\left[A_a^\nu\partial_\nu\phi_i - F_{i,a}\right]\right) = \mathcal{L}(x) + \epsilon^a\partial_\mu(A_a^\mu\mathcal{L}) \tag{334}$$

usando $\partial_\mu j_a^\mu = 0$. Así recuperamos la transformación original de las variables a partir del generador.

Para ver qué tiene que ver esto con la teoría cuántica basta escribir explícitamente la exponencial en (330)

$$f'(\phi,\pi) = f(\phi,\pi) + \frac{(-\epsilon^a)}{1!}\left\{Q_a, f(\phi,\pi)\right\} + \frac{(-\epsilon^a)^2}{2!}\left\{Q_a, \left\{Q_a, f(\phi,\pi)\right\}\right\} + \ldots \tag{335}$$

y haciendo el reemplazo

$$\begin{aligned} \phi &\to \hat{\phi} \\ \pi &\to \hat{\pi} \\ f &\to \hat{f} \\ Q_a &\to \hat{Q}_a \\ \{,\} &\to \tfrac{1}{i}\,[,] \end{aligned} \tag{336}$$

obtenemos

$$\hat{f}'(\hat{\phi},\hat{\pi}) = \hat{f}(\hat{\phi},\hat{\pi}) - \frac{(-i\epsilon^a)}{1!}\left[\hat{Q}_a, \hat{f}(\hat{\phi},\hat{\pi})\right] + \frac{(-i\epsilon^a)^2}{2!}\left[\hat{Q}_a, \left[\hat{Q}_a, \hat{f}(\hat{\phi},\hat{\pi})\right]\right] + ... \tag{337}$$

que podemos reconocer como

$$\hat{f}'(\hat{\phi},\hat{\pi}) = e^{i\epsilon^a \hat{Q}_a} \hat{f} e^{-i\epsilon^a \hat{Q}_a} = U^\dagger(\epsilon^a)\hat{f}U(\epsilon^a). \tag{338}$$

Así toda transformación canónica continua en el espacio de fases de la teoría clásica genera una transfomación unitaria continua en el espacio de Hilbert de la teoría cuántica. En particular si dicha transformación es una simetría continua entonces el generador es su carga conservada (Advertencia: Esto es en realidad lo que uno quisiera que pase pero podría no ocurrir. Una razón es que nada nos garantiza que al cuantizar canónicamente la carga clásica obtengamos un operador $\hat{Q}$ autoadjunto. En los casos que consideraremos pueden chequear que esto efectivamente sucede).

Por ejemplo, para el campo escalar real la traslación de parámetro a^μ es una transformación de simetría de la teoría clásica cuya carga conservada es el momento P^μ, con lo cual usando (338) tenemos

$$\hat{\phi}'(x^\mu) = \hat{\phi}(x^\mu + a^\mu) = e^{ia_\mu \hat{P}^\mu}\hat{\phi}(x^\mu)e^{-ia_\mu \hat{P}^\mu}. \tag{339}$$

Para ver que el vacío $|0\rangle$ definido como

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0, \quad \forall \hat{a}_{\mathbf{p}} \tag{340}$$

es invariante ante una transformación del grupo de Poincaré (Λ, a) debemos ver que

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}|0\rangle' = 0, \quad \forall \hat{a}_{\mathbf{p}} \tag{341}$$

siendo $|0\rangle' = U(\Lambda, a)|0\rangle$ (esto junto con la unicidad del vacío le permitirá a uno concluir que $|0\rangle' = |0\rangle$). Para ello basta escribir

$$U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{a}_{\mathbf{p}}|0\rangle' = U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{a}_{\mathbf{p}}U(\Lambda, a)\,|0\rangle = \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{p}}}}e^{-i(\Lambda^{-1}p)a}\hat{a}_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}}|0\rangle = 0, \tag{342}$$

donde usamos cómo transforman los operadores de destrucción. Eso se puede ver de la siguiente manera

$$\hat{\phi}(\Lambda x^\mu + a^\mu) = U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{\phi}(x^\mu)U(\Lambda, a) \tag{343}$$

$$\int \hat{a}_{\mathbf{p}}e^{-ip(\Lambda x+a)} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}e^{ip(\Lambda x+a)}d^3\mathbf{p} = \int U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{a}_{\mathbf{p}}U(\Lambda, a)\,e^{-ipx} + U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}U(\Lambda, a)\,e^{ipx}d^3\mathbf{p} \tag{344}$$

y haciendo el cambio de variable $\Lambda p = \tilde{p}$ tenemos

$$\int \left[\hat{a}_{\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{p}}} e^{i\tilde{p}x} e^{-i\Lambda^{-1}\tilde{p}a} + \hat{a}^{\dagger}_{\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{p}}} e^{-i\tilde{p}x} e^{i\Lambda^{-1}\tilde{p}a}\right] \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3 2\omega_{\tilde{\mathbf{p}}}}$$

$$= \int \left[U^{\dagger}(\Lambda, a)\, \hat{a}_{\mathbf{p}} U(\Lambda, a)\, e^{-ipx} + U^{\dagger}(\Lambda, a)\, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}} U(\Lambda, a)\, e^{ipx}\right] \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \tag{345}$$

(usamos la invariancia de la medida de integración) y podemos concluir que

$$U^{\dagger}(\Lambda, a)\, \hat{a}_{\mathbf{p}} U(\Lambda, a) = \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{p}}}} \hat{a}_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}} e^{-i(\Lambda^{-1}p)a}. \tag{346}$$

En la guía se propone mostrar la invariancia del vacío por otro camino, para lo cual les será esencial usar la hipótesis de que $\hat{Q}$ es un operador hermítico. La ventaja de este método es que uno puede decir más y mostrar que $U^{\dagger}(\Lambda, a)|\mathbf{p}\rangle' = |\Lambda^{-1}\mathbf{p}\rangle$.

4.1.10. Material adicional: Efecto Unruh

Tomemos un poco de distancia y revisemos la construcción que hemos hecho hasta ahora para definir partículas en teoría de campos tomando como ejemplo el campo escalar. Dado que el campo satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\hat{\Phi} = 0,$$

si tenemos una base de soluciones $\{u_{\mathbf{k}}(x)\}_{\mathbf{k}}$ de la ecuación clásica entonces podemos expandir al campo como

$$\hat{\Phi}(x) = \int \left[u_{\mathbf{k}}(x)\hat{a}_{\mathbf{k}} + u^*_{\mathbf{k}}(x)\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\right] d^3\mathbf{k},$$

siendo $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ operadores de aniquilación. Podemos entonces definir el vacío como el vector tal que

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k}$$

y el espacio de Hilbert como el generador por la base $\left\{\Pi_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\right)^{n_{\mathbf{k}}} |0\rangle\right\}_{n_{\mathbf{k}}}$ (realmente sería este conjunto suavizado por funciones que decaen rápido a 0, ejercicio 33, práctica 3). Está claro entonces que si llamamos estado de 1 partícula a $|1_n\rangle = a^{\dagger}_n|0\rangle$, nuestra noción de partícula depende completamente de la definición que dimos de los operador de aniquilación, los cuales a su vez dependen enteramente de la base de soluciones $u_{\mathbf{k}}(x)$ en la que expandimos el campo. ¿Como sabemos entonces que de las infinitas bases que podríamos utilizado elegimos la correcta? Bueno la base que elegimos es

$$\left\{u_{\mathbf{k}}(x) = e^{i\mathbf{k}x}, u_{\mathbf{k}}(x)^* = e^{-i\mathbf{k}x}\right\}_{\mathbf{k}}$$

y esta base tiene la particularidad de ser invariante ante transformaciones del grupo de Poincaré (boostear, trasladar o rotar cualquier onda plana nos da otra onda plana), de manera tal que los observadores inerciales coinciden en lo que definimos como partículas!

¿Pero qué pasaría si hubiesemos usado otra base de soluciones $v_{\mathbf{p}}(x)$? En ese caso tendríamos

$$\Phi(x) = \int \left[v_{\mathbf{p}}(x)\hat{b}_{\mathbf{p}} + v^*_{\mathbf{p}}(x)\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} \right] d^3\mathbf{p},$$

y un vacío distinto

$$\hat{b}_{\mathbf{p}}|0\rangle' = 0, \quad \forall \mathbf{p}$$

igualando esta expansión a la anterior podemos despejar

$$\hat{b}_{\mathbf{p}} = \int \left[(u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{p}})\hat{a}_{\mathbf{k}} + (u^*_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{p}})\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \right] d^3\mathbf{k} = \int \left[\alpha_{\mathbf{kp}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \beta^*_{\mathbf{kp}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \right] d^3\mathbf{k},$$

siendo $(,)$ el producto interno de K-G. Esto es lo que se conoce como una transformación de Bogoliuvob. Podemos ver que un estado de vacío para una expansión es un estado repleto de partículas para la otra calculando

$$\langle 0|N_{\mathbf{p}}|0\rangle = \langle b^\dagger_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}\rangle = \int |\beta_{\mathbf{kp}}|^2 d^3\mathbf{k}.$$

Como dijimos antes todos los observadores inerciales coincidirán en que un estado es de vacío. Sin embargo, debido a una transformación de bogoliuvob loas observadores acelerados verán partículas! Esto es lo que se conoce como el efecto Unruh. Otros efectos de creación de partículas debido a una transformación de Bogoliuvob son la radiación emitida por los agujeros negros y descubierta por Stephen Hawking, el efecto Casimir dinámico y la creación cosmológica de partículas debida a la expansión del universo. Para quienes quieran saber más sobre este tema pueden leer el capítulo de Quantum Field Theory in Curved Spacetime en ”Spacetime and Geometry” de Sean Carrol, ”Quantum Fields in Curved Space” de Birrel y Davies o algo un poco más matemático ”Quantum Field in Curved Spacetime” de Wald.

4.2. Cuantización del campo escalar complejo

Recordemos que el lagrangiano del campo escalar complejo viene dado por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

que tiene dos grados de libertad que podemos tomar como ϕ y ϕ^*que satisfacen las ecuaciones de movimiento

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^* = 0$$

cuyas soluciones cuánticas podemos expandir en ondas planas como

$$\hat{\phi}(x) = \int \left[\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} \right] \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x) = \int \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} + \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} \right] \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}$$

cuyos momentos canónico conjugados son

$$\hat{\pi}(x) = \partial_0 \hat{\phi}^\dagger(x) = \int \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} - \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} \right] i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}$$

$$\hat{\pi}^\dagger(x) = \int \left[\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{-ipx} \right] i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}.$$

Imponiendo las siguientes relaciones de conmutación (a tiempos iguales) sobre los campos y los momentos

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta(x-y)$$

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\pi(x), \pi(y)] = 0$$

podemos deducir las siguientes relaciones de conmutación para los operadores de creación y destrucción

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] = \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}] = \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] = 0.$$

Con estas relaciones asociamos entonces a $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}$ y $\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}$ con operadores que crean dos tipos distintos de partículas.

4.2.1. Simetría interna

Ejercicio: *(Práctica 3, Ejercicio 41) Para el caso del campo escalar complejo, hay una cantidad conservada asociada a la invariancia ante multiplicar el campo por una fase. Halle la expresión de esta a nivel cuántico y muestre que este operador cuenta el número de partículas creadas por $a^\dagger$ menos el numero de partículas creadas por $b^\dagger$.*

Como dijimos antes el campo escalar complejo, de la misma forma que el campo escalar real, será invariante antes transformaciones globales del grupo de Poincaré. Previamente habíamos visto que además el campo tiene una simetría global continua ante U(1) que corresponde a multiplicar el campo por una fase. Dicha simetría está asociada a través del teorema de Noether con la corriente

$$\hat{j}^\mu = -i\left[\left(\partial^\mu\hat{\phi}^\dagger\right)\hat{\phi} - \hat{\phi}^\dagger\left(\partial^\mu\hat{\phi}\right)\right] \tag{347}$$

cuya carga conservada viene dada por

$$\hat{Q} = \int :\hat{j}^0: d^3\mathbf{x} = -\int i :\left[\hat{\phi}\hat{\pi} - \hat{\phi}^\dagger\hat{\pi}^\dagger\right]: d^3\mathbf{x} \tag{348}$$

donde tomamos orden normal para que su valor de expectación en el vacío sea nulo. Noten que como adelantamos este operador ES autoadjunto y por lo tanto estará asociado a un observable de la teoría. Calculemos entonces

$$\int :\hat{\phi}\hat{\pi}: d^3\mathbf{x} = \int\int\int :\left[\hat{a}_\mathbf{p}e^{-ipx} + \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}e^{ipx}\right]\left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'}e^{ip'x} - \hat{b}_{\mathbf{p}'}e^{-ip'x}\right]: i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{2}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} \tag{349}$$

$$= \frac{i}{2(2\pi)^3}\int\int\int :\left[\hat{a}_\mathbf{p}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'}e^{i(p'-p)x} + \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'}e^{i(p'+p)x} - \hat{a}_\mathbf{p}\hat{b}_{\mathbf{p}'}e^{-i(p'+p)x} - \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\hat{b}_{\mathbf{p}'}e^{-i(p'-p)x}\right]: \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_\mathbf{p}}}d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'d^3\mathbf{x} \tag{350}$$

$$= \frac{i}{2}\int :\left[\hat{a}_\mathbf{p}\hat{a}^\dagger_\mathbf{p} + \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} - \hat{a}_{-\mathbf{p}}\hat{b}_\mathbf{p} - \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\hat{b}_\mathbf{p}\right]: d^3\mathbf{p} \tag{351}$$

$$= \frac{i}{2}\int \left[\hat{a}^\dagger_\mathbf{p}\hat{a}_\mathbf{p} + \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} - \hat{a}_{-\mathbf{p}}\hat{b}_\mathbf{p} - \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\hat{b}_\mathbf{p}\right] d^3\mathbf{p} \tag{352}$$

para el siguiente término podemos usar que $\left(:\hat{\phi}\hat{\pi}:\right)^\dagger =: \hat{\pi}^\dagger\hat{\phi}^\dagger :=: \hat{\phi}^\dagger\hat{\pi}^\dagger :$ (todo lo que está adentro de un orden normal lo podemos conmutar como queramos dado que al final igualmente será reacomodador por el orden normal). Entonces

$$-\int :\hat{\phi}^\dagger\hat{\pi}^\dagger: d^3\mathbf{x} = -\left(\int :\hat{\phi}\hat{\pi}: d^3\mathbf{x}\right)^\dagger = \frac{i}{2}\int\left[\hat{a}^\dagger_\mathbf{p}\hat{a}_\mathbf{p} + \hat{a}_{-\mathbf{p}}\hat{b}_\mathbf{p} - \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\hat{b}_\mathbf{p}\right] d^3\mathbf{p} \tag{353}$$

Sumando esto a lo anterior tenemos

$$\hat{Q} = \int :\hat{j}^0: d^3x = -\int\left[\hat{b}^\dagger_\mathbf{p}\hat{b}_\mathbf{p} - \hat{a}^\dagger_\mathbf{p}\hat{a}_\mathbf{p}\right] d^3\mathbf{p} \tag{354}$$

$$\hat{Q} = \hat{N}^a - \hat{N}^b$$

es decir que la diferencia entre el número de partículas de tipo b y a debe conservarse. Si les asignamos carga positiva a las partículas de tipo a y negativa a las de tipo b esto es lo mismo que decir que la carga total se conserva. Vemos entonces que tenemos dos tipos de partículas de la misma masa y carga opuesta, decimos entonces que el operador $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}$ crea partículas con carga positiva y momento $\mathbf{p}$ mientras que $\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}$ crea anti-partículas de carga opuesta y momento $\mathbf{p}$.

4.2.2. Propagador

Hasta aquí hemos obtenido y estudiado las ecuaciones diferenciales para nuevos campos desde el punto de vista clásico y cuántico. Surgen entonces dos preguntas de uno y otro lado. Desde el punto de vista clásico sabemos que la ecuación de Klein-Gordon es una generalización masiva de la ecuación de ondas, cabe entonces preguntarse dadas ciertas condiciones iniciales cómo evolucionan las soluciones (para el caso de la ecuación de ondas unidimensional la respuesta venía dada por la fórmula de D'Alambert) y cómo se modican por la presencia de un término de fuente (comparándo lo que hemos hecho con el electromagnetismo $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$ solo hemos considerado hasta ahora $\rho = 0$). Desde el punto de vista cuántico la pregunta es cómo interactúan estos campos con otros y dada una interacción particular cómo podemos calcular resultados observables, como por ejemplo secciones de scattering. Como habrán visto previamente en otras materias la respuesta a la primera pregunta es la función de Green. Veremos más adelante que sorprendentemente la respuesta la segunda pregunta será también una función de Green que llamamos el propagador de Feynman y estudiaremos en el siguiente ejercicio.

Ejercicio: Propagador del campo escalar neutro o complejo (Práctica 3, Ejercicio 43)

(a) *Exprese*

$$D(x-y) \equiv \langle 0|T(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y))|0\rangle$$

como una suma de dos funciones de dos puntos pesadas adecuadamente (en el caso del campo neutro, la expresión final es la misma).

Por definición de T tenemos que

$$D(x-y) = \begin{cases} \left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) \right\rangle & \text{si } x^0 > y^0 \\ \left\langle \hat{\phi}^\dagger(y)\hat{\phi}(x) \right\rangle & \text{si } x^0 < y^0 \end{cases} . \tag{355}$$

Esta expresión se puede reescribir usando funciones de heaviside como

$$D(x-y) = \left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) \right\rangle \theta(x^0 - y^0) + \left\langle \hat{\phi}^\dagger(y)\hat{\phi}(x) \right\rangle \theta(y^0 - x^0) \tag{356}$$

que es una suma pesada de dos funciones de dos puntos.

(b) *Exprese el resultado como la transformada de Fourier de*

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\epsilon \to 0)$$

Muestre esto mediante integrales en el plano complejo, en caminos que esquiven los polos dados por ϵ, ubicados en distintos lugares segun sea ϵ positivo o negativo.

Comencemos calculando explícitamente

$$\left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) \right\rangle = \left\langle \int\int \left[\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx}\right] \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'} e^{ip'y} + \hat{b}_{\mathbf{p}'} e^{-ip'y}\right] \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \right\rangle \tag{357}$$

Para hacer estas cuentas rápidamente recuerden siempre que

$$\langle 0|\hat{a}^n_{\mathbf{p}}|0\rangle = \langle 0|\hat{a}^n_{\mathbf{p}}\hat{b}^m_{\mathbf{p}'}|0\rangle = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^3 \tag{358}$$

$$\langle 0|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}'}|0\rangle = \langle 0|(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}})^n\hat{a}^m_{\mathbf{p}'}|0\rangle = 0 \quad \forall n \neq m \in \mathbb{N} \quad \mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^3. \tag{359}$$

Así obtenemos

$$\left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) \right\rangle = \int\int \delta(p' - p) e^{-ipx} e^{ip'y} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \tag{360}$$

$$\left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) \right\rangle = \int e^{-ip(x-y)} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}. \tag{361}$$

Entonces, si $x^0 > y^0$ podemos escribir el propagador como

$$D(x-y) = \int e^{-ip(x-y)} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}.$$

Por otro lado, la transformada de Fourier es

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} = \lim_{\epsilon\to 0} \int\int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2 + i\epsilon} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4} dp_0\,; \tag{362}$$

viendo el integrando como función de p_0 tiene polos en $p_0^\pm = \pm(\omega_{\mathbf{p}} - i\epsilon)$. Si $x^0 - y^0 > 0$ uno puede calcular esto cerrando el contorno por debajo con la curva $\mathcal{C}_R$ (ver Figura 3) de manera tal de que la integral sobre la semi-circunferencia tienda a cero ($e^{-iR(x^0-y^0)(\cos\theta + i\sin\theta)} \to 0$ cuando $R \to \infty$ si $\pi < \theta < 2\pi$). Así encerramos al polo p_0^+ y usando el teorema de residuos la integral resulta

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{363}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{C}_R} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4} dp_0 \tag{364}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{p_0\to p_0^+} -2\pi i(p_0 - p_0^+) \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \tag{365}$$

$$= \int e^{-ip(x-y)} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \tag{366}$$

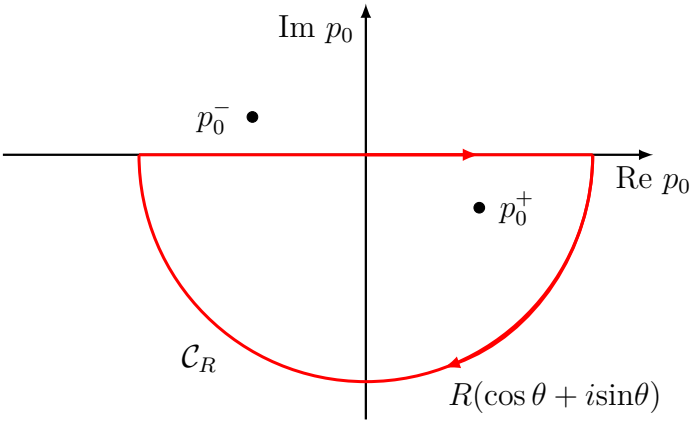


Fig. 3: **Circuito de integración $\mathcal{C}_R$ para $x^0 > y^0$.** Dado que, por el teorema de la curva de Cauchy, no importa cómo deformemos la curva de integración siempre obtendremos como resultado el residuo en el polo encerrado, muchas veces lo que se hace es directamente eliminar el ϵ (con lo cual los polos quedan en el eje real) y definir la integral en el plano complejo de manera tal de evitar los polos, por abajo del p_0^- y por arriba del p_0^+ (ver por ejemplo la figura 5, página 39 de las notas de Tong). Más todavía, se pueden obtener otras funciones de Green (avanzadas o retardadas, por ejemplo) utilizando otras prescripciones de cómo rodear los polos.

---

donde usamos que $p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\epsilon = (p_0 - p_0^+)(p_0 - p_0^-)$.

Análogamente si $x^0 < y^0$ podemos calcular

$$\left\langle \hat{\phi}^\dagger(y)\hat{\phi}(x) \right\rangle = \int e^{ip(x-y)} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} = \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{367}$$

donde la última igualdad se obtiene haciendo un cuenta análoga cerrando el contorno por arriba. Así obtenemos entonces

$$D(x-y) = \lim_{\epsilon\to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \tag{368}$$

(c) *Muestre que se cumple* $(\Box_x + m^2)D(x-y) = -i\delta^4(x-y)$.

Finalmente podemos ver que el propagador es una función de Green de la ecuación de movimiento calculando

$$\left(\Box_x + m^2\right) D(x-y) = \lim_{\epsilon\to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{369}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int \left[(-p^2) e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + m^2 e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{370}$$

$$= -i \int e^{-ip(x-y)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} = -i\delta^4(x-y). \tag{371}$$

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- Las transformaciones de simetría continua $f \to f'$ de carga Q y parámetro ϵ^a de la teoría clásica son implementadas en la teoría cuántica mediante la transformación unitaria
$$\hat{f}' = e^{i\epsilon^a \hat{Q}} \hat{f} e^{-i\epsilon^a \hat{Q}} = U^\dagger(\epsilon^a) \hat{f} U(\epsilon^a)$$

- El campo escalar complejo posee dos grados de libertad que dan lugar a dos tipos de partículas con la misma masa y cargas opuestas, partículas y anti-partículas.

- Para el campo escalar real que vimos las clases pasadas las partículas coinciden con las antipartículas (el campo escalar real no tiene carga).

- El propagador
$$D(x-y) \equiv \langle 0|T(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y))|0\rangle = \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$
es una función de Green del campo escalar.

4.3. Cuantización canónica del campo de Dirac

Esta clase vamos a cuantizar el campo de Dirac, el primero de los campos que vamos a cuantizar que transforma de manera no trivial bajo la acción del grupo de Lorentz. Recordemos que, ante una transformación de Lorentz, el campo de Dirac transforma con la matriz $S(\Lambda)$ de la forma expresada por la ecuación (234). Noten que la asignación $\Lambda \mapsto S(\Lambda)$ define una representación del grupo de Lorentz, ya que

$$S(\Lambda^{-1}) = S(\Lambda)^{-1}\,, \tag{372}$$

$$S(\mathbb{I}) = \mathbb{I}\,, \tag{373}$$

$$S(\Lambda_1\Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2)\,. \tag{374}$$

En general, ante una transformación de Lorentz, un campo arbitrario de componentes ϕ^a transformará como

$$\phi^a(x) \to D(\Lambda)^a_{\ b}\,\phi^b(\Lambda^{-1}x)\,. \tag{375}$$

La expresión anterior indica que la transformación de Lorentz no sólo afecta al argumento de los campos sino que también mezcla sus componentes. Esto es algo que les debe resultar natural al pensar en el subgrupo de rotaciones y su acción sobre los campos vectoriales (como por ejemplo el campo eléctrico). En forma análoga a lo que sucede para el caso de Dirac, la asignación $\Lambda \mapsto D(\Lambda)$ define en general una representación del grupo de Lorentz.

Para el campo escalar que estuvimos estudiando las clases pasadas, ante una transformación de Lorentz se tiene

$$\phi(x) \to \phi(\Lambda^{-1}x)\,, \tag{376}$$

lo que nos dice que en este caso $D(\Lambda) = 1$ para todo Λ, o sea que la representación es la trivial. Entonces, ante transformaciones de Lorentz, el campo escalar transforma con la representación trivial del grupo de Lorentz. El campo de Dirac (y también otros que veremos más adelante, como el de Maxwell y el de Proca) transforman con representaciones no triviales del grupo de Lorentz.

4.3.1. Soluciones clásicas de la ecuación de Dirac

Cuando estudiamos la cuantización del campo escalar real vimos que el mismo satisfacía la ecuación de Klein-Gordon. Esto nos hizo entender por qué el campo se escribía como una combinación lineal de las soluciones clásicas de la ecuación. Para el campo de Dirac sucede lo mismo. Por este motivo, vamos a recordar brevemente las soluciones de la ecuación de Dirac.

Gran parte de esta clase va a estar dedicada a introducir notación y enumerar propiedades que serán útiles posteriormente. Hay distintas convenciones en relación a las propiedades de los

espinores de Dirac, nosotros vamos a seguir la del libro de Peskin, que es la que vieron en la clase de teoría (con algunas pequeñas diferencias que iremos mencionando).

La ecuación de Dirac es

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0\,, \tag{377}$$

donde las matrices γ (que tomamos de dimensión 4) satisfacen el álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\,. \tag{378}$$

Una representación de este álgebra (la quiral) está dada por las matrices

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}. \tag{379}$$

como vimos en el Ejercicio 14 discutido en la sección 2.3.1. El campo de Dirac ψ satisface la ecuación de Klein-Gordon, como pueden ver aplicando $(-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)$ sobre la ecuación (377)

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = && (380)\\ &= (\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu + m^2)\psi = && (381)\\ &= \left(\frac{1}{2}\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}\,\partial_\nu\partial_\mu + m^2\right)\psi = && (382)\\ &= (g^{\nu\mu}\partial_\nu\partial_\mu + m^2)\psi = && (383)\\ &= (\Box + m^2)\psi\,. && (384) \end{aligned}$$

Esto nos lleva a buscar soluciones de la ecuación de Dirac que tengan la forma

$$\begin{aligned} \psi_p^+(x) &= u(p)\,e^{-ipx}, \;\; \text{con } p^2 = m^2 \text{ y } p^0 > 0; && (385)\\ \psi_p^-(x) &= v(p)\,e^{+ipx}, \;\; \text{con } p^2 = m^2 \text{ y } p^0 > 0, && (386) \end{aligned}$$

donde separamos las soluciones de frecuencia positiva (385) de las soluciones de frecuencia negativa (386). Al aplicar la ecuación de Dirac a dichas propuestas de solución aparecen condiciones para $u(p)$ y $v(p)$ que nos permiten determinar su forma. Ustedes ya hicieron eso en la primera guía, pero si quieren revisarlo les recomendamos que sigan la sección 3.3 del libro de Peskin que coincide con la notación que vamos a utilizar, y si tienen dudas por supuesto nos pueden consultar. Aquí vamos a resumir los resultados finales, para que los tengan a mano cuando los necesiten.

Hay dos soluciones linealmente independientes tanto para u como para v, que etiquetamos con un índice s. Estas son

$$u^s(p) = \begin{bmatrix} \sqrt{p_\mu\sigma^\mu}\,\xi^s \\ \sqrt{p_\mu\overline{\sigma}^\mu}\,\xi^s \end{bmatrix}, \quad v^s(p) = \begin{bmatrix} \sqrt{p_\mu\sigma^\mu}\,\eta^s \\ -\sqrt{p_\mu\overline{\sigma}^\mu}\,\eta^s \end{bmatrix}, \quad (s = 1,\, 2)\,, \tag{387}$$

donde $(\sigma^\mu) = (1, \sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$, $(\overline{\sigma}^\mu) = (1, -\sigma^x, -\sigma^y, -\sigma^z)$. ξ^1 y ξ^2, y η^1 y η^2 son bases ortonormales de espinores de dimensión 2 que van a estar asociadas a la dirección del espín de la partícula. Por ahora pueden pensar que

$$\xi^1 = \eta^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi^2 = \eta^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{388}$$

La normalización que vamos a utilizar es la siguiente

$$u^{r\dagger}(p)u^s(p) = 2\omega_{\mathbf{p}}\delta_{rs}\,, \quad v^{r\dagger}(p)v^s(p) = 2\omega_{\mathbf{p}}\delta_{rs}\,. \tag{389}$$

Si $m \neq 0$ podemos escribir las condiciones de normalización en términos de $\bar{u} = u^\dagger\gamma^0$ y $\bar{v} = u^\dagger\gamma^0$

$$\bar{u}^r(p)u^s(p) = 2m\delta_{rs}\,, \quad \bar{v}^r(p)v^s(p) = -2m\delta_{rs}\,. \tag{390}$$

Además, u y v cumplen

$$\bar{u}^r(p)v^s(p) = \bar{v}^r(p)u^s(p) = 0\,. \tag{391}$$

Sin embargo, noten que $u^{r\dagger}(p)v^s(p) \neq 0$ y $v^{r\dagger}(p)u^s(p) \neq 0$, aunque sí se anulan los siguientes productos

$$u^{r\dagger}(p)v^s(-\mathbf{p}) = v^{r\dagger}(-\mathbf{p})u^s(p) = 0\,. \tag{392}$$

donde $v(-\mathbf{p})$ es $v(p)$ pero invirtiendo la parte espacial del cuadrivector p^μ, es decir cambiando $\mathbf{p}$ por $-\mathbf{p}$, y manteniendo p^0 igual.

Ejercicio: Mostrar que

$$\sum_{s=1,2} u^s(p)\bar{u}^s(p) = \not{p} + m\,, \quad \sum_{s=1,2} v^s(p)\bar{v}^s(p) = \not{p} - m\,, \tag{393}$$

donde $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ (en general, cuando vean un cuadrivector tachado lo que eso significa es que el mismo está contraído con las matrices γ; por ejemplo: $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu\partial_\mu$).

4.3.2. Cuantización canónica del campo de Dirac

Como ya mencionamos, esperamos que el campo de Dirac sea una combinación lineal de las soluciones clásicas de la ecuación de Dirac que presentamos en la sección anterior. Proponemos

entonces[6]

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \left[\hat{b}^s_{\mathbf{p}}\psi^+_p(x) + \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\psi^-_p(x)\right] = \tag{394}$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \left[\hat{b}^s_{\mathbf{p}}u^s(p)\, e^{-ipx} + \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^s(p)\, e^{ipx}\right] , \tag{395}$$

y

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \left[\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}u^s(p)^\dagger\, e^{ipx} + \hat{d}^s_{\mathbf{p}}v^s(p)^\dagger e^{-ipx}\right] , \tag{396}$$

Les dejamos a ustedes que verifiquen que efectivamente $\psi(x)$ es solución de la ecuación de Dirac (ya sabemos que lo va a ser por construcción, pero no viene mal verificarlo para ir adaptándose a la notación y propiedades de los espinores). A diferencia del campo escalar, necesitamos dos tipos de operadores b y d ya que este campo no es real (esto es similar a lo que hicimos con el campo escalar complejo). Noten que en la clase de teoría llamaron a estos operadores a y b; nosotros usaremos b y d porque en estas mismas notas usamos a para el campo escalar (esta notación la verán también en muchos libros).

Tenemos ya la expresión del campo cuántico, pero todavía no impusimos las reglas de conmutación. A diferencia de lo que hicimos con el campo escalar, para los fermiones vamos a tener que imponer dichas condiciones usando anticonmutadores. Esto es consecuencia de lo que se conoce como Teorema de Espín-Estadística y hablaremos mejor de ello en la clase siguiente. Por lo pronto, como comentaron en la clase de teoría, para fermiones tendremos que cuantizar imponiendo reglas de anticonmutación. Veamos el siguiente ejercicio.

Ejercicio: (Práctica 4, Ejercicio 44) *Considere el campo de Dirac*

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \left[\hat{b}^s_{\mathbf{p}}u^s(p)\, e^{-ipx} + \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^s(p)\, e^{ipx}\right] .$$

Demuestre que si $\{\hat{b}^r_{\mathbf{p}}, \hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}'}\} = \{\hat{d}^r_{\mathbf{p}}, \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}'}\} = \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\mathbf{rs}}$ *(y todos los otros nulos) entonces*

$$\left\{\hat{\psi}_a(0,\mathbf{x}), \hat{\psi}^\dagger_b(0,\mathbf{y})\right\} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\delta_{ab}\,.$$

[6]Noten que, intencionalmente, tenemos aquí una diferencia en la convención de la expansión del campo respecto al Peskin. Nosotros seguimos utilizando una notación similar a la del escalar, donde ponemos raíces en el término que aparece debajo de $d^3\mathbf{p}$: $(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}$. Mientras tanto, en el libro dicho término aparece sin raíces. Esto provoca que en la convención del libro las relaciones de anticonmutación que se usan lleven unos factores extra además de las deltas, mientras que en nuestro caso son sólo deltas.

Vamos a calcular $\left\{\hat{\psi}(0,\mathbf{x}),\hat{\psi}^\dagger(0,\mathbf{y})\right\}$, cuyo resultado será una matriz de orden 4×4. El anticonmutador que pedimos que calculen en el ejercicio será la componente ab de dicha matriz. Como las fórmulas que vamos a escribir son bastante largas, en algunos casos vamos a abreviar

$$\int_{\mathbf{p}} \equiv \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\,. \tag{397}$$

Escribimos entonces

$$\left\{\hat{\psi}(0,\mathbf{x}),\hat{\psi}^\dagger(0,\mathbf{y})\right\} = \tag{398}$$

$$= \left\{\int_{\mathbf{p}}\sum_{s=1,2}\left[\hat{b}^s_{\mathbf{p}}u^s(p)\,e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}+\hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^s(p)\,e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right],\int_{\mathbf{p}'}\sum_{r=1,2}\left[\hat{b}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}u^r(p')^\dagger\,e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{y}}+\hat{d}^r_{\mathbf{p}'}v^r(p')^\dagger,e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{y}}\right]\right\} = \tag{399}$$

$$= \int_{\mathbf{p}}\int_{\mathbf{p}'}\sum_{s,r}\left[u^s(p)u^r(p')^\dagger\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{sr}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{y}}+v^s(p)v^r(p')^\dagger\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{sr}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{y}}\right] = \tag{400}$$

$$= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})}\sum_s\left[u^s(p)u^s(p)^\dagger e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}+v^s(p)v^s(p)^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right]. \tag{401}$$

En este punto, podemos usar la ecuación (393) para hacer las sumatorias sobre s. Como en nuestra expresión aparece $u^\dagger$ en lugar de $\bar{u}$, tenemos que multiplicar por γ^0 a la derecha de las ecuaciones que aparecen en (393) para obtener las relaciones que necesitamos

$$\sum_{s=1,2}u^s(p)u^s(p)^\dagger = \sum_{s=1,2}u^s(p)\bar{u}^s(p)\gamma^0 = \not{p}\gamma^0+m\gamma^0\,, \tag{402}$$

$$\sum_{s=1,2}v^s(p)v^s(p)^\dagger = \sum_{s=1,2}v^s(p)\bar{v}^s(p)\gamma^0 = \not{p}\gamma^0-m\gamma^0\,, \tag{403}$$

Usando esto, nos queda

$$\left\{\hat{\psi}(0,\mathbf{x}),\hat{\psi}^\dagger(0,\mathbf{y})\right\} = \tag{404}$$

$$= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})}\left[\left(\not{p}\gamma^0+m\gamma^0\right)e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}+\left(\not{p}\gamma^0-m\gamma^0\right)e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right] = \tag{405}$$

$$= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})}\left[\left(\omega_{\mathbf{p}}-\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}\,\gamma^0+m\gamma^0\right)e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}+\left(\omega_{\mathbf{p}}-\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}\,\gamma^0-m\gamma^0\right)e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right] \tag{406}$$

donde usamos la notación $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3)$ y que $p^0=\omega_{\mathbf{p}}$. Si hacen un cambio de variables en la integral del segundo sumando $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ van a poder ver que los términos donde aparece γ^0 se cancelan con los correspondientes del primer sumando, mientras que el término con $\omega_{\mathbf{p}}$ es el mismo. Así, nos queda finalmente

$$\left\{\hat{\psi}(0,\mathbf{x}),\hat{\psi}^\dagger(0,\mathbf{y})\right\} = \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})}2\omega_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \tag{407}$$

$$= \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,. \tag{408}$$

Recuerden que la expresión anterior va multiplicada por la matriz identidad de 4×4 (no la escribimos, pero se entiende que va multiplicando a $\omega_{\mathbf{p}}$ y salía de hacer $(\gamma^0)^2=\mathbb{I}$). Cuando

miramos el anticonmutador entre componentes a y b, seleccionamos entonces el elemento ab de la matriz anterior. Es decir,

$$\left\{\hat{\psi}_a(0,\mathbf{x}), \hat{\psi}_b^\dagger(0,\mathbf{y})\right\} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\delta_{ab}\,, \tag{409}$$

como queríamos demostrar.

La clase que viene veremos por qué motivo mapeamos los corchetes de Poisson a anticonmutadores y no a conmutadores. Por ahora dejamos eso a un lado y vamos a recordar la expresión del operador Hamiltoniano. Para ello, necesitamos los momentos asociados a los campos, que se pueden obtener a partir del Lagrangiano de Dirac dado en la ecuación (172). Tenemos

$$\pi_\psi = i\psi^\dagger\,, \quad \pi_{\psi^\dagger} = 0\,, \tag{410}$$

por lo que la densidad Hamiltoniana es

$$\mathcal{H} = \pi_\psi\dot{\psi} + \pi_{\psi^\dagger}\dot{\psi}^\dagger - \mathcal{L} = i\psi^\dagger\dot{\psi} - \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = \psi^\dagger\left(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta m\right)\psi\,, \tag{411}$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ con $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i$, y $\beta = \gamma^0$. Un comentario antes de seguir: $\mathcal{H}$ no es hermítico porque el Lagrangiano del cual partimos no es real. Para conseguir un Lagrangiano real hay que sumar a la expresión (172) su complejo conjugado y dividir por dos. No vamos a preocuparnos por esto porque ambos Lagrangianos dan lugar a las mismas ecuaciones de movimiento y cantidades conservadas, pero si quieren ver un poco más sobre esto pueden leer por ejemplo la discusión del libro de Greiner que comienza en la ecuación (5.27) y el ejercicio 5.1 del mismo libro.

Noten que como $\hat{\psi}$ es una solución de la ecuación de Dirac, resulta $\hat{\bar{\psi}}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\hat{\psi}$ y por lo tanto mirando la ecuación (411) el Hamiltoniano cuántico es simplemente $\mathcal{H} = i\hat{\psi}^\dagger\dot{\hat{\psi}}$. Insertando la expansión de los campos cuánticos evaluados a $t = 0$ en esta expresión e integrando en el espacio, podemos escribir el Hamiltoniano cuántico en término de los operadores b y d (esta cuenta ya la hicieron en la teoría y se les pide que la repitan en el Ejercicio 45(a))

$$\hat{H} = i\hat{\psi}^\dagger\dot{\hat{\psi}} = \int d^3\mathbf{p}\,\omega_\mathbf{p}\sum_{s=1,2}\left(\hat{b}_\mathbf{p}^{s\dagger}\hat{b}_\mathbf{p}^s - \hat{d}_\mathbf{p}^s\hat{d}_\mathbf{p}^{s\dagger}\right)\,. \tag{412}$$

Observaciones:

- Ahora que tienen la expresión para el Hamiltoniano pueden calcular por ejemplo la evolución de los operadores b y d (aunque también la pueden inferir de la forma del operador de campo). Por ejemplo, para $\hat{b}_\mathbf{p}$ se tiene[7]

$$\dot{\hat{b}}_\mathbf{p}^s = -i\left[\hat{b}_\mathbf{p}^s, \hat{H}\right] = -i\omega_\mathbf{p}\hat{b}_p^s\,, \tag{414}$$

[7]Para hacer esta cuenta les va a resultar útil la siguiente relación entre conmutadores y anticonmutadores

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \left\{\hat{A}, \hat{B}\right\}\hat{C} - \hat{B}\left\{\hat{A}, \hat{C}\right\}\,. \tag{413}$$

lo que nos dice que $\hat{b}^s_{\mathbf{p}}$ evoluciona con frecuencia positiva (como también lo hace $\hat{d}^s_{\mathbf{p}}$. Por otro lado, $\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}$ y $\hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}$ son operadores que evolucionan con frecuencia negativa. Al escribir la expansión del campo (395) nombramos a los coeficientes de la expansión (los operadores b y d) de la forma en que lo hicimos, para que al asociar a los operadores que evolucionen con frecuencia positiva con operadores de destrucción dichos operadores no lleven †.

- La construcción del espacio de estados es análoga a la que realizamos para el campo escalar. Uno asume que existe un estado $|0\rangle$ que es aniquilado por $\hat{b}^s_{\mathbf{p}}$ y $\hat{d}^s_{\mathbf{p}}$ para todos los valores de $\mathbf{p}$ y s. Luego, actuando sobre el vacío con operadores de creación uno genera estados de varias partículas con momento y energía definidos. Por ejemplo, el estado

$$\hat{b}^{s_1\dagger}_{\mathbf{p_1}}\,\hat{b}^{s_2\dagger}_{\mathbf{p_2}}\,\hat{d}^{s_3\dagger}_{\mathbf{p_3}}\,|0\rangle\ , \tag{415}$$

  representa un estado de tres partículas: dos del tipo b con momentos $\mathbf{p_1}$ y $\mathbf{p_2}$ (y etiquetas s_1 y s_2 que van a estar asociadas a la polarización del espín de cada partícula), y una del tipo d con momento $\mathbf{p_3}$ y polarización s_3.

- Si χ_1 χ_2 son dos operadores asociados a fermiones que se pueden escribir como suma de operadores que evolucionan con frecuencia positiva (+) y negativa (-)

$$\chi_1 = \chi_1^+ + \chi_1^-\ , \quad \chi_2 = \chi_2^+ + \chi_2^-\ , \tag{416}$$

  entonces, el **orden normal** de la composición $\chi_1\chi_2$ se define como

$$:\chi_1\chi_2: \equiv \chi_1^-\chi_2^- + \chi_1^-\chi_2^+ - \chi_2^-\chi_1^+ + \chi_1^+\chi_2^+\,. \tag{417}$$

  Noten que hay un cambio de signo en el tercer sumando respecto de la definición de orden normal de bosones. En términos simples, el orden normal lleva los operadores de creación a la izquierda y cambia un signo. Por ejemplo:

$$:\,\hat{d}^s_{\mathbf{p}}\hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\,: = -\hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{d}^s_{\mathbf{p}}\,. \tag{418}$$

- La energía del vacío asociada al Hamiltoniano (412) no es nula (es infinita!). Vamos a hacer lo mismo que con el campo escalar y sustraer esa energía definiendo al operador Hamiltoniano como el ordenado normalmente de (412), es decir

$$\hat{H} \equiv \int d^3\mathbf{p}\,\omega_{\mathbf{p}} \sum_{s=1,2} \left(\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{b}^s_{\mathbf{p}} + \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{d}^s_{\mathbf{p}}\right)\ . \tag{419}$$

  Noten que con esta definición el espectro de $\hat{H}$ queda acotado por abajo por la energía del vacío $E_0 = 0$. Esto es sencillo de ver: una base de autoestados de $\hat{H}$ está dada por los estados de partículas con momento definido (como por ejemplo (415) y como $\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{b}^s_{\mathbf{p}}$ es un operador de número (cuenta las partículas de tipo b) y $\hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{d}^s_{\mathbf{p}}$ cuenta partículas de tipo d, las energías no pueden ser negativas.

Con estos comentarios terminamos la clase de hoy. La clase que viene vamos a ver que el campo de Dirac tiene una simetría global y probaremos que los estados de partículas b tienen carga opuesta a los de partículas d, lo que nos permitirá entender que estos operadores crean partículas y antipartículas (en forma similar a lo que sucede con el campo escalar complejo). También entenderemos qué representan las polarizaciones de las que hablamos hoy y comentaremos varias cosas relacionadas con el teorema de espín estadística.

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- Convenciones y propiedades de los espinores de Dirac:

$$u^s(p) = \begin{bmatrix} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu}\, \xi^s \\ \sqrt{p_\mu \overline{\sigma}^\mu}\, \xi^s \end{bmatrix}, \quad v^s(p) = \begin{bmatrix} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu}\, \eta^s \\ \sqrt{-p_\mu \overline{\sigma}^\mu}\, \eta^s \end{bmatrix}, \quad (s = 1,\, 2)\,.$$

$$u^{r\dagger}(p)u^s(p) = 2\omega_{\mathbf{p}}\delta_{rs}\,, \quad v^{r\dagger}(p)v^s(p) = 2\omega_{\mathbf{p}}\delta_{rs}\,.$$

$$u^{r\dagger}(p)v^s(-\mathbf{p}) = v^{r\dagger}(-\mathbf{p})u^s(p) = 0\,.$$

$$\bar{u}^r(p)u^s(p) = 2m\delta_{rs}\,, \quad \bar{v}^r(p)v^s(p) = -2m\delta_{rs}\,, \quad (\text{si } m \neq 0).$$

$$\sum_{s=1,2} u^s(p)\bar{u}^s(p) = \not{p} + m\,, \quad \sum_{s=1,2} v^s(p)\bar{v}^s(p) = \not{p} - m\,.$$

- Expresiones cuantizadas de los campos:

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \left[\hat{b}^s_{\mathbf{p}} u^s(p)\, e^{-ipx} + \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} v^s(p)\, e^{ipx}\right]\,.$$

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \left[\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} u^s(p)^\dagger\, e^{ipx} + \hat{d}^s_{\mathbf{p}} v^s(p)^\dagger e^{-ipx}\right]\,.$$

- Relaciones de anticonmutación a tiempos iguales:

$$\left\{\hat{\psi}_a(0,\mathbf{x}), \hat{\psi}^\dagger_b(0,\mathbf{y})\right\} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\delta_{ab}\,.$$

$$\{\hat{b}^r_{\mathbf{p}}, \hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}'}\} = \{\hat{d}^r_{\mathbf{p}}, \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}'}\} = \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\mathbf{rs}}\,, \text{ y todos los otros se anulan.}$$

- El orden normal de dos operadores fermiónicos consiste en llevar todos los operadores de creación hacia la izquierda y multiplicar por (-1) en cada término que sufra un reordenamiento.

4.3.3. Masa, espín y helicidad. Partículas idénticas

Al final de la segunda clase (página 23 del apunte) les habíamos dejado un ejercicio en el cual se planteaba encontrar los operadores de Casimir del álgebra de Poincaré, que eran $P^2 = P^\mu P_\mu$ y $W \equiv -W^\mu W_\mu$, donde $W^\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma}$ es el pseudovector de Pauli-Lubanski. Los operadores de Casimir son un conjunto de operadores que conmutan con todos los elementos del álgebra y sirven para identificar las distintas representaciones irreducibles del grupo de Poincaré[8]. Ahora que avanzamos un poco en el curso, vamos a mencionarles cuáles son las distintas representaciones irreducibles del álgebra de Poincaré, que se dividen en tres clases de acuerdo a los autovalores de P^2 y W:

1. $P^2 = m^2 > 0$

   Los autovalores del operador de Casimir restante, W, resultan ser $m^2\, s(s+1)$. Estas representaciones describen partículas de masa m y espín s, donde $s = 0, 1/2, 1, 3/2, ...$ (por ejemplo, los electrones)

2. $P^2 = 0$ y...

   (a) ...$P \neq 0$

   Estas representaciones corresponden a partículas con masa cero. Si además el autovalor de W es cero, y dado que $W_\mu P^\mu = 0$, se tiene que W^μ y P^μ son proporcionales

   $$W^\mu = hP^\mu\,, \tag{420}$$

   donde la constante de proporcionalidad se conoce como *helicidad*. Una partícula descripta por estas irreps es por ejemplo el fotón.

   Cuando el autovalor de W positivo, estas irreps se conocen como representaciones de espín continuo. Corresponderían a partículas de masa cero con un continuo de estados de polarización (no parecen realizarse en la naturaleza).

   (b) ...$P = 0$

   Describen el vacío de la teoría.

3. $P^2 < 0$

   Estas partículas no parecen existir en la naturaleza (violarían causalidad).

Los números m y s son invariantes de Poincaré, es decir que tienen el mismo valor en cualquier sistema de referencia conectado por transformaciones de Poincare. Esto es lo que uno espera, que los números que diferencian entre sí a las distintas partículas elementales no cambien si uno cambia el sistema de referencia.

[8] Recuerden por ejemplo que las representaciones irreducibles de $su(2)$ se caracterizaban por un número j semientero no negativo. En ese caso, el valor de j estaba relacionado con el autovalor del operador de Casimir $\hat{J}^2$. Para la representación de $j = 0$, el autovalor de $\hat{J}^2$ era 0, para $j = 1/2$ era $3\hbar^2/4$, para $j = 1$ era $2\hbar^2$, etc.

Veamos qué interpretación podemos dar de la helicidad. Para eso, miremos la componente cero del vector de Pauli-Lubanski,

$$W_0 = -\frac{1}{2}\epsilon_{0\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}\,. \tag{421}$$

Noten que los términos con ν, σ o ρ iguales a cero no contribuyen (porque el símbolo de Levi-Civita se anularía ya que uno de sus índices ya es cero). Podemos reemplazar entonces $\nu \to i$, $\rho \to j$ y $\sigma \to k$, donde i, j, k son números del 1 al 3. Entonces

$$W_0 = -\frac{1}{2}\epsilon_{0ijk}P^i M^{jk} = -J_i P^i = J^i P^i = \mathbf{J}\cdot\mathbf{P}\,, \tag{422}$$

donde usamos la definición dada por la ecuación (48). Recordando que la helicidad es la constante de proporcionalidad entre P^μ y W^μ cuando $m = 0$, podemos escribir entonces

$$h = \frac{W_0}{P_0} = \mathbf{J}\cdot\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{P}|}\,, \tag{423}$$

donde usamos que $P^0 = |\mathbf{P}|$. Esta es la definición que uno adopta para la helicidad aún cuando la masa no es nula. Como la parte de $\mathbf{J} = \mathbf{L}+\mathbf{S}$ asociada al momento angular orbital $\mathbf{L}$ es normal al impulso $\mathbf{p}$, resulta

$$h = \mathbf{S}\cdot\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{P}|}\,, \tag{424}$$

Vemos entonces que la helicidad es la proyección del espín en la dirección de movimiento. La helicidad volverá a aparecer en unas clases, cuando estudiemos la cuantización del campo electromagnético.

No pretendemos que entiendan todo el detalle de las cosas que mencionamos recién, pero queríamos comentar algo de esto por si alguno de ustedes tiene interés en revisarlo (pueden encontrar mucho material en la web y en algunos libros, como el de Weinberg que sugerimos en la bibliografía o también pueden ver los problemas 1.14 hasta 1.17 del libro de Radovanovic). Por lo pronto, el mensaje que tienen que llevarse es que en nuestra teoría las partículas libres que nos interesan (las que vemos en la naturaleza) se asocian a representaciones irreducibles del grupo de Poincaré. Cuando la masa es no nula, dos partículas son *idénticas* si tienen los mismos valores de m y s. Si la masa es nula, lo que diferencia a las partículas es su helicidad. Una clasificación más minuciosa de los tipos de partículas que aparecen en el Modelo Estándar se hace estudiando las irreps del producto directo entre el grupo de Poincaré y el grupo de simetrías interno del modelo estándar.

Volvamos ahora sí al campo de Dirac.

4.3.4. Conexión entre espín y estadística

La clase pasada dijimos que al momento de cuantizar el campo de Dirac estábamos obligados a imponer reglas de anticonmutación a tiempos iguales para los operadores de campo. En esta clase, vamos a ver los problemas que habrían surgido si hubiéramos impuesto reglas de conmutación

para los campos y cómo esto se conecta con el teorema de espín-estadística. Empecemos con el siguiente ejercicio.

Ejercicio: (Práctica 4, Ejercicio 46) *Halle $\hat{H}$ pero ahora usando reglas de conmutación entre los b y d (como las del campo escalar complejo) y muestre que el operador no es definido positivo (este fue uno de los primeros indicios que encontró Pauli del teorema Espín-Estadística).*

Recordamos que en la clase pasada vimos que el operador Hamiltoniano se escribe como (ver ecuación (412))

$$\hat{H} = i\hat{\psi}^\dagger\dot{\hat{\psi}}\,. \tag{425}$$

Vamos a necesitar la expansión de los campos (395) y la derivada temporal de la expresión (395) que da

$$\dot{\hat{\psi}}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} \sum_{s=1,2} (-i\omega_\mathbf{p}) \left[\hat{b}^s_\mathbf{p} u^s(p)\, e^{-ipx} - \hat{d}^{s\dagger}_\mathbf{p} v^s(p)\, e^{ipx}\right]. \tag{426}$$

Como la cuenta es larga, vamos a volver a utilizar en algunos momentos la notación $\int_\mathbf{p}$ (ver ecuación (397)). Insertamos la expansión de $\hat{\psi}$ y $\dot{\hat{\psi}}^\dagger$ a tiempo $t = 0$ en la expresión para $\hat{H}$

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{x}\, i\hat{\psi}^\dagger(0,\mathbf{x})\dot{\hat{\psi}}(0,\mathbf{x}) = \tag{427}$$

$$= \sum_{s,r} \int_\mathbf{p}\int_{\mathbf{p}'}\int d^3\mathbf{x}\,\omega_{\mathbf{p}'} \left[\hat{b}^{s\dagger}_\mathbf{p} u^s(p)^\dagger\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{d}^s_\mathbf{p} v^s(p)^\dagger e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right]\left[\hat{b}^r_{\mathbf{p}'} u^r(p')\, e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}} - \hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} v^r(p')\, e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}\right] = \tag{428}$$

$$= \sum_{s,r} \int_\mathbf{p}\int_{\mathbf{p}'}\int d^3\mathbf{x}\,\omega_{\mathbf{p}'} \Big[\hat{b}^{s\dagger}_\mathbf{p}\hat{b}^r_{\mathbf{p}'} u^s(p)^\dagger u^r(p')\, e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} - \hat{b}^{s\dagger}_\mathbf{p}\hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} u^s(p)^\dagger v^r(p')\, e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} +$$
$$+ \hat{d}^s_\mathbf{p}\hat{b}^r_{\mathbf{p}'} v^s(p)^\dagger u^r(p') e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} - \hat{d}^s_\mathbf{p}\hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} v^s(p)^\dagger v^r(p')\, e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}\Big]\,. \tag{429}$$

En la expresión anterior, los únicos términos que dependen de $\mathbf{x}$ son las exponenciales, por lo que la integral en $\mathbf{x}$ se puede hacer y da $(2\pi)^3$ por deltas de Dirac de los momentos. Luego de eso podemos integrar en $\mathbf{p}'$ fácilmente. Escribimos esos pasos

$$\hat{H} = (2\pi)^3 \sum_{s,r} \int_\mathbf{p}\int_{\mathbf{p}'} \omega_{\mathbf{p}'} \Big[\hat{b}^{s\dagger}_\mathbf{p}\hat{b}^r_{\mathbf{p}'} u^s(p)^\dagger u^r(p')\,\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}') - \hat{b}^{s\dagger}_\mathbf{p}\hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} u^s(p)^\dagger v^r(p')\,\delta^3(\mathbf{p}+\mathbf{p}') +$$
$$+ \hat{d}^s_\mathbf{p}\hat{b}^r_{\mathbf{p}'} v^s(p)^\dagger u^r(p')\,\delta^3(\mathbf{p}+\mathbf{p}') - \hat{d}^s_\mathbf{p}\hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} v^s(p)^\dagger v^r(p')\,\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\Big] = \tag{430}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{s,r}\int d^3\mathbf{p}\left[\hat{b}^{s\dagger}_\mathbf{p}\hat{b}^r_\mathbf{p} u^s(p)^\dagger u^r(p) - \hat{b}^{s\dagger}_\mathbf{p}\hat{d}^{r\dagger}_{-\mathbf{p}} u^s(p)^\dagger v^r(-\mathbf{p}) + \hat{d}^s_\mathbf{p}\hat{b}^r_{-\mathbf{p}} v^s(p)^\dagger u^r(-\mathbf{p}) - \hat{d}^s_\mathbf{p}\hat{d}^{r\dagger}_\mathbf{p} v^s(p)^\dagger v^r(p)\right]. \tag{431}$$

Ahora usamos las relaciones entre los espinores dadas por las ecuaciones (389) y (392)

$$\hat{H} = \sum_{s,r} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2} \left[\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}^{r}_{\mathbf{p}} u^s(p)^\dagger u^r(p) - \hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{d}^{r\dagger}_{-\mathbf{p}} u^s(p)^\dagger v^r(-\mathbf{p}) + \hat{d}^{s}_{\mathbf{p}} \hat{b}^{r}_{-\mathbf{p}} v^s(p)^\dagger u^r(-\mathbf{p}) - \hat{d}^{s}_{\mathbf{p}} \hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}} v^s(p)^\dagger v^r(p) \right] = \tag{432}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s,r} \int d^3\mathbf{p} \left[\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}^{r}_{\mathbf{p}} 2\omega_{\mathbf{p}} \delta_{rs} - \hat{d}^{s}_{\mathbf{p}} \hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}} 2\omega_{\mathbf{p}} \delta_{rs} \right] = \tag{433}$$

$$= \int d^3\mathbf{p}\, \omega_{\mathbf{p}} \sum_{s} \left[\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}^{s}_{\mathbf{p}} - \hat{d}^{s}_{\mathbf{p}} \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \right] . \tag{434}$$

Noten que hasta este punto no utilizamos las relaciones de conmutación entre los operadores de creación o destrucción, así que esta es la misma cuenta que lleva al Hamiltoniano que obtuvimos la clase pasada (y les da entonces el resultado del inciso (a) del Ejercicio 45).

Para darnos una idea de cómo es el espectro de $\hat{H}$, queremos escribirlo en términos de operadores de número, ya que conocemos el espectro de dichos operadores. El primer sumando dentro de la integral es el operador de número que cuenta partículas del tipo b con polarización s y momento $\mathbf{p}$. Para que el segundo término fuera un operador de número similar tendríamos que cambiar el orden de los operadores d. Suponiendo que los operadores de creación y destrucción satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\left[\hat{b}^{r}_{\mathbf{p}}, \hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}'} \right] = \left[\hat{d}^{r}_{\mathbf{p}}, \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}'} \right] = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta_{\mathbf{rs}} \text{ (y todos los otros se anulan)}, \tag{435}$$

sacamos que

$$\hat{d}^{s}_{\mathbf{p}} \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} = \left[\hat{d}^{s}_{\mathbf{p}}, \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \right] + \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{d}^{s}_{\mathbf{p}} = \delta^3(\mathbf{0}) + \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{d}^{s}_{\mathbf{p}} \,, \tag{436}$$

con lo que el Hamiltoniano quedaría

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{p}\, \omega_{\mathbf{p}} \sum_{s} \left[\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}^{s}_{\mathbf{p}} - \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{d}^{s}_{\mathbf{p}} \right] + \text{cte} \,, \tag{437}$$

donde la constante que se suma es infinita y nos la vamos a olvidar por un momento pensando que estamos midiendo las energías a menos de esa constante. Noten que como en el Hamiltoniano aparece la diferencia de operadores de número $\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}^{s}_{\mathbf{p}} - \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{d}^{s}_{\mathbf{p}}$, $\hat{H}$ no está acotado por debajo, es decir, sus autovalores nos están acotados por debajo. Para ver esto noten que los estados con número arbitrario n de partículas de tipo d con momento y polarización definidos son autoestados de $\hat{H}$ y el autovalor de $\hat{H}$ correspondiente es proporcional a $-n$ (por el signo menos que aparece entre los operadores b y d), lo que puede tomar valores tan negativos como uno quiera. *Imponer condiciones de conmutación sobre los operadores de creación y destrucción del campo de Dirac nos lleva a obtener un Hamiltoniano que no es definido positivo.* Si en cambio imponemos condiciones de anticonmutación hay un cambio de signo y el operador de número que cuenta las partículas de tipo d aparece sumando, lo que hace que el Hamiltoniano sea definido positivo.

En este punto vale la pena mencionar que las definiciones de orden normal que hicimos para bosones y para fermiones están fuertemente asociadas a las relaciones que cumplen los operadores

de creación y destrucción. Para el escalar, usar las relaciones de conmutación para hacer aparecer el operador de número y olvidarse de la constante infinita (y quedándose con un $\hat{H}$ positivo) era equivalente a usar el orden normal para bosones. Para el campo de Dirac, usar las relaciones de anticonmutación para hacer aparecer el operador de número y olvidarse de la constante infinita (y quedándose con un $\hat{H}$ positivo) es equivalente a usar el orden normal para fermiones, donde hay un cambio de signo adecuado para que $\hat{H}$ sea definido positivo.

Como dice el enunciado del ejercicio anterior, esto está relacionado con el Teorema de Espín-Estadística. El enunciado que probablemente vieron de este teorema si cursaron Física Teórica 3, dice que la función de onda de dos fermiones idénticos es antisimétrica ante intercambio de los fermiones (y para bosones idénticos es simétrica). Como vimos, para que las energías del campo de Dirac sean positivas, los operadores de creación y destrucción tienen que anticonmutar, y si anticonmutan sucede que los estados de dos *partículas idénticas* (por ejemplo, dos del tipo b) son antisimétricos:

$$\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p_1}}\hat{b}^{r\dagger}_{\mathbf{p_2}}\left|0\right\rangle = -\hat{b}^{r\dagger}_{\mathbf{p_2}}\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p_1}}\left|0\right\rangle \ . \tag{438}$$

O sea que el resultado de que los fermiones tengan que anticonmutar implica que la función de onda de dos fermiones idénticos tiene que ser antisimétrica ante intercambio de las partículas. Noten que si en la ecuación (438) toman $r = s$ y $\mathbf{p_1} = \mathbf{p_2}$, lo que implicaría crear un estado de dos fermiones idénticos con todos sus números cuánticos iguales (momento y proyección de espín), se obtiene

$$\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p_1}}\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p_1}}\left|0\right\rangle = 0\,, \tag{439}$$

que es el Principio de Exclusión de Pauli (y que si cursaron Física Teórica 3 ya saben que es una consecuencia de la antisimetría de la función de onda de dos fermiones idénticos).

En el video que subimos hoy van a ver la resolución del Ejercicio 39 de la guía 3, donde les habíamos pedimos que muestren que imponer relaciones de anticonmutación sobre el campo escalar real hace que se viole la condición de microcausalidad. Hay distintos problemas que aparecen si cuantizamos no siguiendo la regla que sale del Teorema de Espín-Estadística (espín entero se cuantiza con reglas de conmutación, espín semientero con reglas de anticonmutación), aquí en el apunte y en el video vimos dos de ellas (energía no acotada y violación de microcausalidad). Si les interesa ver algo más detallado sobre el tema les sugerimos que lean el capítulo 12 del libro de Schwartz.

El Teorema de Espín-Estadística se prueba en general en el contexto de la teoría axiomática de Wightman, y es, junto al Teorema CPT, uno de los resultados que más celebrados de la teoría axiomática de campos.

4.3.5. Simetrías internas

Así como sucedía para el campo escalar complejo, la teoría de Dirac es invariante ante transformaciones internas dadas por el grupo $U(1)$, que corresponden a multiplicar al campo por una fase. En el siguiente ejercicio vamos a ver qué cantidad conservada aparece como consecuencia de esta simetría.

Ejercicio: (Práctica 4, Ejercicio 47) *Halle la cantidad conservada asociada a la simetría $U(1)$ global: $\psi \to e^{i\alpha}\psi$. Muestre que los autovalores de esta carga son opuestos para los estados de 1-partícula creados por $\hat{b}^\dagger$ y $\hat{d}^\dagger$.*

Comencemos viendo que efectivamente la transformación

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi\,, \quad \psi^\dagger \to e^{-i\alpha}\psi^\dagger\,, \tag{440}$$

donde α es un número real, es una simetría de la teoría. Esto es sencillo ya que el Lagrangiano queda invariante ante esta transformación

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger\gamma^0\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi \to \mathcal{L}' = e^{-i\alpha}\psi^\dagger\gamma^0\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)e^{i\alpha}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = \mathcal{L}\,, \tag{441}$$

y como la transformación sólo involucra a los campos y no a las coordenadas, la acción también es invariante. La transformación es entonces una simetría y como consecuencia tenemos una corriente conservada dada por la ecuación (199). Para hallarla, necesitamos ver cómo cambian los campos cuando la transformación es infinitesimal. En este caso, cuando α es pequeño tenemos

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi \approx \psi + i\alpha\psi\,, \quad \psi^\dagger \to e^{-i\alpha}\psi^\dagger \approx \psi - i\alpha\psi^\dagger\,, \tag{442}$$

por lo que en la ecuación (199) tenemos que poner $F_1 = i\psi$ y $F_2 = -i\psi^\dagger$ (recuerden que el índice i identifica los campos, y el índice a la cantidad de parámetros que aparecen en la transformación - como en este caso es un sólo parámetro omitimos ese índice). Además, como la transformación no involucra a las coordenadas, se tiene $A^\mu = 0$. Entonces, la corriente conservada resulta

$$j^\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}i\psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^\dagger)}(-i\psi^\dagger) = -\psi^\dagger\gamma^0 i\gamma^\mu i\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi\,. \tag{443}$$

La carga conservada dada por la ecuación (200) es en este caso

$$Q = \int d^3\mathbf{x}\, j^0(0,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger(0,\mathbf{x})\gamma^0\gamma^0\psi(0,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger(0,\mathbf{x})\psi(0,\mathbf{x})\,. \tag{444}$$

Esta es la expresión clásica de la carga conservada. Los operadores de campo los tomamos evaluados en $t = 0$ para simplificar expresiones posteriores, ya que de todos modos la carga se conserva en el tiempo así la elección de un tiempo particular no cambia nada. El operador cuántico

asociado se obtiene reemplazando los campos clásicos por los operadores de campo y aplicando el orden normal que definimos para fermiones. Para entender mejor la acción del operador $\hat{Q}$ vamos a ver cómo queda escrito en términos de los operadores de creación y destrucción. Para aligerar un poco la notación utilizaremos en algunos momentos la notación $\int_{\mathbf{p}}$ (ver ecuación (397)). Escribimos el operador sin orden normal

$$\hat{Q} = \int d^3\mathbf{x}\, \hat{\psi}^\dagger(0,\mathbf{x})\hat{\psi}(0,\mathbf{x}) = \tag{445}$$

$$= \sum_{s,r} \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{p}'} \int d^3\mathbf{x} \left[\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} u^s(p)^\dagger\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{d}^s_{\mathbf{p}} v^s(p)^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right] \left[\hat{b}^r_{\mathbf{p}'} u^r(p')\, e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}} + \hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}} v^r(p')\, e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}\right] = \tag{446}$$

$$= \sum_{s,r} \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{p}'} \int d^3\mathbf{x} \left[\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}^r_{\mathbf{p}'} u^s(p)^\dagger u^r(p')\, e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} + \hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} u^s(p)^\dagger v^r(p')\, e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} + \right.$$
$$\left. + \hat{d}^s_{\mathbf{p}} \hat{b}^r_{\mathbf{p}'} v^s(p)^\dagger u^r(p')\, e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} + \hat{d}^s_{\mathbf{p}} \hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} v^s(p)^\dagger v^r(p')\, e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}\right] . \tag{447}$$

En la expresión anterior, los únicos términos que dependen de $\mathbf{x}$ son las exponenciales, por lo que la integral en $\mathbf{x}$ se puede hacer y da $(2\pi)^3$ por deltas de Dirac de los momentos. Luego de eso podemos integrar en $\mathbf{p}'$ fácilmente. Escribimos esos pasos

$$\hat{Q} = (2\pi)^3 \sum_{s,r} \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{p}'} \left[\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}^r_{\mathbf{p}'} u^s(p)^\dagger u^r(p')\, \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}') + \hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} u^s(p)^\dagger v^r(p')\, \delta^3(\mathbf{p}+\mathbf{p}') + \right.$$
$$\left. + \hat{d}^s_{\mathbf{p}} \hat{b}^r_{\mathbf{p}'} v^s(p)^\dagger u^r(p')\, \delta^3(\mathbf{p}+\mathbf{p}') + \hat{d}^s_{\mathbf{p}} \hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} v^s(p)^\dagger v^r(p')\, \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\right] = \tag{448}$$

$$\sum_{s,r} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \left[\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}^r_{\mathbf{p}} u^s(p)^\dagger u^r(p) + \hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{d}^{r\dagger}_{-\mathbf{p}} u^s(p)^\dagger v^r(-\mathbf{p}) + \hat{d}^s_{\mathbf{p}} \hat{b}^r_{-\mathbf{p}} v^s(p)^\dagger u^r(-\mathbf{p}) + \hat{d}^s_{\mathbf{p}} \hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}} v^s(p)^\dagger v^r(p)\right] . \tag{449}$$

donde recuerden que estamos usando la notación de clase pasada en la que $v(-\mathbf{p})$ es $v(p)$ pero cambiando $\mathbf{p}$ por $-\mathbf{p}$, y manteniendo p^0 igual. En este punto, es útil recordar las relaciones entre los espinores dadas por las ecuaciones (389) y (392), que nos permiten simplificar la expresión anterior y obtener

$$\hat{Q} = \sum_{s,r} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \left[\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}^r_{\mathbf{p}} 2\omega_{\mathbf{p}} \delta_{rs} + \hat{d}^s_{\mathbf{p}} \hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}} 2\omega_{\mathbf{p}} \delta_{rs}\right] = \tag{450}$$

$$= \int d^3\mathbf{p} \sum_s \left[\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}^s_{\mathbf{p}} + \hat{d}^s_{\mathbf{p}} \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\right] , \tag{451}$$

Tomando entonces orden normal a la expresión anterior (redefinimos $\hat{Q} \to :\hat{Q}:$), que en este caso invierte el orden de los operadores d y cambia un signo, llegamos a la expresión de la carga cuántica en términos de los operadores de creación y destrucción

$$\hat{Q} = \int d^3\mathbf{p} \sum_s \left[\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}^s_{\mathbf{p}} - \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{d}^s_{\mathbf{p}} \right] . \tag{452}$$

Veamos ahora que los estados de una partícula de tipo b o d son autoestados de $\hat{Q}$ y que sus autovalores son opuestos.

$$\begin{aligned}
\hat{Q}\left(\hat{b}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} |0\rangle\right) &= \int d^3\mathbf{p} \sum_s \left[\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}^s_{\mathbf{p}} - \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{d}^s_{\mathbf{p}} \right] \left(\hat{b}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} |0\rangle\right) = && (453)\\
&= \int d^3\mathbf{p} \sum_s \hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}^s_{\mathbf{p}} \hat{b}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} |0\rangle = && (454)\\
&= \int d^3\mathbf{p} \sum_s \hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \left(\left\{ \hat{b}^s_{\mathbf{p}}, \hat{b}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} \right\} - \hat{b}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} \hat{b}^s_{\mathbf{p}} \right) |0\rangle = && (455)\\
&= \int d^3\mathbf{p} \sum_s \hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \delta_{rs} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') |0\rangle = && (456)\\
&= \hat{b}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} |0\rangle . && (457)
\end{aligned}$$

Lo anterior nos dice que $\hat{b}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} |0\rangle$ es autoestado de $\hat{Q}$ con autovalor 1. Si hacemos la misma cuenta va a haber sólo una diferencia en un signo, es decir

$$\hat{Q}\left(\hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} |0\rangle\right) = -\hat{d}^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} |0\rangle . \tag{458}$$

Hicimos la cuenta para practicar el uso de las relaciones de anticonmutación, pero como $\hat{Q}$ es la diferencia entre los operadores de número de partículas de tipo b, $\hat{N}_b \equiv \int d^3\mathbf{p} \sum_s \hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}^s_{\mathbf{p}}$, y número de partículas de tipo d, $\hat{N}_d \equiv \int d^3\mathbf{p} \sum_s \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{d}^s_{\mathbf{p}}$, era claro que el estado de una partícula b iba a ser autoestado de $\hat{Q}$ con autovalor 1 (y lo análogo para el estado de una partícula d, con un signo de diferencia porque $\hat{N}_d$ aparece restando en $\hat{Q}$).

Cuando estudiemos la teoría en la cual el campo de Dirac interactúa con el campo electromagnético, veremos que los autovalores de $\hat{Q}$ son la *carga eléctrica* de los fermiones. Como los estados de una partícula d tienen carga opuesta a los de una partícula b, decimos que d es la antipartícula de b (es importante notar que el valor de la carga es lo único que diferencia a dichos estados).

La teoría de Dirac que estamos estudiando sirve por ejemplo para describir los estados de electrones libres. En ese caso, los operadores b van a crear estados con electrones y los d estados con positrones. Noten que estos estados tienen la misma energía definida (son autoestados de $\hat{H}$ dado en la ecuación (419) con el mismo autovalor).

En el caso particular en el que la masa del campo de Dirac es cero, aparece otra simetría interna de los campos. Si quieren estudiarla les proponemos que realicen el siguiente ejercicio.

Ejercicio: Probar que en el caso $m = 0$ la transformación interna dada por

$$\psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi\,, \quad \psi^\dagger \to \psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma^5}\,, \tag{459}$$

es una simetría de la teoría de Dirac.

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- La helicidad es la proyección del espín en la dirección de movimiento.
- Teorema de Espín-Estadística: los campos de espín entero se cuantizan utilizando reglas de conmutación, mientras que los campos de espín semientero con reglas de anticonmutación.
- El campo de Dirac tiene una simetría interna $U(1)$ (multiplicar el campo por una fase). La carga conservada cuantizada es un operador que permite distinguir los estados de una partícula de tipo b o d (tiene autovalor opuesto para ellos). Los estados de una partícula de tipo d los interpretamos como antipartículas de los estados de una partícula de tipo b.

4.3.6. Simetrías globales

En clases pasadas vimos que la ecuación de Dirac es invariante ante transformaciones del grupo de Poincaré, lo cual a través del teorema de Noether da lugar a corrientes conservadas a partir de las cuales se pueden hallar constantes de movimiento. En la teoría clásica vimos que la corriente conservada ante traslaciones era el tensor de energía-impulso

$$\theta^{\mu\nu}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi,$$

cuyas cargas conservadas eran la energía y el momento lineal

$$H = \int \theta^{00}_{\text{Dirac}} d^3\mathbf{x} = \int i\overline{\psi}\gamma^0\partial^0\psi d^3\mathbf{x}$$

$$P^i = \int \theta^{0i}_{\text{Dirac}} d^3\mathbf{x} = \int i\overline{\psi}\gamma^0\partial^i\psi d^3\mathbf{x}.$$

Al cuantizar estas magnitudes se convertían en operadores

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{p}\,\omega_{\mathbf{p}} \sum_{s=1,2} \left(\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{b}^s_{\mathbf{p}} + \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{d}^s_{\mathbf{p}}\right)$$

$$\hat{P}^i = \int d^3\mathbf{p} \sum_{s=1,2} p^i \left(\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{b}^s_{\mathbf{p}} + \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{d}^s_{\mathbf{p}}\right)$$

que al estar escritos en términos de operadores de creación y aniquilación adquirían un significado nuevo, puesto que los estados de una partícula eran autovectores de los mismos y los términos de la forma $\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{b}^s_{\mathbf{p}}$ no hacían más que contar la cantidad de partículas. De la misma manera en el siguiente ejercicio veremos qué información nueva podemos obtener de la simetría ante rotaciones en la teoría cuántica.

Ejercicio: (Práctica 4, Ejercicio 48) *Escriba la expresión clásica de la carga conservada asociada a la simetría de rotación e identifique la parte que genera la rotación intrínseca del espinor. Halle su versión cuántica y verifique que un estado de la forma* $\hat{b}^{s\dagger}_0|0\rangle$ *o* $\hat{d}^{s\dagger}_0|0\rangle$ *transforma como un objeto de espín* $\frac{1}{2}$ *ante rotaciones.*

Recordemos que al estudiar la versión clásica de la ecuación de Dirac obtuvimos la carga conservada ante transformaciones del grupo de Lorentz

$$Q^0_{\alpha\beta} = \int \left[x_\alpha\theta^0_\beta - x_\beta\theta^0_\alpha + \bar{\psi}\gamma^0\Sigma_{\alpha\beta}\psi\right] d^3\mathbf{x}$$

siendo $\theta^{\mu\nu}_{\text{Dirac}}$ el tensor de energía-impulso.

En particular, la carga conservada ante rotaciones correspondía a tomar $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ y estaba asociada al momento angular del campo. Para ver esto, si definimos

$$(\mathbf{J})_k := \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}Q^0_{ij} = \epsilon_{ijk}(x_i\theta^0_j + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^0\Sigma_{ij}\psi) = \epsilon_{ijk}(x_i i\bar{\psi}\gamma^0\partial_j\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^0\Sigma_{ij}\psi) \tag{460}$$

$$(\vec{\Sigma})_k := \epsilon_{ijk}\Sigma_{ij} \tag{461}$$

tenemos que el momento angular viene dado por

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \tag{462}$$

donde

$$\mathbf{L} := \int \psi^\dagger \left[\mathbf{x} \times i\nabla\right] \psi d^3\mathbf{x} \tag{463}$$

$$\mathbf{S} := \int \psi^\dagger \frac{\vec{\Sigma}}{2} \psi d^3\mathbf{x}. \tag{464}$$

Para entender mejor qué representan físicamente estos términos en la teoría cuántica comencemos expandiendo a los campos en ondas planas

$$\begin{aligned}\mathbf{L} = \int_{\mathbf{p}}\int_{\mathbf{p}'} \sum_{r,s=1,2} \int -\mathbf{x}\times\mathbf{p}\big(&b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}u^{r\dagger}(p')e^{ip'x}b^s_{\mathbf{p}}u^s(p)e^{-ipx} + d^r_{\mathbf{p}'}v^{r\dagger}(p')e^{-ip'x}b^s_{\mathbf{p}}u^s(p)e^{-ipx} \\ &- b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}u^{r\dagger}(p')e^{ip'x}d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^s(p)e^{ipx} - d^r_{\mathbf{p}'}v^{r\dagger}(p')e^{-ip'x}d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^s(p)e^{ipx}\big)d^3\mathbf{x}\end{aligned} \tag{465}$$

$$\begin{aligned}= \int_{\mathbf{p}}\int_{\mathbf{p}'} \sum_{r,s=1,2} \int -\mathbf{x}\times\mathbf{p}\big(&b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}b^s_{\mathbf{p}}u^s(p)u^{r\dagger}(p')e^{-i(p-p')x} + d^r_{\mathbf{p}'}b^s_{\mathbf{p}}u^s(p)v^{r\dagger}(p')e^{-i(p+p')x} \\ &- b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}u^{r\dagger}(p')v^s(p)e^{i(p+p')x} - d^r_{\mathbf{p}'}d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^{r\dagger}(p')v^s(p)e^{i(p-p')x}\big)d^3\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{466}$$

Si ahora tomamos el valor medio sobre un estado de una partícula $d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}|0\rangle$ (pueden verificar que estos no son autoestados de $\mathbf{L}$) sólo sobreviven los términos con $d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\langle :\mathbf{L}: \rangle &= \langle \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \int \mathbf{x}\times\mathbf{p}\left(: d^s_{\mathbf{p}}d^{s\dagger}_{\mathbf{p}} : v^{s\dagger}(p)v^s(p)\right) d^3\mathbf{x}\rangle = \int\int \mathbf{x}\times\mathbf{p}\left(-2\omega_{\mathbf{p}}\right)\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} d^3\mathbf{x} \\ &= -\int \mathbf{x}\times\mathbf{p}\frac{1}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{x},\end{aligned} \tag{467}$$

que podemos reconocer como el momento angular orbital de un partícula cuya amplitud de probabilidad se distribuye uniformemente sobre todo el espacio (esta integral evidentemente diverge si la calculamos sobre todo el espacio, por esa razón es que no permitimos estos estados en nuestro espacio de Hilbert sino las versiones suavizadas ej. 33).

Veamos ahora qué rol cumple el otro término

$$\mathbf{S} = \int \psi^\dagger \frac{\vec{\Sigma}}{2}\psi d^3\mathbf{x} \tag{468}$$

$$\begin{aligned}&= \int_{\mathbf{p}}\int_{\mathbf{p}'} \sum_{r,s=1,2} \int \big(b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}b^s_{\mathbf{p}}u^{r\dagger}(p')\frac{\vec{\Sigma}}{2}u^s(p)e^{-i(p-p')x} + d^r_{\mathbf{p}'}b^s_{\mathbf{p}}v^{r\dagger}(p')\frac{\vec{\Sigma}}{2}u^s(p)e^{-i(p+p')x} \\ &\quad + b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}u^{r\dagger}(p')\frac{\vec{\Sigma}}{2}v^s(p)e^{i(p+p')x} + d^r_{\mathbf{p}'}d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^{r\dagger}(p')\frac{\vec{\Sigma}}{2}v^s(p)e^{i(p-p')x}\big)d^3\mathbf{x}\end{aligned} \tag{469}$$

Ahora podemos integrar sobre $\mathbf{x}$ para formar deltas de Dirac y luego eliminarlas con la integral sobre $\mathbf{p}'$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} = \int_{\mathbf{p}}\int_{\mathbf{p}'} \sum_{r,s=1,2} \Big(& b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} b^{s}_{\mathbf{p}} u^{r\dagger}(p') \frac{\vec{\Sigma}}{2} u^{s}(p)\,(2\pi)^3\, 3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') + d^{r}_{\mathbf{p}'} b^{s}_{\mathbf{p}} v^{r\dagger}(p') \frac{\vec{\Sigma}}{2} u^{s}(p)\,(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}') \\
& + b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} d^{s\dagger}_{\mathbf{p}} u^{r\dagger}(p') \frac{\vec{\Sigma}}{2} v^{s}(p)\,(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}') + d^{r}_{\mathbf{p}'} d^{s\dagger}_{\mathbf{p}} v^{r\dagger}(p') \frac{\vec{\Sigma}}{2} v^{s}(p)\,(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\Big) \\
= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \sum_{r,s=1,2} \Big(& b^{r\dagger}_{\mathbf{p}} b^{s}_{\mathbf{p}} u^{r\dagger}(\mathbf{p}) \frac{\vec{\Sigma}}{2} u^{s}(\mathbf{p}) + d^{r}_{-\mathbf{p}} b^{s}_{\mathbf{p}} v^{r\dagger}(-\mathbf{p}) \frac{\vec{\Sigma}}{2} u^{s}(\mathbf{p}) \\
& + b^{r\dagger}_{-\mathbf{p}} d^{s\dagger}_{\mathbf{p}} u^{r\dagger}(-\mathbf{p}) \frac{\vec{\Sigma}}{2} v^{s}(\mathbf{p}) + d^{r}_{\mathbf{p}} d^{s\dagger}_{\mathbf{p}} v^{r\dagger}(\mathbf{p}) \frac{\vec{\Sigma}}{2} v^{s}(\mathbf{p})\Big).
\end{aligned} \tag{470}$$

Veamos cómo actúa dicho operador sobre el estado $b^{q\dagger}_0|0\rangle$, es decir, el estado de una partícula de tipo b con momento nulo (en ese caso, actuar con $\mathbf{S}$ es lo mismo que actuar con $\mathbf{J}$ ya que la parte de $\mathbf{L}$ no contribuye porque $\mathbf{p}=\mathbf{0}$). En lugar de hacer la cuenta directa, que involucraría tratar con la forma explícita de las soluciones u y v, vamos a notar que

$$\mathbf{S} b^{q\dagger}_0|0\rangle = \left[\mathbf{S}, b^{q\dagger}_0\right]|0\rangle + b^{q\dagger}_0 \mathbf{S}|0\rangle = \left[\mathbf{S}, b^{q\dagger}_0\right]|0\rangle\,, \tag{471}$$

ya que $\mathbf{S}|0\rangle = \mathbf{J}|0\rangle = 0$. Esto es así porque $\mathbf{J}$ es un generador del álgebra de Lorentz y como la teoría tiene invariancia de Lorentz, el vacío es invariante

$$e^{i\alpha J^i}|0\rangle = |0\rangle \implies |0\rangle + i\alpha J^i|0\rangle + ... = |0\rangle\,, \tag{472}$$

de donde sale que todos los términos con potencias distintas de α (que es un parámetro arbitrario) deben anularse. En particular

$$J^i|0\rangle = 0\,. \tag{473}$$

Para seguir con la cuenta (471) es necesario calcular $\left[\mathbf{S}, b^{q\dagger}_0\right]$, para lo que va a ser necesario que utilicen la ecuación (413) para escribir el conmutador en términos de anticonmutadores. De los cuatro términos que salen de hacer esta cuenta sólo dos son nulos, los dados por

$$\left[\hat{b}^{r\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}^{s}_{\mathbf{p}}, b^{q\dagger}_{\mathbf{0}}\right] = \delta_{sq}\delta^3(\mathbf{0})\hat{b}^{r\dagger}_{\mathbf{p}}\,, \tag{474}$$

$$\left[\hat{d}^{r}_{-\mathbf{p}} \hat{b}^{s}_{\mathbf{p}}, b^{q\dagger}_{\mathbf{0}}\right] = \delta_{sq}\delta^3(\mathbf{0})\hat{d}^{r}_{-\mathbf{p}}\,, \tag{475}$$

pero al actuar sobre el vacío sólo sobrevive el primero de ellos. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} b^{q\dagger}_0|0\rangle &= \left[\mathbf{S}, b^{q\dagger}_0\right]|0\rangle && (476)\\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \sum_{r,s=1,2} u^{r\dagger}(\mathbf{p}) \frac{\vec{\Sigma}}{2} u^{s}(\mathbf{p}) \delta_{sq}\delta^3(\mathbf{p}) \hat{b}^{r\dagger}_{\mathbf{p}}|0\rangle = && (477)\\
&= \frac{1}{2m} \sum_{r=1,2} u^{r\dagger}(\mathbf{0}) \frac{\vec{\Sigma}}{2} u^{s}(\mathbf{0}) \hat{b}^{r\dagger}_{\mathbf{0}}|0\rangle = && (478)\\
&= \frac{1}{2} \sum_{r=1,2} (\vec{\sigma})_{rq}\, \hat{b}^{r\dagger}_{\mathbf{0}}|0\rangle\,, && (479)
\end{aligned}$$

donde para llegar a la última línea usamos la expresión explícita de u y v, que se simplifica considerablemente al tener $\mathbf{p} = 0$, dando

$$u^{r\dagger}(\mathbf{0})\frac{\vec{\Sigma}}{2}u^{s}(\mathbf{0}) = \sum_{r=1,2} m\,(\vec{\sigma})_{rq}\ . \tag{480}$$

Para convencerse de esta última igualdad, les recomendamos que lo hagan una vez para alguna de las componentes (por ejemplo, para Σ_x). Tenemos finalmente

$$\mathbf{S}b_0^{q\dagger}|0\rangle = \sum_{r=1,2} \frac{\vec{\sigma}_{rq}}{2}\hat{b}_{\mathbf{0}}^{r\dagger}|0\rangle\,. \tag{481}$$

Luego tomando $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b_0^{1\dagger}|0\rangle$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b_0^{2\dagger}|0\rangle$ tenemos que ante una rotación de ángulo θ en el plano ortogonal a $\hat{n}$, una combinación lineal χ de estos estados cambia según

$$\chi' = e^{-i\frac{\omega_{ij}}{2}Q^0_{ij}}\chi = e^{-i\frac{\omega_{ij}}{2}\epsilon_{ijk}J_k}\chi = e^{-i\vec{\theta}\cdot\mathbf{J}}\chi = e^{-i\theta\hat{n}\frac{\vec{\sigma}}{2}}\chi \tag{482}$$

donde usamos las siguientes definiciones

$$Q^0_{ij} = \epsilon_{ijk}J_k \tag{483}$$

$$(\vec{\theta})_k := \frac{\omega_{ij}}{2}\epsilon_{ijk} \tag{484}$$

$$\theta := |\vec{\theta}| \tag{485}$$

$$\hat{n} := \frac{\vec{\theta}}{\theta} \tag{486}$$

y que $\mathbf{L}b_0^{2\dagger}|0\rangle = 0$. La ecuación (482) muestra entonces que aún partículas sin momento poseen un momento angular intrínseco, el cual ante rotaciones genera que transformen como espinores. Resulta natural entonces asociar $\mathbf{S}$ al espín de las partículas. Noten que mientras en la mecánica cuántica tradicional el espín debemos introducirlo a la fuerza considerando un operador de momento angular intrínseco de dimensión finita, aquí el espín surje naturalmente de la invariancia relativista del campo de Dirac. Así como el cálculo de la carga conservada por la simetría ante $U(1)$ nos permitió dar una intepretación de $\hat{b}^s_{\mathbf{p}}$ como operador de aniquilación de partículas y $\hat{d}^s_{\mathbf{p}}$ de anti-partículas, aplicando S_z encontramos

$$\begin{aligned} S_z\left(\hat{b}^{1\dagger}_{\mathbf{p}}|0\rangle\right) &= +\frac{1}{2}\hat{b}^{1\dagger}_{\mathbf{p}}|0\rangle, \quad S_z\left(\hat{b}^{2\dagger}_{\mathbf{p}}|0\rangle\right) = -\frac{1}{2}\hat{b}^{2\dagger}_{\mathbf{p}}|0\rangle \\ S_z\left(\hat{d}^{1\dagger}_{\mathbf{p}}|0\rangle\right) &= -\frac{1}{2}\hat{d}^{1\dagger}_{\mathbf{p}}|0\rangle, \quad S_z\left(\hat{b}^{2\dagger}_{\mathbf{p}}|0\rangle\right) = +\frac{1}{2}\hat{d}^{2\dagger}_{\mathbf{p}}|0\rangle \end{aligned} \tag{487}$$

de manera tal que podemos identificar al índice s en $\hat{b}^s_{\mathbf{p}}$ o $\hat{d}^s_{\mathbf{p}}$ con las proyecciones de espín en z.

4.3.7. Funciones de dos puntos y propagadores

Ejercicio: (Práctica 4, Ejercicio 49) *Una transformación de Poincaré dada por* (Λ, a) *tiene asociado un operador unitario que actúa en el campo de Dirac de la siguiente forma:*

$$U^\dagger(\Lambda, a)\psi_i(x)U(\Lambda, a) = S_{ij}(\Lambda^{-1})\psi_j(\Lambda x + a)$$

siendo S *la matriz que aparece en la transformación de un espinor de Dirac. Muestre a partir de esto que las funciones de dos puntos resultan invariantes ante traslaciones espacio-temporales pero no necesariamente ante transformaciones de Lorentz.*

La función de dos puntos es por definición

$$\langle 0|\psi_i(x)\psi_j(y)|0\rangle \tag{488}$$

al realizar una traslación (Id, a) tenemos que

$$S(\mathrm{Id}^{-1})\psi_i(\mathrm{Id}\ x + a) = \psi_i(x + a) = U^\dagger(\mathrm{Id}, a)\psi_i(x)U(\mathrm{Id}, a)$$

y por lo tanto la función de dos puntos pasa a ser

$$\langle 0|\psi_i(x + a)\psi_j(y + a)|0\rangle = \langle 0|U^\dagger(\mathrm{Id}, a)\psi_i(x)U(\mathrm{Id}, a)U^\dagger(\mathrm{Id}, a)\psi_j(y)U(\mathrm{Id}, a)|0\rangle \tag{489}$$

y usando que el vacío es invariante ante transformaciones de Lorentz tenemos

$$\langle 0|\psi_i(x + a)\psi_k(y + a)|0\rangle = \langle 0|\psi_i(x)\psi_k(y)|0\rangle. \tag{490}$$

Si la función de dos puntos fuese invariante ante transformaciones de Lorentz tendríamos

$$\langle 0|\psi_i(\Lambda x + a)\psi_q(\Lambda y + a)|0\rangle = \langle 0|\psi_i(x)\psi_q(y)|0\rangle, \tag{491}$$

pero

$$\langle 0|S_{ij}(\Lambda)U^\dagger(\Lambda, a)\psi_j(x)U(\Lambda, a)S_{ij}(\Lambda)U^\dagger(\Lambda, a)\psi_q(y)U(\Lambda, a)|0\rangle = \langle 0|\psi_i(x)\psi_q(y)|0\rangle, \tag{492}$$

$$\langle 0|S_{ij}(\Lambda)\psi_j(x)S_{qk}(\Lambda)\psi_k(y)|0\rangle = \langle 0|\psi_i(x)\psi_q(y)|0\rangle, \tag{493}$$

lo cual sólo vale si $S_{ij}(\Lambda) = \delta_{ij}$, es decir, $\Lambda = \mathrm{Id}$ y la transformación es una traslación espacio-temporal. Si bien esta función de dos puntos no es invariante ante transformaciones de Lorentz, recordando lo que hicimos con los bilineales de Dirac podemos sospechar que una de la forma $\langle 0 \mid \psi_\alpha(x)\bar{\psi}(y) \mid 0\rangle$ sí lo sea.

Ejercicio: (Práctica 4, Ejercicio 51) *Considere la función de 2-puntos ordenada temporalmente* $S_{\alpha\beta}(x-y) \equiv -iT\langle 0 \mid \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) \mid 0\rangle$

(a) Muestre que $S_{\alpha\beta}(x-y) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\Delta_F(x-y)$*, siendo* $\Delta_F(x-y)$ *el propagador de Feynman del campo de Klein Gordon.*

(b) Halle la expresión integral en el espacio de momentos del propagador.

Comencemos asumiendo que $x_0 > y_0$ y calculemos

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle =& \langle \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} \sum_{s=1,2} \left(b^s_\mathbf{p} u^s(p)e^{-ipx} + d^{s\dagger}_\mathbf{p} v^s(p)e^{ipx}\right) \times \\ &\times \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} \sum_{r=1,2} \left(b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}\bar{u}^r(p')e^{ip'y} + d^r_{\mathbf{p}'}\bar{v}^r(p')e^{-ip'y}\right)\rangle \end{aligned} \tag{494}$$

$$\begin{aligned} = \langle \int\int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} \sum_{r,s=1,2} \big(&b^s_\mathbf{p} b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} u^s(p)\bar{u}^r(p')e^{-i(px-p'y)} + d^{s\dagger}_\mathbf{p} b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} v^s(p)\bar{u}^r(p')e^{i(px+p'y)} \\ &+ b^s_\mathbf{p} d^r_{\mathbf{p}'} u^s(p)\bar{v}^r(p')e^{-i(px+p'y)} + d^{s\dagger}_\mathbf{p} d^r_{\mathbf{p}'} v^s(p)\bar{v}^r(p')e^{i(px-p'y)}\big)\rangle. \end{aligned} \tag{495}$$

Luego usando que

$$\langle b^s_\mathbf{p} b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}\rangle = \delta_{rs}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{496}$$

$$\langle b^s_\mathbf{p} b^r_{\mathbf{p}'}\rangle = \langle b^{s\dagger}_\mathbf{p} b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}\rangle = \langle d^s_\mathbf{p} d^r_{\mathbf{p}'}\rangle = \langle d^{s\dagger}_\mathbf{p} d^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}\rangle = \langle d^{s\dagger}_\mathbf{p} d^r_{\mathbf{p}'}\rangle = 0. \tag{497}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{p}} \sum_{s=1,2} \left(u^s(p)\bar{u}^s(p)e^{-ip(x-y)}\right) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_\mathbf{p}} \sum_s \left(\gamma^\mu p_\mu + m\right) e^{-ip(x-y)} \\ &= (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_\mathbf{p}} e^{-ip(x-y)}. \end{aligned} \tag{498}$$

Análogamente tenemos que

$$\langle 0|\overline{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle = -\left(i\gamma^\mu\partial_\mu + m\right)\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_\mathbf{p}} e^{-ip(y-x)}, \tag{499}$$

de donde concluimos

$$\begin{aligned}\langle 0|T\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle :&= \theta(x_0-y_0)\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle - \theta(y_0-x_0)\langle 0|\overline{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle \\ &= (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_\mathbf{p}}[e^{-ip(x-y)}\theta(x_0-y_0) + e^{-ip(y-x)}\theta(y_0-x_0)] \\ &= (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\,\Delta_F(x-y). \end{aligned} \tag{500}$$

También será útil más adelante reescribirla como

$$\begin{aligned} S(x-y) &= (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\lim_{\epsilon\to 0}\int e^{-ip(x-y)}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{i\left(\gamma^\mu p_\mu + m\right)}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip(x-y)}\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \end{aligned} \tag{501}$$

Finalmente, podemos utilizar este resultado para notar que el propagador de Feynman $S_F(x-y)$ es una función de Green de la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,S(x-y) = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\,\Delta_F(x-y) \tag{502}$$

$$= -\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\Delta_F(x-y) = i\delta(x-y). \tag{503}$$

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- Los estados de la forma $\hat{b}_0^{s\dagger}\,|0\rangle$ (o $\hat{d}_0^{s\dagger}\,|0\rangle$) transforman como un objeto de espín $\frac{1}{2}$ ante rotaciones. Los interpretamos como estados de una partícula (o antipartícula) con momento nulo y proyección de espín definida.

- Las funciones de dos puntos $\langle 0|\psi_i(x)\psi_j(y)|0\rangle$ son invariantes ante traslaciones pero no ante transformaciones de Lorentz.

- El propagador del campo de Dirac puede expresarse como

$$S(x-y) = \lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{i\left(\gamma^\mu p_\mu + m\right)}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip(x-y)}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

.

4.3.8. Material adicional: Violación de las condiciones de energía en QFT

Muchas veces en relatividad general uno impone que $T_{\mu\nu}$ satisfaga una serie de relaciones que se conocen como *condiciones clásicas de energía*. Estas condiciones son desigualdades que se imponen para que las soluciones de las ecuaciones de Einstein sean físicamente "razonables". Por ejemplo, la condición de energía nula (NEC, por Null Energy Condition)

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0\,, \text{ para todo } u \text{ nulo}\,,$$

está relacionada con el teorema de Hawking que implica que el área de los agujeros negros crece con el tiempo. Otra de ellas, la condición de energía débil (WEC, por Weak Energy Condition)

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0\,, \text{ para todo } u \text{ temporal}\,,$$

está asociada a que desde el punto de vista de cualquier observador la *densidad de energía es no negativa*.

Debido a la simetría de Poincaré y a la existencia de un estado fundamental, la energía total es siempre positiva en teoría de campos cuántica. Sin embargo, *la densidad de energía puede tomar valores negativos* si es compensada por la presencia de densidad de energía positiva en otras regiones del espacio. Esto ocurre por ejemplo entre las placas del efecto Casimir en algunas configuraciones. En general, en toda teoría cuántica de campos relativista siempre hay estados con densidad de energía negativa. Esto es un fenómeno puramente cuántico que no persiste en el límite clásico: por ejemplo, nosotros vimos que la densidad de energía para un campo escalar libre clásico $T^{00}(x) = \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right)$ es definida positiva. En el proceso de cuantización, la sustracción de la energía de punto cero hace que el operador densidad de energía tenga signo no definido.

La violación cuántica de la condición de energía nula es necesaria para la evaporación de agujeros negros. La existencia de agujeros de gusano atravesables y máquinas del tiempo requieren la presencia de una cantidad suficiente de energía negativa, o sea que se viole la condición de energía débil.

Les proponemos que miren el ejercicio 53 de la práctica 4 (opcional), donde se les pide que encuentren un estado para el cual la densidad de energía del campo de Dirac tenga valor de expectación negativo en algunas regiones del espacio, viendo así un ejemplo de violación de la condición de energía débil.

Si les interesa el tema, les recomendamos que lean por ejemplo el review "Lectures on quantum energy inequalities", de C. J. Fewster (https://arxiv.org/abs/1208.5399).

4.4. Campo de Proca

Los campos de Proca y Maxwell, que corresponden a representaciones de espín y helicidad (respectivamente) 1, tienen en común la dificultad de que los 4 campos que aparecen en el Lagrangiano no son todos independientes. En estas clases veremos cómo se solucionan los problemas que surgen al implementar la cuantización canónica de dichos campos.

Empezaremos estudiando el campo de Proca, que es más sencillo y veremos que su cuantización se trata de la misma forma que la de los campos escalar y de Dirac. Más allá de su simplicidad que lo hace ideal para comenzar el estudio de campos vectoriales, destacamos que el campo de Proca es importante porque describe estados de partículas que se encuentran en la naturaleza, por ejemplo los bosones masivos Z y W.

4.4.1. Teoría clásica

Antes de pasar a la cuantización, vamos a comenzar recordando algunos aspectos de la teoría clásica de Proca. Si aún no lo hicieron, puede resultarles útil ver el video de la práctica que subimos el 18/05, donde comentamos algunas cosas que en esta clase veremos con más detalle.

Ejercicio: (Práctica 5, Ejercicio 54) *Considere el lagrangiano de Proca* $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}Z_\mu Z^\mu$, *para un campo* Z_μ *que es un cuadrivector (real), siendo* F *la expresión usual:* $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$

(a) *Muestre que las ecuaciones de movimiento que se desprenden de este Lagrangiano equivalen a estas dos ecuaciones:*

$$(i)\ \Box Z^\mu + m^2 Z^\mu = 0 \quad (ii)\ \partial_\nu Z^\nu = 0$$

Observe que el signo del término de masa en el Lagrangiano es opuesto al del Lagrangiano de Klein-Gordon y pese a ello contribuye de la misma forma en la ecuación i).

Las ecuaciones de movimiento asociadas a este Lagrangiano son

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu Z^\nu\right)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z^\nu} = 0 \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 Z^\nu = 0 \tag{504}$$

Noten que si tomamos la derivada con respecto a x^ν de la ecuación anterior, obtenemos

$$\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2\partial_\nu Z^\nu = 0 \implies \partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2\partial_\nu Z^\nu = 0 \implies \tag{505}$$

$$\implies \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2\partial_\nu Z^\nu = 0 \implies \tag{506}$$

$$\implies \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu(-F^{\nu\mu}) + m^2\partial_\nu Z^\nu = 0 \implies \tag{507}$$

$$\implies \partial_\nu Z^\nu = 0\,. \tag{508}$$

Esta última ecuación es un vínculo y es la ecuación (ii) que les propusimos encontrar en el enunciado. Escribiendo con más detalle la ecuación de movimiento (504) y usando el vínculo (508) podemos llegar a la ecuación (i)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 Z^\nu = 0 \implies \partial_\mu(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + m^2 Z^\nu = 0 \implies \Box Z^\nu + \partial^\nu \underbrace{\partial_\mu Z^\mu}_{=0} + m^2 Z^\nu = 0\,. \tag{509}$$

(b) *Verifique que $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})e^{-ikx}$ (y su complejo conjugado) (para $\lambda = 1, 2, 3$) es solución de las ecuaciones, satisfaciendo k la condición $k^2 = m^2$ y siendo los 3 cuadrivectores $\epsilon^{(\lambda)}$ los cuadivectores transversales a k dados en el apéndice (ver Ejercicio 63).*

La cuenta es bastante trivial, ya que la única dependencia en x aparece en la exponencial

$$\left(\Box + m^2\right) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})e^{-ikx} = \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \left(\Box + m^2\right) e^{-ikx}\,, \tag{510}$$

y como ya sabemos que e^{-ikx} es una solución a la ecuación de Klein-Gordon si $k^2 = m^2$, resulta

$$\left(\Box + m^2\right) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})e^{-ikx} = 0\,, \tag{511}$$

si $k^2 = m^2$.

(c) *Verifique que el momento canonico conjugado a Z^0 es idénticamente cero y que Z^0, usando la ecuación (ii), puede escribirse en función de los momentos canónicos asociados a Z^i (observación: esto es relevante para la cuantización canónica, dado que pone de manifiesto que las únicas variables dinámicas son los tres campos A_i y sus momento canónicos conjugados).*

El momento canónico asociado a la componente Z^σ está dado por

$$\begin{aligned}
\pi_\sigma &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0 Z^\sigma\right)} = && (512)\\
&= -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\left(\partial^0 Z^\sigma\right)}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) = && (513)\\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial\left(\partial^0 Z^\sigma\right)}F_{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial\left(\partial^0 Z^\sigma\right)}\right] = && (514)\\
&= -\frac{1}{4}\left[\left(g_0^\mu g_\sigma^\nu - g_0^\nu g_\sigma^\mu\right)F_{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\left(g_{\mu 0}g_{\nu\sigma} - g_{\nu 0}g_{\mu\sigma}\right)\right] = && (515)\\
&= -\frac{1}{4}\left(F_{0\sigma} - F_{\sigma 0} + F_{0\sigma} - F_{\sigma 0}\right) = && (516)\\
&= -\frac{1}{2}\left(F_{0\sigma} - F_{\sigma 0}\right) && (517)\\
&= F_{\sigma 0}\,, && (518)
\end{aligned}$$

donde en la última línea usamos la antisimetría de $F^{\mu\nu}$. Como $F_{00} = 0$ (también por la antisimetría), resulta

$$\pi_0 = 0\,. \tag{519}$$

Este resultado está asociado a que el campo Z^0 no tiene dinámica (es decir, que no aparecen sus derivadas al cuadrado en el Lagrangiano). En efecto, el campo Z^0 queda determinado

si uno conoce los tres campos A^i y sus momentos canónicos conjugados. Para ver esto, escribimos la ecuación de movimiento para Z^0

$$\partial^\mu F_{\mu 0} + m^2 Z^0 = 0 \implies Z^0 = -\frac{1}{m^2}\partial^i F_{i0} = -\frac{1}{m^2}\partial^i \pi_i \,, \tag{520}$$

ya que $F_{00} = \pi_0 = 0$.

4.4.2. Cuantización canónica

En la sección anterior vimos que A^0 no es una variable dinámica sino que viene determinada por el valor de los campos A^i y sus momentos canónicos conjugados π^i. Además, en el inciso (b) del Ejercicio 54, encontramos soluciones a la ecuación de movimiento para el campo de Proca clásico. Siguiendo un procedimiento similar al realizado para los campos escalar y de Dirac, vamos a proponer que el campo de Proca cuantizado tenga una expansión dada por una combinación lineal de las soluciones clásicas pesada con coeficientes $\hat{a}^{(\lambda)}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}^{(\lambda)\dagger}_{\mathbf{k}}$

$$\hat{Z}_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{\lambda=1}^{3} \left[\hat{a}^{(\lambda)}_{\mathbf{k}} \epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \hat{a}^{(\lambda)\dagger}_{\mathbf{k}} \epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})^* e^{ikx}\right] . \tag{521}$$

Para que se satisfagan las siguientes relaciones de conmutación canónicas

$$\left[\hat{A}^i(t,\mathbf{x}), \hat{\pi}_j(t,\mathbf{y})\right] = i\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \,, \tag{522}$$

$$\left[\hat{A}^i(t,\mathbf{x}), \hat{A}^j(t,\mathbf{y}),\right] = \left[\hat{\pi}^i(t,\mathbf{x}), \hat{\pi}^j(t,\mathbf{y}),\right] = 0 \,, \tag{523}$$

los operadores deben cumplir

$$\left[\hat{a}^{(\lambda)}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^{(\lambda')\dagger}_{\mathbf{k}'}\right] = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{\lambda\lambda'} \,, \tag{524}$$

y todos los otros se anulan.

En forma análoga a lo hecho para los otros campos, se construye el espacio de Hilbert como un espacio de Fock a partir de asumir la existencia de un estado $|0\rangle$ (vacío) aniquilado por todos los operadores $\hat{a}^{(\lambda)}_{\mathbf{k}}$.

Con esto, uno puede proceder a estudiar todas las mismas cosas que ya vimos para los campos estudiados previamente. Veamos por ejemplo el siguiente ejercicio.

Ejercicio: (Práctica 5, Ejercicio 55) *La expresión del campo de Proca cuantizado es:*

$$\hat{Z}_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \sum_{\lambda=1}^{3} \left[\hat{a}^\lambda_\mathbf{k}\epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})e^{-ikx} + \hat{a}^{\lambda\dagger}_\mathbf{k}\epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})^* e^{ikx}\right]$$

donde $\left[\hat{a}^{(\lambda)}_\mathbf{k}, \hat{a}^{(\lambda')\dagger}_{\mathbf{k}'}\right] = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{\lambda\lambda'}$ *y todas las demas cero. Hallar la expresion de la función de dos puntos* $\langle 0| Z^\mu(x)Z^\nu(y)|0\rangle$ *en términos de la de un campo escalar real.*

Vamos a volver a utilizar la notación dada en la ecuación (397) para compactar algunas expresiones. Escribimos

$$\langle 0| Z_\mu(x)Z_\nu(y)|0\rangle = \tag{525}$$

$$= \int_\mathbf{k}\int_{\mathbf{k}'} \sum_{\lambda,\lambda'} \langle 0| \left[\hat{a}^{(\lambda)}_\mathbf{k}\epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})e^{-ikx} + \hat{a}^{(\lambda)\dagger}_\mathbf{k}\epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})^* e^{ikx}\right]\left[\hat{a}^{(\lambda')}_{\mathbf{k}'}\epsilon^{(\lambda')}_\nu(\mathbf{k}')e^{-ik'y} + \hat{a}^{(\lambda')\dagger}_{\mathbf{k}'}\epsilon^{(\lambda')}_\nu(\mathbf{k}')^* e^{ik'y}\right]|0\rangle = \tag{526}$$

$$= \int_\mathbf{k}\int_{\mathbf{k}'} \sum_{\lambda,\lambda'} \langle 0| \hat{a}^{(\lambda)}_\mathbf{k}\hat{a}^{(\lambda')\dagger}_{\mathbf{k}'}|0\rangle \epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})\epsilon^{(\lambda')}_\nu(\mathbf{k}')^* e^{-i(kx-k'y)} = \tag{527}$$

$$= \int_\mathbf{k}\int_{\mathbf{k}'} \sum_{\lambda,\lambda'} \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\delta_{\lambda\lambda'}\,\epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})\epsilon^{(\lambda')}_\nu(\mathbf{k}')^* e^{-i(kx-k'y)} = \tag{528}$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}} e^{-ik(x-y)} \sum_\lambda \epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})\epsilon^{(\lambda')}_\nu(\mathbf{k})^* \,. \tag{529}$$

Para simplificar esta expresión, podemos usar una ecuación que nos da el resultado de la suma sobre λ de los vectores de polarización

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \epsilon^{(\lambda)}_\mu \epsilon^{(\lambda)}_\nu = -\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}k_\mu k_\nu \,. \tag{530}$$

Noten que podemos usarla dado que nuestro cuadrivector k es de tipo tiempo ya que $k^2 = m^2 > 0$. Aquí vamos a asumir que dicha relación vale (les proponemos que la demuestren en el Ejercicio 63 en la práctica 5. Puede resultarles útil leer también la sección 6.4.1 del libro de Greiner). Noten que sin embargo esa expresión es levemente diferente que la que aparece en (529) donde uno de los vectores de polarización está conjugado. Sin embargo, podemos usarla suponiendo que tomamos una base lineal para los vectores de polarización de modo que resulte $\epsilon^{(\lambda')}_\nu(\mathbf{k})^* = \epsilon^{(\lambda')}_\nu(\mathbf{k})$ (y al final, el resultado va a ser independiente del conjunto de vectores de polarización que hayamos elegido). Entonces, tomando vectores de polarización lineales, se tiene

$$\langle 0| \hat{Z}_\mu(x)\hat{Z}_\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}} e^{-ik(x-y)} \sum_\lambda \epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})\epsilon^{(\lambda')}_\nu(\mathbf{k}) = \tag{531}$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}} e^{-ik(x-y)} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}k_\mu k_\nu\right) = \tag{532}$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}} \left(-\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu\right) e^{-ik(x-y)} \,, \tag{533}$$

donde para escribir la última línea usamos que $\partial_\mu \partial_\nu e^{-ik(x-y)} = -k_\mu k_\nu$ (las derivadas son con respecto a x). Llegamos finalmente entonces a que

$$\langle 0| \hat{Z}_\mu(x) \hat{Z}_\nu(y) |0\rangle = -\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\partial_\mu \partial_\nu\right) \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-ik(x-y)}\,, \tag{534}$$

donde la integral que aparece en la última ecuación es justamente la función de dos puntos de un campo escalar (por ejemplo, para $(x^\mu) = (0, \mathbf{x})$ e $(y^\mu) = (0, \mathbf{y})$ pueden ver que habíamos llegado a esa misma integral en la ecuación (306).

Como ven, la forma de trabajar es la misma que la veníamos utilizando para los otros campos. Noten que el campo de Proca que cuantizamos es hermítico, lo que implica que este campo no tiene carga y por lo tanto describe partículas de masa no nula y espín 1 sin carga. Para obtener partículas con carga, hay que cambiar $a_{\mathbf{k}}^{\lambda\dagger} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})^*$ por un nuevo operador $b_{\mathbf{k}}^{\lambda\dagger} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})^*$ en la ecuación (521), en forma análoga a lo realizado para el campo escalar complejo.

4.5. Campo de Maxwell

La cuantización del campo de Maxwell es fundamental ya que dicho campo describirá los fotones, que son las partículas mediadoras de la electrodinámica cuántica (la teoría interactuante en la que principalmente nos enfocaremos en el curso). A diferencia del campo de Proca, el campo de Maxwell no tiene masa y esto hace que las cosas se compliquen bastante más. En particular, noten que ya no es válida la ecuación (520) que nos decía que la componente cero del campo no tenía dinámica. Como vimos en el Ejercicio 28 (ver video de la práctica subido el 18/05) el campo tiene invariancia ante transformaciones de gauge. Esto significa que las ecuaciones de movimiento del campo de Maxwell (que salen de poner $m = 0$ en la ecuación (504))

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0\,, \tag{535}$$

siguen valiendo si reemplazamos

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \Lambda(x)\,, \tag{536}$$

siendo $\Lambda(x)$ una función arbitraria del espacio-tiempo. La invariancia ante transformaciones de gauge es responsable de que los grados de libertad del campo sean dos en lugar de cuatro. En esta última parte de la clase (y en la siguiente) veremos los problemas que aparecen al cuantizar el campo de Maxwell y de qué modo podemos eliminar estos dos grados de libertad espúreos.

Comencemos con el siguiente ejercicio.

Ejercicio: (Práctica 5, Ejercicio 56) *Considere ahora el Lagrangiano de Maxwell, que se obtiene usando el Lagrangiano de Proca con $m = 0$. Ahora la condición ii) no sigue de las ecuaciones de movimiento. En su lugar, aparece ahora invariancia de gauge, que permite imponer, entre otras cosas, $\partial_\mu A^\mu = 0$, subsistiendo aún cierta libertad. El procedimiento de Gupta-Bleuler para cuantizar el sistema consiste en considerar primero el espacio de soluciones de un campo que cumpla:*

$$(I) \quad \Box A_\mu = 0\,,$$

y luego imponer la condición

$$(II) \quad \partial_\mu A^\mu = 0\,.$$

(a) *Muestre que el campo*

$$\hat{A}_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left[\hat{a}^{(\lambda)}_\mathbf{k}\epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})e^{-ikx} + \hat{a}^{(\lambda)\dagger}_\mathbf{k}\epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})^* e^{ikx}\right]$$

satisface las ecuaciones de movimiento (I), pero no las ecuaciones (II), con los cuadrivectores ϵ del apéndice asociados a un vector k nulo.

Para ver que la expansión propuesta para el campo satisface (I) nos basta con ver que e^{-ikx} (y su conjugada) la satisface, ya que el campo es una combinación lineal de estas exponenciales y es allí donde aparece la única dependencia con x. Como la ecuación (I) es la ecuación de Klein-Gordon sin masa, $e^{\pm ikx}$ con $k^0 > 0$ es solución si vale $k^2 = 0$ (o sea que k es un cuadrivector de tipo nulo).

(b) *Considerando la expresión anterior como un campo clásico (con las $a^{(\lambda)}_\mathbf{k}$ funciones complejas de $\mathbf{k}$), ¿qué relación debería haber entre $a^{(0)}$ y $a^{(3)}$ para que sea solución de (II)?*

Para responder a esta segunda pregunta es necesario entrar en un poco más detalle sobre la base de vectores ϵ ahora que el cuadrivector k es nulo. Es posible mostrar que la base ortonormal formada por estos vectores puede contener a lo sumo dos que sean ortogonales a k (y son de tipo espacial); llamamos a estos vectores $\epsilon^{(1)}$ y $\epsilon^{(2)}$. La base se puede completar con dos vectores adicionales $\epsilon^{(3)}$ espacial y $\epsilon^{(0)}$ temporal, tal que $(\epsilon^{(3)} + \epsilon^{(0)})$ sea proporcional a k. Una elección de estos vectores que verifica estas relaciones es la siguiente

$$\epsilon^{(0)} = n\,, \quad \text{donde } n \text{ es un vector temporal unitario}\,, \tag{537}$$

$$\epsilon^{(3)} = \frac{k - (k\cdot n)n}{k\cdot n}\,, \tag{538}$$

$$\epsilon(1) \ \text{ y } \ \epsilon(2) \ \text{ de tipo espacio y ortogonales con los anteriores y con } k\,. \tag{539}$$

Les proponemos que vean esto en el Ejercicio 64 de la práctica 5 (pueden seguir también la sección 6.4.2 del libro de Greiner). Si por ejemplo $\mathbf{k}$ tiene sólo componente en la dirección z, podemos tomar $(\epsilon^{(0)\mu}) = (1, \mathbf{0})$, $(\epsilon^{(1)\mu}) = (0, 1, 0, 0)$, $(\epsilon^{(2)\mu}) = (0, 1, 0, 0)$ y $(\epsilon^{(3)\mu}) = (0, 0, 0, 1)$. Volvamos entonces a la pregunta. Aplicando derivada al campo A_μ se tiene

$$\partial^\mu A_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left[-ia_\mathbf{k}^{(\lambda)} k^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{-ikx} + ia_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger} k^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})^* e^{ikx} \right] \tag{540}$$

Miremos la parte de frecuencia positiva del operador (que llamamos $\hat{A}_\mu^+$), es decir, la parte que acompaña a e^{ikx} (si hallamos la condición para esta parte, la otra parte también la satisfará). Como k es perpendicular a $\epsilon^{(1)}$ y $\epsilon^{(2)}$, sólo sobreviven en la suma los términos con $\lambda = 0\,, 3$. Así

$$\partial^\mu A_\mu^+ = -i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \left[a_\mathbf{k}^{(0)} \epsilon_\mu^{(0)}(\mathbf{k}) k^\mu + a_\mathbf{k}^{(3)} \epsilon_\mu^{(3)}(\mathbf{k}) k^\mu \right] e^{-ikx}\,. \tag{541}$$

Como la base es tal que $\epsilon^{(3)} + \epsilon^{(0)}$ es proporcional a k, podemos escribir $\epsilon^{(3)} + \epsilon^{(0)} = \alpha k$ (para cierto número α) y entonces resulta

$$(\epsilon^{(3)} + \epsilon^{(0)}) \cdot k = (\alpha k) \cdot k = 0\,, \tag{542}$$

ya que k es un cuadrivector nulo ($k^2 = 0$). Entonces

$$\epsilon^{(3)} \cdot k = -\epsilon^{(0)} \cdot k\,, \tag{543}$$

y por lo tanto

$$\partial^\mu A_\mu^+ = -i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \left[a_\mathbf{k}^{(0)} - a_\mathbf{k}^{(3)} \right] \epsilon_\mu^{(0)}(\mathbf{k}) k^\mu\, e^{-ikx}\,. \tag{544}$$

Una condición suficiente para asegurar que se cumpla $\partial^\mu A_\mu = 0$ es entonces pedir que resulte $a_\mathbf{k}^{(0)} - a_\mathbf{k}^{(3)} = 0$. Esto es una cuenta que nos sirve sólo para ganar algo de intuición, ya que en las cuentas que hicimos no trabajamos considerando que el campo es un operador. La condición $\partial^\mu A_\mu = 0$ no podrá ser válida a nivel de operadores, pero subsanaremos esto pidiendo que la condición $\partial^\mu \hat{A}_\mu^+ = 0$ valga sobre un subespacio, que llamaremos espacio físico: dicho espacio estará compuesto por los vectores $|\Psi\rangle$ que cumplan $(\hat{a}_\mathbf{k}^{(0)} - \hat{a}_\mathbf{k}^{(3)})\,|\Psi\rangle = 0$.

4.5.1. Cuantización canónica

En el ejercicio anterior vimos que la expresión cuántica para el campo que propusimos satisface la ecuación (I) pero no la ecuación (II)[9]. Vamos a llevar adelante sin embargo la propuesta de

[9] Recuerden que la condición (II) para el campo de Proca aparece derivada de las ecuaciones de movimiento, mientras que para el campo de Maxwell es una fijación parcial de gauge, es decir, algo que queremos imponer para sacarnos de encima los grados de libertad espúreos.

cuantización y veremos cómo lo solucionamos por otro lado. Proponemos entonces una expansión para el campo dada por

$$\hat{A}_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left[\hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})^* e^{ikx} \right] , \tag{545}$$

con

$$\left[\hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger} \right] = -\eta^{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') , \tag{546}$$

y todos los otros nulos. Noten que para $\lambda = 1\,,2\,,3$ estas relaciones coinciden con las del campo de Proca.

La observación que surge de resolver el siguiente ejercicio nos dará una pista de cómo podemos seguir adelante.

Ejercicio: (Práctica 5, Ejercicio 57) *La cuantización del campo de Maxwell posee el problema de que los operadores a y $a^\dagger$ no actúan en un Hilbert ya que aparecen estados con norma negativa (y por lo tanto el 'producto interno' del cual deriva dicha norma no es definido positivo, por lo que estrictamente no es un producto interno). Muestre que de las relaciones de conmutación (que siguen de las reglas de conmutación canonicas):*

$$\left[\hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger} \right] = -\eta^{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

se desprende que existen estados de norma negativa (asumiendo que los $a^{(0)}$ aniquilan el vacío).

Asumiendo que existe el estado de vacío $|0\rangle$ que es aniquilado por todos los operadores $\hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)}$, uno querría llevar adelante la construcción del espacio de Fock de la forma usual. Un estado con un fotón de momento $\mathbf{k}$ y polarización λ se obtendría entonces haciendo

$$|1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle \equiv \hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda')\dagger} |0\rangle \ . \tag{547}$$

Los estados de una partícula creada con polarización $\lambda = 0$ están asociados a lo que se conoce como *fotones escalares*, para $\lambda = 1\,,2$ se tienen los llamados *fotones transversales*, y para $\lambda = 3$ los *fotones longitudinales*. Sigamos con el ejercicio. Noten que la norma de un estado de un fotón está dada por

$$\langle 1_{\mathbf{k},\lambda} | \, 1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle = \langle 0| \, \hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)} \hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger} |0\rangle = -\eta^{\lambda\lambda} \delta^3(\mathbf{0}) , \tag{548}$$

donde en el último paso utilizamos las relaciones de conmutación dadas por la ecuación (546). Olvídense de la delta evaluada en cero que diverge, esto es un problema conocido que aparece porque no suavizamos el estado de una partícula (ya discutimos que en realidad estos estados no están en el Hilbert pero esto se puede solucionar fácilmente considerando estados suavizados

como vieron en el Ejercicio 33 en la guía 3). El problema aquí es que cuando $\lambda = 0$ (fotón escalar) el estado tiene norma negativa y por lo tanto el 'producto interno' no es un producto interno (y el Hilbert no es un espacio de Hilbert).

El problema que aparece en el ejercicio anterior lo solucionaremos la clase viene cuando veamos el método de Gupta-Bleuler. Al aplicar dicho método, veremos que los estados de fotones escalares y longitudinales no son físicos, en el sentido de que los valores de expectación de observables en estados que difieran en uno o más fotones escalares y/o longitudinales serán los mismos (y esto estará asociado a la invariancia de gauge de la teoría).

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- El campo de Proca (masa no nula, espín 1) tiene tres grados de libertad. A nivel cuántico servirá para describir a los bosones vectoriales masivos (como el W o Z).

- El campo de Maxwell (masa nula, helicidad 1) es invariante de gauge y como consecuencia de esto tiene dos grados de libertad. A nivel cuántico describe el fotón (partícula mediadora de la electrodinámica cuántica).

- Expresión del campo de Proca (sin carga) cuantizado:

$$\hat{Z}_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \sum_{\lambda=1}^{3} \left[\hat{a}^\lambda_\mathbf{k} \epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \hat{a}^{\lambda\dagger}_\mathbf{k} \epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})^* e^{ikx} \right] ,$$

donde $k^2 = m^2$, $\left[\hat{a}^{(\lambda)}_\mathbf{k}, \hat{a}^{(\lambda')\dagger}_{\mathbf{k}'}\right] = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{\lambda\lambda'}$ y todos los otros se anulan. Los vectores de polarización son ortonormales entre sí, de tipo espacio y ortogonales a k^μ, y cumplen

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \epsilon^{(\lambda)}_\mu \epsilon^{(\lambda)}_\nu = -\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} k_\mu k_\nu \, .$$

- Expresión del campo de Maxwell cuantizado:

$$\hat{A}_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left[\hat{a}^{(\lambda)}_\mathbf{k} \epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \hat{a}^{(\lambda)\dagger}_\mathbf{k} \epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})^* e^{ikx} \right] ,$$

donde $k^2 = 0$, $\left[\hat{a}^{(\lambda)}_\mathbf{k}, \hat{a}^{(\lambda')\dagger}_{\mathbf{k}'}\right] = -\eta^{\lambda\lambda'}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ y todos los otros se anulan. Los vectores de polarización son ortonormales entre sí. $\epsilon^{(0)}$ es temporal, mientras que los otros son espaciales. $\epsilon^{(1)}$ y $\epsilon^{(2)}$ son ortogonales a k, mientras que $\epsilon^{(0)} + \epsilon^{(3)}$ es proporcional a k.

4.5.2. Condición de Gupta-Bleuler

Como vimos previamente, la cuantización del campo electromagnético trae aparejados varios problemas. Por un lado tenemos estados de norma negativa debido a los fotones escalares, es decir, no tenemos un espacio de Hilbert y por otro lado ya no podemos fijar el gauge de Lorenz pues $\hat{A}^\mu$ es un operador y no vale que $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$. Sin embargo, uno podría pensar que lo único que observa en el laboratorio al final del día son valores medios (es la razón por la que el picture de Heisenberg y Schrodinger son equivalentes) con lo cual quizás baste pedir que

$$\langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\psi\rangle = 0 \tag{549}$$

y ya que no podemos hacer nada sobre $\partial_\mu \hat{A}^\mu$, podemos restringir nuestro espacio de estados a aquellos que verifiquen esta condición. Pero hay un problema porque esta condición no nos garantiza que los estados que la satisfacen formen un espacio vectorial como quisiéramos. La estrategia es entonces buscar una condición que implique esto y además dé como resultado un espacio vectorial. Para eso podemos descomponer al campo como

$$A^\mu = A^\mu_+ + A^\mu_- \tag{550}$$

siendo

$$A^\mu_+ = \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k}') a^{(\lambda)}_{\mathbf{k}'} \tag{551}$$

y $A^\mu_- = A^{\mu\dagger}_+$. Escribimos entonces

$$\begin{aligned} 0 =& \langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\psi\rangle = \langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu_+|\psi\rangle + \langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu_-|\psi\rangle && (552)\\ =& \Big(|\psi\rangle, \partial_\mu \hat{A}^\mu_+|\psi\rangle\Big) + \Big(|\psi\rangle, \partial_\mu \hat{A}^\mu_-|\psi\rangle\Big) && (553)\\ =& \Big(|\psi\rangle, \partial_\mu \hat{A}^\mu_+|\psi\rangle\Big) + \Big(|\psi\rangle, \partial_\mu \hat{A}^\mu_+|\psi\rangle\Big)^* && (554) \end{aligned}$$

basta entonces quedarnos con los estados $|\psi\rangle$ que satisfacen la condición

$$\partial_\mu \hat{A}^\mu_+|\psi\rangle = 0, \tag{555}$$

los cuales, además, es fácil ver que forman un espacio vectorial.

Ejercicio: (Práctica 5, Ejercicio 58) *El problema que mencionamos en el ejercicio anterior se resuelve parcialmente imponiendo la condición II) sobre ciertos estados (condición de estado físico), lo cual deja aún estados con norma 0. Estos últimos representan estados que son "puro gauge" (y por lo tanto, uno hace un cociente y los identifica como equivalentes al cero). La versión precisa de esta condición (Gupta-Bleuler) es:*

$$\partial_\mu \hat{A}^\mu_+ |\Psi\rangle = 0$$

siendo $\hat{A}^\mu_+$ la parte de aniquilación (frecuencia positiva) de $\hat{A}^\mu$.

(a) *Verifique la condición de Gupta-Bleuler se cumple para para estados $|\Psi\rangle$ que provengan de actuar sobre el vacío con la combinación $\hat{a}^{(3)\dagger} - \hat{a}^{(0)\dagger}$, los cuales contienen pares de modos longitudinal ($\lambda = 3$) y temporal (o escalar) ($\lambda = 0$).*

(b) *Muestre que el valor de espectación de $\hat{A}$ en $|\Psi\rangle$ y $|\Psi'\rangle \equiv (1 + \int c(k)(\hat{a}_k^{(3)\dagger} - \hat{a}_k^{(1)\dagger}))d^3k\,|\Psi\rangle$ (con $c(k)$ una función de los momentos) difieren en el gradiente de una función.*

Observación: este último ítem ilustra que $\int c(k)(\hat{a}_k^{(3)\dagger} - \hat{a}_k^{(1)\dagger})d^3k\,|\Psi\rangle$ corresponde a una estado puro gauge, que en efecto es un estado de norma cero. El espacio de Hilbert (con producto interno definido positivo) se obtiene cuando se declaran equivalentes a estados que difieren en un estado nulo.

Reemplazando la expresión explícita de A^μ_+ podemos reescribir la condición anterior como

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx} \sum_{\lambda=0}^{3} k\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) a^{(\lambda)}_{\mathbf{k}} |\psi\rangle = 0 \tag{556}$$

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx} \sum_{\lambda=0}^{3} k\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \left[a^{(3)}_{\mathbf{k}} - a^{(0)}_{\mathbf{k}}\right] |\psi\rangle = 0, \tag{557}$$

donde usamos que $k \cdot \epsilon^{(1)}(\mathbf{k}) = k \cdot \epsilon^{(2)}(\mathbf{k}) = 0$ y $k \cdot \epsilon^{(0)}(\mathbf{k}) = -k \cdot \epsilon^{(3)}(\mathbf{k})$. Entonces, usando que las exponenciales complejas son linealmente independientes, tenemos que los *estados físicos* son aquellos que satisfacen

$$L_{\mathbf{k}}|\psi\rangle = 0, \tag{558}$$

siendo

$$L_{\mathbf{k}} = a^{(3)}_{\mathbf{k}} - a^{(0)}_{\mathbf{k}}. \tag{559}$$

Antes de seguir notemos algunas propiedades de este operador que serán útiles más adelante:

$$L_{\mathbf{k}}|0\rangle = \langle 0|L^\dagger_{\mathbf{k}} = 0 \tag{560}$$

$$[L_{\mathbf{k}}, L_{\mathbf{k}'}] = 0 \tag{561}$$

$$\begin{aligned}\left[L_{\mathbf{k}}, L^\dagger_{\mathbf{k}'}\right] &= \left[a^{(3)}_{\mathbf{k}}, a^{(3)\dagger}_{\mathbf{k}'}\right] - \left[a^{(3)}_{\mathbf{k}}, a^{(0)\dagger}_{\mathbf{k}'}\right] - \left[a^{(0)}_{\mathbf{k}}, a^{(3)\dagger}_{\mathbf{k}'}\right] + \left[a^{(0)}_{\mathbf{k}}, a^{(0)\dagger}_{\mathbf{k}'}\right] \\ &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = 0\end{aligned} \tag{562}$$

$$\left[a^{(\lambda)}_{\mathbf{k}'}, L^\dagger_{\mathbf{k}}\right] = \left[a^{(\lambda)}_{\mathbf{k}'}, a^{(3)\dagger}_{\mathbf{k}}\right] - \left[a^{(\lambda)}_{\mathbf{k}'}, a^{(0)\dagger}_{\mathbf{k}}\right] = -\eta^{\lambda 3}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \eta^{\lambda 0}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{563}$$

$$\begin{aligned}\left[A^\mu, L^\dagger_{\mathbf{k}}\right] &= \left[A^\mu_+, L^\dagger_{\mathbf{k}}\right] = \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0}^{3} k'\epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k}') \left[a^{(\lambda)}_{\mathbf{k}'}, L^\dagger_{\mathbf{k}}\right] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0}^{3} k'\epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k}') \left[a^{(\lambda)}_{\mathbf{k}'}, L^\dagger_{\mathbf{k}}\right] \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx} \sum_{\lambda=0,3} \epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx} \frac{k_\mu}{k\cdot n} \end{aligned} \tag{564}$$

donde usamos que

$$\sum_{\lambda=0,3} \epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k}) = \epsilon^{(0)}_\mu(\mathbf{k}) + \epsilon^{(3)}_\mu(\mathbf{k}) = n + \frac{k_\mu - n_\mu(k\cdot n)}{k\cdot n} = \frac{k_\mu}{k\cdot n}. \tag{565}$$

Veamos ahora cómo caracterizar los estados físicos. Un estado arbitrario del espacio completo será una combinación de elementos de la forma

$$|\psi\rangle = f(a^{(0)\dagger}_{\mathbf{k}}, a^{(1)\dagger}_{\mathbf{k}}, a^{(2)\dagger}_{\mathbf{k}}, a^{(3)\dagger}_{\mathbf{k}})|0\rangle, \tag{566}$$

siendo $f_{\mathbf{k}}$ alguna función analítica en cada argumento (f podría ser función de todos los $\mathbf{k}$). Si definimos

$$T_{\mathbf{k}} = a^{(3)}_{\mathbf{k}} + a^{(0)}_{\mathbf{k}}, \tag{567}$$

podemos escribir

$$|\psi\rangle = g(T^\dagger_{\mathbf{k}}, a^{(1)\dagger}_{\mathbf{k}}, a^{(2)\dagger}_{\mathbf{k}}, L^\dagger_{\mathbf{k}})|0\rangle, \tag{568}$$

siendo $g(T^\dagger_{\mathbf{k}}, a^{(1)\dagger}_{\mathbf{k}}, a^{(2)\dagger}_{\mathbf{k}}, L^\dagger_{\mathbf{k}}) = f\left(\left(T^\dagger_{\mathbf{k}} + L^\dagger_{\mathbf{k}}\right)/2, a^{(1)\dagger}_{\mathbf{k}}, a^{(2)\dagger}_{\mathbf{k}}, \left(L^\dagger_{\mathbf{k}} - T^\dagger_{\mathbf{k}}\right)/2\right)$. Podemos escribir entonces la condición de estado físico como

$$0 = L_{\mathbf{k}}|\psi\rangle = L_{\mathbf{k}} g(T^\dagger_{\mathbf{k}}, a^{(1)\dagger}_{\mathbf{k}}, a^{(2)\dagger}_{\mathbf{k}}, L^\dagger_{\mathbf{k}})|0\rangle \tag{569}$$

$$= \left[L_{\mathbf{k}}, g(T^\dagger_{\mathbf{k}}, a^{(1)\dagger}_{\mathbf{k}}, a^{(2)\dagger}_{\mathbf{k}}, L^\dagger_{\mathbf{k}})\right]|0\rangle + g(T^\dagger_{\mathbf{k}}, a^{(1)\dagger}_{\mathbf{k}}, a^{(2)\dagger}_{\mathbf{k}}, L^\dagger_{\mathbf{k}}) L_{\mathbf{k}'}|0\rangle \tag{570}$$

$$= \frac{\partial}{\partial T^\dagger_{\mathbf{k}}} g(T^\dagger_{\mathbf{k}}, a^{(1)\dagger}_{\mathbf{k}}, a^{(2)\dagger}_{\mathbf{k}}, L^\dagger_{\mathbf{k}}) \left[L_{\mathbf{k}}, T^\dagger_{\mathbf{k}}\right]|0\rangle = 2\frac{\partial}{\partial T^\dagger_{\mathbf{k}}} g(T^\dagger_{\mathbf{k}'}, a^{(1)\dagger}_{\mathbf{k}'}, a^{(2)\dagger}_{\mathbf{k}'}, L^\dagger_{\mathbf{k}})|0\rangle \tag{571}$$

donde usamos que

$$\left[L_{\mathbf{k}}, T^\dagger_{\mathbf{k}}\right] = \left[a^{(3)}_{\mathbf{k}} - a^{(0)}_{\mathbf{k}'}, a^{(3)\dagger}_{\mathbf{k}} + a^{(0)\dagger}_{\mathbf{k}}\right] \tag{572}$$

$$= \left[a^{(3)}_{\mathbf{k}}, a^{(3)\dagger}_{\mathbf{k}}\right] + \left[a^{(3)}_{\mathbf{k}}, a^{(0)\dagger}_{\mathbf{k}}\right] + \left[-a^{(0)}_{\mathbf{k}}, a^{(3)\dagger}_{\mathbf{k}}\right] + \left[-a^{(0)}_{\mathbf{k}}, a^{(0)\dagger}_{\mathbf{k}}\right] \tag{573}$$

$$= 1 + 0 + 0 + 1 = 2. \tag{574}$$

La condición anterior implica que

$$\frac{\partial}{\partial T^\dagger_{\mathbf{k}}} g_{\mathbf{k}}(T^\dagger_{\mathbf{k}}, a^{(1)\dagger}_{\mathbf{k}}, a^{(2)\dagger}_{\mathbf{k}}, L^\dagger_{\mathbf{k}}) = 0, \tag{575}$$

es decir, que los estados físicos se forman actuando sobre el vacío solo con los operadores $a^{(1)\dagger}_{\mathbf{k}}, a^{(2)\dagger}_{\mathbf{k}}, L^\dagger_{\mathbf{k}}$. Así el estado físico más general debe ser de la forma

$$|\psi\rangle = R_F|\psi_T\rangle, \tag{576}$$

siendo $|\psi_T\rangle = f\left(a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}\right)$ un estado de fotones transversales y

$$R_F = 1 + \int d^3\mathbf{k} c(\mathbf{k}) L_{\mathbf{k}}^\dagger + \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' c(\mathbf{k},\mathbf{k}') L_{\mathbf{k}}^\dagger L_{\mathbf{k}'}^\dagger + ... \tag{577}$$

Notemos que esto resuelve el primer ítem del ejercicio pues $L_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle$ es en particular un estado físico y por la cuenta anterior verifica que

$$\partial_\mu A_+^\mu \left(L_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle\right) = 0. \tag{578}$$

Que llamemos a estos estados físicos debería incomodarlos bastante dado que contienen fotones escalares y longitudinales que no se han visto nunca. Sin embargo, podemos ver que estos fotones no generan ningún efecto observable. Para ello consideremos un estado físico $|\Psi\rangle$ de la forma

$$|\Psi\rangle = |\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c(\mathbf{k}) L_{\mathbf{k}}^\dagger |\Psi_T\rangle, \tag{579}$$

y calculemos

$$\begin{aligned}\langle\Psi|A^\mu|\Psi\rangle =& \langle\Psi_T|A^\mu|\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c^*(\mathbf{k}) \langle\Psi_T|L_{\mathbf{k}} A^\mu|\Psi_T\rangle \\ &+ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c(\mathbf{k}) \langle\Psi_T|A^\mu L_{\mathbf{k}}^\dagger|\Psi_T\rangle + \int\int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{c^*(\mathbf{k})c(\mathbf{k}')}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \langle\Psi_T|L_{\mathbf{k}} A^\mu L_{\mathbf{k}'}^\dagger|\Psi_T\rangle.\end{aligned} \tag{580}$$

Ahora podemos usar que

$$L_{\mathbf{k}}|\Psi_T\rangle = \langle\Psi_T|L_{\mathbf{k}}^\dagger = 0 \tag{581}$$

para escribir

$$\begin{aligned}\langle\Psi|A^\mu|\Psi\rangle =& \langle\Psi_T|A^\mu|\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c^*(\mathbf{k}) \langle\Psi_T| \left[L_{\mathbf{k}}, A^\mu\right] |\Psi_T\rangle \\ &+ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c(\mathbf{k}) \langle\Psi_T| \left[A^\mu, L_{\mathbf{k}}^\dagger\right] |\Psi_T\rangle + \int\int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{c^/(\mathbf{k})c(\mathbf{k}')}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \langle\Psi_T|L_{\mathbf{k}} \left[A^\mu, L_{\mathbf{k}'}^\dagger\right] |\Psi_T\rangle.\end{aligned} \tag{582}$$

El último término de esta expresión se anula porque como $\left[A^\mu, L_{\mathbf{k}'}^\dagger\right] \in \mathbb{C}$ conmuta con $L_{\mathbf{k}}$ y tenemos

$$\begin{aligned}=& \langle\Psi_T|A^\mu|\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c(\mathbf{k}) \langle\Psi_T| \left[A^\mu, L_{\mathbf{k}}^\dagger\right]^\dagger |\Psi_T\rangle \\ &- \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c(\mathbf{k}) \langle\Psi_T| \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{ikx} \frac{k_\mu}{k\cdot n} |\Psi_T\rangle\end{aligned} \tag{583}$$

$$\begin{aligned}=& \langle\Psi_T|A^\mu|\Psi_T\rangle - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c^*(\mathbf{k}) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx} \frac{k_\mu}{k\cdot n} \\ &- \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c(\mathbf{k}) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{ikx} \frac{k_\mu}{k\cdot n}\end{aligned} \tag{584}$$

$$
\begin{aligned}
&=\langle\Psi_T|A^\mu|\Psi_T\rangle - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\frac{k_\mu}{k\cdot n}\left[c^*(\mathbf{k})e^{-ikx}+c(\mathbf{k})e^{ikx}\right]\\
&=\langle\Psi_T|A^\mu|\Psi_T\rangle + \partial_\mu\Lambda
\end{aligned}
\tag{585}
$$

siendo

$$
\Lambda = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\frac{i}{k\cdot n}\left[c(\mathbf{k})e^{ikx}-c^*(\mathbf{k})e^{-ikx}\right]. \tag{586}
$$

Esto no solo resuelve el ejercicio sino que además prueba que solo los fotones transversales tienen un efecto observable, dado que los escalares y longitudinales solo generan una transformación de gauge sobre el valor medio del campo (el resultado es el mismo si hubiesemos considerado los estado físicos más generales $|\psi_F\rangle = R_F|\psi_T\rangle$).

Nos queda todavía el problema de los estados de norma negativa que mencionamos al comienzo. Para ello podemos notar que hasta la ecuación (582) no usamos ninguna propiedad sobre A^μ, es decir, que puede ser cualquier operador. En particular, tomando $A^\mu = \mathrm{Id}$ esa ecuación nos dice que

$$
\begin{aligned}
\langle\Psi|\Psi\rangle =&\langle\Psi_T|\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}c^*(\mathbf{k})\langle\Psi_T|\left[L_\mathbf{k},\mathrm{Id}\right]|\Psi_T\rangle\\
&+\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}c(\mathbf{k})\langle\Psi_T|\left[\mathrm{Id},L^\dagger_\mathbf{k}\right]|\Psi_T\rangle + \int\int \frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\frac{c^{/}(\mathbf{k})c(\mathbf{k}')}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\langle\Psi_T|L_\mathbf{k}\left[\mathrm{Id},L^\dagger_{\mathbf{k}'}\right]|\Psi_T\rangle
\end{aligned}
\tag{587}
$$

y como todo operador conmuta con la identidad tenemos

$$
\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\Psi_T|\Psi_T\rangle, \tag{588}
$$

es decir que la norma de los estados físicos es simplemente la norma de los estados de fotones transversales la cual sí es definida positiva.

4.5.3. Función de dos puntos y propagador

Ejercicio: (Práctica 5, Ejercicio 59) *Hallar la función de dos puntos y el propagador del campo de Maxwell en el gauge de Lorentz (notar que la cuenta es muy similar a la del campo escalar complejo).*

$$\begin{aligned}
\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle =& \langle 0| \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \sum_{\lambda,\lambda'=0}^{3} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda')}(\mathbf{k}')[a_\mathbf{k}^{(\lambda)}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')}e^{-i(kx+ky)} \\
&+ a_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')}e^{i(kx-k'y)} + a_\mathbf{k}^{(\lambda)}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}e^{-i(kx-k'y)} + a_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}e^{i(kx+k'y)}]|0\rangle \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \sum_{\lambda,\lambda'=0}^{3} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda')}(\mathbf{k}')\langle 0|a_\mathbf{k}^{(\lambda)}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}|0\rangle e^{-i(kx-k'y)} \\
&= -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \sum_{\lambda,\lambda'=0}^{3} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda')}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\eta_{\lambda\lambda'}e^{-i(kx-k'y)} \\
&= -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda)}(\mathbf{k}')\eta_{\lambda\lambda}e^{-ik(x-y)} \qquad (589)
\end{aligned}$$

y usando la relación de completitud de los vectores de polarización

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda)}(\mathbf{k}')\eta_{\lambda\lambda} = \eta_{\mu\nu}, \qquad (590)$$

obtenemos

$$\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}\eta_{\mu\nu}e^{-ik(x-y)}. \qquad (591)$$

El propagor de Feynman resulta entonces inmediato

$$\begin{aligned}
\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle &= \langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle\theta(x_0-y_0) + \langle 0|A_\nu(y)A_\mu(x)|0\rangle\theta(y_0-x_0) \qquad (592)\\
&= -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}\eta_{\mu\nu}[e^{-ik(x-y)}\theta(x_0-y_0) + e^{ik(x-y)}\theta(y_0-x_0)] \qquad (593)\\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(-\eta_{\mu\nu})}{k^2+i\epsilon}e^{-ik(x-y)}. \qquad (594)
\end{aligned}$$

También podemos usar el resultado de la función de dos puntos para calcular el conmutador

$$\begin{aligned}
\langle 0|\,[A_\mu(x), A_\nu(y)]\,|0\rangle &= -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}\eta_{\mu\nu}e^{-ik(x-y)} - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}\eta_{\nu\mu}e^{ik(x-y)} \qquad (595)\\
&= -\eta_{\mu\nu}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}\left[e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}\right] \qquad (596)\\
&= -\eta_{\mu\nu}i\Delta(x-y) \qquad (597)
\end{aligned}$$

Ejercicio: (Práctica 5, Ejercicio 62) *Comprobar la validez de la microcausalidad para los campos eléctrico y magnético.*

Aprovechando que conocemos el conmutador para el campo A_μ podemos escribir el conmutador entre los campos eléctricos como

$$
\begin{aligned}
[E_i(x), E_j(y)] &= [\partial_i A_0(x) - \partial_0 A_i(x), \partial_j A_0(y) - \partial_0 A_j(y)] && (598)\\
&= \partial_0^x \partial_0^y \left[A_i(x), A_j(y)\right] + \partial_i^x \partial_j^y \left[A_0(x), A_0(y)\right] && (599)\\
&= -\partial_0^x \partial_0^y \eta_{\mu\nu} i\Delta(x-y) - \partial_i^x \partial_j^y \eta_{\mu\nu} i\Delta(x-y) && (600)\\
&= \left[\partial_0^x \partial_0^y \eta_{\mu\nu} + \partial_i^x \partial_j^y \eta_{\mu\nu}\right] \left[-i\Delta(x-y)\right] && (601)
\end{aligned}
$$

De la misma forma

$$
\begin{aligned}
\left[B^i(x), B^j(y)\right] &= \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn} \left[\partial_k A_l(x), \partial_m A_n(y)\right] && (602)\\
&= \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn} \partial_k^x \partial_m^y \left[A_l(x), A_n(y)\right] && (603)\\
&= \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn} \partial_k^x \partial_m^y \left[-\eta_{\mu\nu} i\Delta(x-y)\right] && (604)\\
&= i\left[\delta^{ij}\delta^{km} - \delta^{im}\delta^{jk}\right] \partial_k^x \partial_m^y \Delta(x-y) && (605)\\
&= -i\left(\delta^{ij}\nabla^2 - \partial^i\partial^j\right) \Delta(x-y) && (606)
\end{aligned}
$$

Finalmente podemos calcular también el conmutador cruzado

$$
\begin{aligned}
\left[E^i(x), B^j(y)\right] &= \left[\partial^i A^0(x) - \partial^0 A^i(x), \epsilon^{jkl}\partial_k A_l(y)\right] && (607)\\
&= \epsilon^{jkl}\left(-\partial_0^x \partial_k^y\right) \left[-i\eta_l^i \Delta(x-y)\right] && (608)\\
&= i\epsilon^{ijk}\partial_0 \partial_k \Delta(x-y) && (609)
\end{aligned}
$$

Como vemos en todos los casos los conmutadores de los campos (que son observables de la teoría) se anulan para puntos separados espacialmente ya que $\Delta(x-y)$ es idénticamente nula para $x-y$ fuera del cono de luz.

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- La condición de Gupta-Bleuler

$$\partial_\mu \hat{A}_+^\mu \left|\Psi\right\rangle = 0$$

determina los estados físicos de la teoría. Esta condición implica el gauge de Lorenz en valor medio $\langle \partial_\mu \hat{A}^\mu \rangle = 0$ y elimina los estados de norma negativa.

- El propagor de Feynman para el campo electromagnético es

$$\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-\eta_{\mu\nu})}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}.$$

- Se verifica la condición de microcausalidad para los campos eléctrico y magnético.

5. Teorías interactuantes

En las semanas previas estuvimos estudiando la cuantización de algunos modelos de teorías de campos libres (es decir, teorías cuyo Lagrangiano era una suma de términos bilineales en los campos). Dichos Lagrangianos tenían *términos cinéticos*, como

$$\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi\,, \quad \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi\,, \quad -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\left[\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right)\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\right]\,, \tag{610}$$

y *términos de masa*, tales como,

$$-\frac{1}{2}m^2\phi^2\,, \quad -m\bar{\psi}\psi\,, \quad \frac{1}{2}m^2 Z_\mu Z^\mu\,. \tag{611}$$

Tanto los términos cinéticos como los de masa son bilineales en los campos. **Una teoría es interactuante si en el Lagrangiano aparecen términos con tres o más campos**. La teoría interactuante que más nos concierne en esta materia es la electrodinámica cuántica (QED, por sus siglas en inglés), cuyo Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi\,, \tag{612}$$

donde $D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$ es la llamada *derivada covariante*. El término de interacción en esta teoría está dado por $i\bar{\psi}\gamma^\mu ieA_\mu\psi = -e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ y describe un acoplamiento de los fermiones con el campo del fotón.

También estudiaremos otras teorías interactuantes relevantes, como por ejemplo la teoría "$\lambda\phi^4$"

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\,, \tag{613}$$

o la electrodinámica escalar (una teoría similar a la electrodinámica en la cual el papel de los fermiones lo juega ahora un campo escalar cargado ϕ)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D^\mu\phi^\dagger D_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi\,. \tag{614}$$

Veamos un ejemplo de una serie de teorías clásicas interactuantes sencillas, que nos va a servir además para introducir algunos conceptos.

Ejercicio: (Práctica 6, Ejercicio 65) *Considere el caso simple e ilustrativo del Lagrangiano que resulta de agregar un término* $-\frac{\lambda_n}{n!}\phi^n$ *(con* $\lambda_n > 0$ *y* $n \geq 3$*) al Lagrangiano de Klein-Gordon para un campo real.*

(a) *Halle la ecuación de movimiento para este tipo de teorías y vea que ahora una onda plana no es solución.*

El Lagrangiano de la teoría es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda_n}{n!}\phi^n\,. \tag{615}$$

La ecuación de movimiento va a diferir de la de Klein-Gordon por la contribución del término $-\frac{\lambda_n}{n!}\phi^n$, que da

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -\frac{\lambda_n}{(n-1)!}\phi^{n-1}\,, \tag{616}$$

con lo que se tiene

$$\left(\Box + m^2\right)\phi + \frac{\lambda_n}{(n-1)!}\phi^{n-1} = 0\,. \tag{617}$$

La ecuación con $\lambda_n = 0$ tiene solución a las ondas planas e^{ipx} con $p^2 = m^2$. Si en cambio, $\lambda_n \neq 0$, tomando $\phi(x) = A\,e^{ipx}$ (con A constante) vemos que

$$\left(\Box + m^2\right)\phi + \frac{\lambda_n}{(n-1)!}\phi^{n-1} = \left(-p^2 + m^2\right)A\,e^{ipx} + \frac{\lambda_n}{(n-1)!}A^{n-1}\,e^{i(n-1)px} \neq 0\,, \tag{618}$$

ya que como $n \geq 3$ las dos exponenciales tienen potencias diferentes y por lo tanto los coeficientes que acompañan a cada una de ellas deberían anularse, lo que implicaría tener una solución trivial ($A = 0$). Las ondas planas, como era de esperar, ya no son solución de esta teoría interactuante.

(b) *¿Para qué valor de n la constante de acoplamiento es adimensional?*

Para poder decir que un parámetro es pequeño necesitamos que el mismo no tenga unidades. Nosotros estamos trabajando con unidades para las cuales $\hbar = c = 1$ (no tienen unidades). La acción o el momento angular, ambos con las mismas unidades que $\hbar$ no tienen entonces unidades. La velocidad (que tiene las unidades de c) tampoco tiene unidades. Las cantidades que no tienen unidades se dicen *adimensionales*. El momento, por ejemplo, no es adimensional, ya que tiene unidades de energía/velocidad, y como la velocidad es adimensional, el momento tiene unidades de energía. La posición en cambio, tiene unidades de 1/energía. La dimensión de una determinada cantidad se define como la potencia de unidades de energía de dicha cantidad y se nota con [ ]. Por ejemplo

$$\text{Acción: } [S] = 0\,, \tag{619}$$

$$\text{Distancia: } [x] = -1\,, \tag{620}$$

$$\text{Momento: } [p] = 1\,. \tag{621}$$

Veamos qué unidades tienen las constantes de acoplamiento. Para ello, recordemos que

$$S = \int d^4x\mathcal{L}\,. \tag{622}$$

Como $[S] = 0$ y $[d^4x] = -4$, resulta $[\mathcal{L}] = 4$. Ahora que tenemos la dimensión del Lagrangiano, podemos sacar la dimensión del campo ϕ. Para ello, noten que la derivada tiene

unidades de 1/distancia, por lo que $[\partial_\mu] = 1$. Mirando entonces el término cinético de (615), podemos sacar la dimensión de ϕ que tiene que cumplir

$$2[\phi] + 2[\partial_\mu] = 4 \implies [\phi] = 1\,. \tag{623}$$

Mirando ahora el término de interacción, la dimensión de la constante de acoplamiento λ_n es tal que

$$[\lambda_n] + n[\phi] = 4 \implies [\lambda_n] = 4 - n\,. \tag{624}$$

Entonces, sólo para $n = 4$ tenemos una teoría cuya constante de acoplamiento es adimensional (la teoría $\lambda\phi^4$ en $3+1$ dimensiones).

Los términos de interacción con constantes de acoplamiento adimensionales se conocen como *marginales*, los que tienen dimensión positiva como *relevantes* y los de dimensión negativa como *irrelevantes*. Las teorías interactuantes con acoplamientos irrelevantes serán siempre no renormalizables (el concepto de renormalización lo verán al finalizar el curso en las clases teóricas).

5.1. Algunas propiedades generales de las teorías de campos

En el curso nos dedicaremos a estudiar efectos perturbativos de las teorías interactuantes, pero en lo que resta de la clase de hoy veremos algunos aspectos no perturbativos que uno espera que aparezcan en modelos muy generales de campos cuánticos relativistas.

5.1.1. Axiomas de Wightman

En los modelos de teorías cuánticas de campos libres que estudiamos hasta el momento hay algunas características comunes que emergen en todos ellos. Por ejemplo, que dos observables locales de la teoría conmutan si la separación entre ellos es espacial o que el espectro del operador $(\hat{P}^\mu)$ está en el cono de luz futuro. Los axiomas de Wightman, un conjunto de requerimientos que uno utiliza para definir qué es una teoría cuántica de campos relativista en espacio plano, toman parte de estos elementos comunes que uno observa que estos modelos comparten, e incorporan además ciertos enunciados más técnicos cuyo propósito es darle rigurosidad a la teoría.

Una versión simplificada de los axiomas de Wightman es la siguiente:

(a) **Axioma I (espacio de estados)**: El espacio físico de estados de la teoría es un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ sobre el cual actúa una representación del (cubrimiento) del grupo de Poincaré $\hat{U}(\Lambda, a)$

(b) **Axioma II (condición espectral)**: El espectro de $(\hat{P}^\mu)$ está en el cono de luz futuro.

(c) **Axioma III (existencia y unicidad del vacío)**: Existe un único estado $|0\rangle$ en $\mathcal{H}$ invariante ante $\hat{U}(\mathbb{1}, a)$.

(d) **Axioma IV (definición de los campos)**: Para cada función de prueba f en el espacio de Schwartz[10] existe un conjunto de distribuciones que toman valores en operadores $\{\hat{\phi}_l(f)\}$, que llamamos campos, que están definidos sobre un subconjunto denso $D \in \mathcal{H}$ que contiene a $|0\rangle$.

(e) **Axioma V (transformación de los campos)**: Ante la acción del grupo de Poincaré, los campos transforman con una representación del grupo de Lorentz (espín entero) o del grupo $SL(2, \mathbb{C})$ (espín semientero).

(f) **Axioma VI (microcausalidad)**: dos campos cuyos soportes están espacialmente separados conmutan (espín entero) o anticonmutan (espín semientero).

(g) **Axioma VII (ciclicidad del vacío)**: el subconjunto generado por $\hat{\phi}_{l_1}(f_1)\hat{\phi}_{l_2}(f_2)...\hat{\phi}_{l_j}(f_j)\,|0\rangle$ (j=1, 2, ...) es denso en $\mathcal{H}$.

Los axiomas I, II y III los vimos aparecer cuando estudiamos las teorías libres. La propiedad expresada por el axioma II, si piensan por ejemplo en el campo escalar real, los autovalores de $\hat{P}^\mu$ son p^μ, que cumplen $p^2 = m^2 \geq 0$ (esto indica que p^μ es un vector temporal, o sea que está en el cono de luz) y como la energía total de todo estado es positiva resultaba $p^0 > 0$ (por lo que el cuadrivector p^μ está en el cono de luz futuro). Los axiomas IV y V definen los campos, que en esta versión rigurosa son distribuciones. Algo de las propiedades de la transformación de las que habla el axioma V las vimos, por ejemplo, el campo escalar transforma ante la representación trivial del grupo de Lorentz. El axioma VI permite asegurar que dos observables locales conmuten cuando la separación es espacial. Esto se puede conectar también con cosas que ya estudiamos. Para la teoría del campo escalar real libre (espín entero) la microcausalidad se impone diciendo que el conmutador de los campos es nulo para separación espacial. Esto debería asegurar que dos observables separados espacialmente conmutan. Un ejemplo de observable es el mismo campo (ya que es hermítico), por lo tanto el axioma VI garantiza la causalidad para dicho observable (y lo hará para todo observable). Para el campo de Dirac libre en cambio, impusimos relaciones de anticonmutación para los campos cuando la separación era espacial, lo que está de acuerdo con el axioma VI ya que dicho campo tiene espín 1/2. Como el campo de Dirac no es en sí mismo un observable esto no genera un conflicto. Los observables de dicha teoría están dados por bilineales de los campos, y la condición de microcausalidad permite asegurar que dichos observables *conmuten* gracias a que los campos *anticonmutan*.

Por último el axioma VII es bastante técnico y sirve para probar la irreducibilidad de los campos.

La rama de la física teórica que se ocupa de encontrar modelos que cumplan los axiomas de Wightman se conoce como "Constructive quantum field theory". Verificar que un modelo dado

[10] El espacio de Schwartz es un espacio de funciones tales que todas sus derivadas decaen en infinito más rápido que la inversa de cualquier potencia.

cumple dichos axiomas no es en general una tarea sencilla. Se sabe por ejemplo que las teorías libres verifican los axiomas, y hay contados ejemplos de modelos interactuantes. Uno de los problemas del milenio del instituto Clay requiere en parte demostrar que el modelo de Yang-Mills (una teoría de campos de gauge no abeliana que sirve para entender el modelo estándar) se encuadra dentro de un esquema axiomático como el de Wightman.

Más allá del rigor matemático, queremos que piensen en el esquema axiomático de Wightman como una guía que destila las características generales que comúnmente aparecen en todos los modelos de campos cuánticos relativistas. Y sepan también que parte de la importancia y el éxito que tiene dicho esquema radica en que, asumiendo dichos axiomas, se pueden probar algunos teoremas fundamentales, como el teorema de espín-estadística o el teorema CPT (el primero ya lo mencionamos y el segundo aparecerá pronto).

5.1.2. Representación de Källen-Lehmann

Los valores de expectación de los campos de Wightman en el vacío se conocen como funciones de Wightman y cumplen un rol importante en el esquema axiomático ya que el conocimiento de todas ellas permite reconstruir la teoría (teorema de reconstrucción de Wightman). Las funciones de Wightman se corresponden con lo que en nuestra presentación llamamos simplemente funciones de n puntos. Para las teorías libres estudiamos en particular la función de dos puntos. Para las teorías interactuantes el cálculo de las funciones de n puntos es más complicado, aunque existe una representación integral de la función de dos puntos que nos permite extraer algunas de sus propiedades. Esa es la denominada representación de Källen-Lehmann.

Ejercicio: (Práctica 6, Ejercicio 66) *Para una teoría interactuante, la función de dos puntos ya no tiene la forma hallada para el caso del campo libre. Sin embargo, bajo ciertas hipótesis sobre el espectro de la teoría cuántica, puede verse que tendra la siguiente representación espectral*

$$W(x-y) \equiv \langle 0| \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) |0\rangle = \int_0^\infty \rho(s) W_{F,\sqrt{s}}(x-y) ds$$

siendo $W_{F,\sqrt{s}}(x-y)$ la función de dos puntos del campo libre de masa $\sqrt{s}$, y ρ una función de s con ciertas propiedades generales. Demostrar esta relación enfocándose en el caso de una teoría interactuante de campos (arbitraria) del campo escalar real.

Definimos

$$W(x-y) \equiv \langle 0| \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) |0\rangle \ , \tag{625}$$

la función de dos puntos para la teoría interactuante. Ahora no conocemos una expansión para los campos, no es válida la expansión que hicimos en términos de operadores de creación y

destrucción cuando el campo era libre. Diferenciamos esta función para la teoría interactuante respecto de la función de dos puntos para la teoría del campo escalar real libre, que denotamos como

$$W_{F,m}(x-y) \equiv \langle 0| \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) |0\rangle \ , \tag{626}$$

donde el subíndice F nos recuerda que el valor de expectación de la derecha está calculado para la teoría libre (por *free*) y el índice m indica que la masa del campo libre es m. Ya vieron en prácticas anteriores una representación integral de dicha función

$$\begin{aligned} W_{F,m}(x-y) &= \langle 0| \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) |0\rangle = & (627)\\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} = & (628)\\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)\theta(p^0)\delta(p^2-m^2)e^{-ip(x-y)} \ . & (629) \end{aligned}$$

Veamos qué podemos decir sobre la función de dos puntos de la teoría interactuante. Consideremos la base $\{|\alpha\rangle\}$ de estados de distintos números de partículas con momento definido: $|\mathbf{p}\rangle$, $|\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}\rangle$, etc. Digamos que

$$\hat{P}^\mu |\alpha\rangle = p^{(\alpha)\mu} |\alpha\rangle \ . \tag{630}$$

¿En qué sentido se entiende la ecuación anterior cuando tenemos estados de más de una partícula con momento definido? En dicho caso, $p^{(\alpha)\mu} = p_1^{(\alpha)\mu} + p_2^{(\alpha)\mu} + ...$, donde $p_j^{(\alpha)\mu}$ es el momento lineal de la partícula j; o sea que $p^{(\alpha)\mu}$ es el momento lineal total del estado. Como cada uno de los $p_j^{(\alpha)\mu}$ cumple el axioma II, se tiene $p^{(\alpha)\mu}p_\mu^{(\alpha)} > 0$ (cuadrimomento total dentro del cono de luz) y $p^{(\alpha)0} > 0$ (energía positiva, por lo que el cuadrimento total está en el cono de luz futuro). Vamos a trabajar la expresión insertando $\mathbb{1} = \sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|$ en la expresión de la función de dos puntos para la teoría interactuante y recordando que $\hat{\phi}(x) = e^{i\hat{P}x}\hat{\phi}(0)e^{-i\hat{P}x}$ (esto lo da ecuación (339) tomando $x = 0$ y $a = x$). Tenemos

$$\begin{aligned} W(x-y) &= \langle 0| \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) |0\rangle = & (631)\\ &= \langle 0| \hat{\phi}(x) \left(\sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|\right) \hat{\phi}(y) |0\rangle = & (632)\\ &= \langle 0| \phi(x) \left(\sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|\right) \phi(y) |0\rangle = & (633)\\ &= \langle 0| e^{i\hat{P}x}\hat{\phi}(0)e^{-i\hat{P}x} \left(\sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|\right) e^{i\hat{P}y}\hat{\phi}(0)e^{-i\hat{P}y} |0\rangle \ . & (634) \end{aligned}$$

Por un lado, tenemos

$$e^{-i\hat{P}x} |0\rangle = |0\rangle \ , \tag{635}$$

ya que asumimos que el vacío es invariante ante traslaciones (axioma III). Además, por la ecuación (630), se tiene

$$e^{-i\hat{P}x} |\alpha\rangle = e^{-ip^{(\alpha)}x} |\alpha\rangle \ . \tag{636}$$

Luego, retomando la ecuación (634) tenemos

$$\begin{aligned} W(x-y) &= \sum_\alpha \langle 0| e^{i\hat{P}x}\hat{\phi}(0)e^{-i\hat{P}x}|\alpha\rangle \langle\alpha| e^{i\hat{P}y}\hat{\phi}(0)e^{-i\hat{P}y}|0\rangle = && (637)\\ &= \sum_\alpha e^{-ip^{(\alpha)}(x-y)} \langle 0|\hat{\phi}(0)|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{\phi}(0)|0\rangle = && (638)\\ &= \sum_\alpha e^{-ip^{(\alpha)}(x-y)} \left|\langle\alpha|\hat{\phi}(0)|0\rangle\right|^2 = && (639)\\ &= \int d^4p\, e^{-ip(x-y)} \sum_\alpha \delta^4(p-p^{(\alpha)}) \left|\langle\alpha|\hat{\phi}(0)|0\rangle\right|^2 . && (640) \end{aligned}$$

Introducimos la función $\rho(p^2)$ definida por la siguiente relación[11]

$$\theta(p^0)\rho(p^2) \equiv (2\pi)^3 \sum_\alpha \delta^4(p-p^{(\alpha)}) \left|\langle\alpha|\hat{\phi}(0)|0\rangle\right|^2 . \tag{641}$$

Noten que como $p^{(\alpha)0}$ es positivo, $\delta^4(p-p^{(\alpha)})$ se anula a menos que sea p^0 positivo (por eso en el lado izquierdo de la ecuación anterior hay una $\theta(p^0)$). En términos de esta función $\rho(p^2)$, se tiene

$$\begin{aligned} W(x-y) &= \int d^4p\, e^{-ip(x-y)} \sum_\alpha \delta^4(p-p^{(\alpha)}) \left|\langle\alpha|\hat{\phi}(0)|0\rangle\right|^2 = && (642)\\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3}\, \theta(p^0)\rho(p^2)\, e^{-ip(x-y)} . && (643) \end{aligned}$$

Parte del término derecho de esta última ecuación tiene una forma similar a la función de dos puntos para la teoría libre dada por la ecuación (629), pero necesitamos que aparezca una delta de Dirac. Para eso, podemos escribir en forma inocua que

$$\rho(p^2) = \int_0^{+\infty} ds\, \rho(s)\delta(p^2-s) , \tag{644}$$

con lo que llegamos finalmente a que

$$\begin{aligned} W(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3}\, \theta(p^0)\rho(p^2)\, e^{-ip(x-y)} = && (645)\\ &= \int_0^{+\infty} ds\, \rho(s) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3}\, \theta(p^0)\delta(p^2-s)e^{-ip(x-y)} = && (646)\\ &= \int_0^{+\infty} ds\, \rho(s) W_{F,\sqrt{s}}(x-y) . && (647) \end{aligned}$$

Esta última ecuación nos dice que la función de dos puntos de la teoría interactuante se escribe "sumando" las funciones de dos puntos del campo libre con masa $\sqrt{s}$, pesadas con cierta densidad espectral $\rho(s)$. Este tipo de relación se conoce como representación de Källen-Lehmann (puede derivarse también una representación análoga para el propagador).

Para entender un poco mejor la función de dos puntos de la teoría interactuante, es necesario conocer propiedades de la densidad espectral $\rho(s)$ (no las vamos a demostrar, pero si quieren mirar la derivación puede leer la sección 9.3 del libro de Greiner). Se tiene

[11] Es posible probar que efectivamente el lado derecho de la siguiente ecuación depende sólo del invariante p^2.

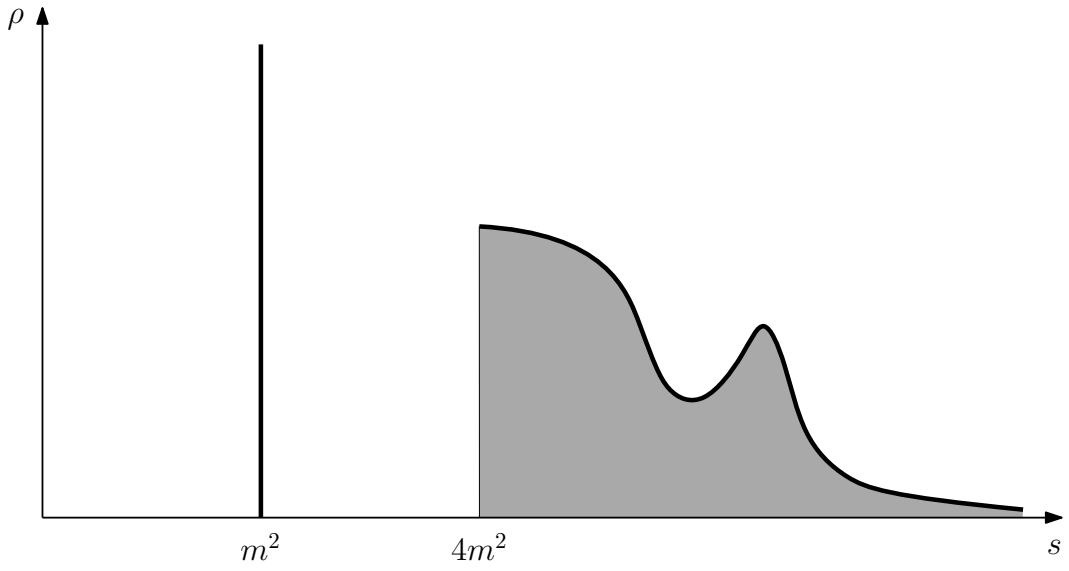


Fig. 4: **Función espectral.** El pico en el valor $\sqrt{s} = m$ está asociado a que la teoría interactuante tiene estados de una partícula de masa m. Luego hay un gap hasta $\sqrt{s} = 2m$ donde comienza un espectro continuo.

(a) $\int_0^{+\infty} ds\rho(s) = 1$.

Como además es no negativa, esto nos permite interpretar a ρ como una densidad de probabilidad. ¿De qué? Si miran la ecuación (641), van a ver que en la definición de ρ aparece un término de la forma $\left|\langle\alpha|\,\hat{\phi}(0)\,|0\rangle\right|^2$. Si para un determinado estado de la teoría libre $|\alpha\rangle$ resulta $\left|\langle\alpha|\,\hat{\phi}(0)\,|0\rangle\right| \neq 0$, esto nos indica que el estado $\hat{\phi}(0)\,|0\rangle$ de la teoría interactuante tiene un término proporcional a $|\alpha\rangle$ en su descomposición.

(b) El estado de una partícula $|\alpha\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ es el que contribuye a ρ con el valor más pequeño de $s = p^2 = m^2$. Por más que el valor del momento $\mathbf{p}$ sea distinto para $|\alpha\rangle = |\mathbf{p}\rangle$, dicho estado contribuye siempre a través de su invariante $p^2 = m^2$ (ya que como mencionamos, por la misma definición de ρ se puede probar que depende de p^2). Luego, hay un *gap* hasta llegar al valor $\sqrt{s} = 2m$ asociado al estado de dos partículas, y a partir de ese valor es en general una función continua. ¿Por qué sucede esto? Bueno, recuerden que la función espectral depende de p^2, donde p representa el momento total del estado. Cuando tenemos por ejemplo un estado de dos partículas con momentos p_1 y p_2, el invariante queda

$$p^2 = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1^\mu p_{2\mu} = m^2 + m^2 + 2p_1^\mu p_{2\mu} = 2m^2 + 2p_1^\mu p_{2\mu}\,, \tag{648}$$

donde usamos que cada partícula tiene $p_j^2 = m^2$. Noten que como p_1 y p_2 están en el cono de luz futuro, resulta $p_1^\mu p_{2\mu} \geq 0$, por lo que

$$p^2 \geq 2m^2\,. \tag{649}$$

Vemos entonces que el estado de dos partículas va a contribuir sólo para valores de la función espectral que estén en el dominio $p^2 \geq 2m^2$ y contribuye como un continuo ya que $2p_1^\mu p_{2\mu}$

puede tomar un continuo de valores positivos. Luego habrá contribuciones de estados de más partículas, para valores más grandes del dominio de la función espectral.

La densidad espectral tiene en general entonces una forma como la dada en la Figura 4. Noten el pico para $\sqrt{s} = m$, que corresponde a la contribución del estado de una partícula libre a $\hat{\phi}(x)\,|0\rangle$. Luego, aparece el mencionado continuo a partir de $\sqrt{s} = 2m$. A diferencia de lo que sucede en la teoría libre, para la teoría interactuante, la acción del campo sobre el vacío puede crear estados con más de una partícula.

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- Una teoría es interactuante si el Lagrangiano tiene términos con tres o más campos.
- A la potencia en unidades de energía que tiene una magnitud dada se la conoce como su dimensión (natural).
- Algunas dimensiones naturales: [x]=-1, [p]=[m]=[∂_μ]=1. Para los campos en 3+1 dimensiones se tiene: [campo escalar] = 1, [campo de Dirac] = 3/2, [campo de Proca] = [campo de Maxwell] = 1.
- Los axioman de Wightman resumen las características generales que uno espera que aparezcan en las teorías cuánticas de campos relativistas. Asumir que son válidos ha permitido probar teoremas fundamentales como el de espín-estadística o el teorema CPT.
- La representación de Källen-Lehmann nos permite escribir la función de dos puntos de una teoría interactuante en términos de la función de dos puntos de una teoría libre.
- A diferencia de lo que sucede en la teoría libre, donde $\hat{\phi}\,|0\rangle$ es un estado de una partícula, en una teoría interactuante, $\hat{\phi}\,|0\rangle$ es una superposición de estados con distintos números de partículas.

5.2. Matriz de scattering

Consideremos una teoría de campos interactuante con Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \tag{650}$$

siendo $\mathcal{L}_{\text{libre}}$ el Lagrangiano correspondiente a una teoría libre y $\mathcal{L}_{\text{int}}$ las interacciones de la teoría. Noten que ahora el operador del campo $\phi(t)$ ya no podrá ser expresado como suma de ondas planas pues el campo en el picture de Heisenberg difiere ahora del campo libre en ese picture

$$\phi_H(t) = e^{iH(t-t_0)} A_S e^{-iH(t-t_0)} \neq e^{iH_0(t-t_0)} A_S e^{-iH_0(t-t_0)} = \phi_H^{\text{libre}}(t). \tag{651}$$

Para subsanar esto definimos el picture de interacción, en el cual un operador A evoluciona según

$$A_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} A_S e^{-iH_0(t-t_0)}. \tag{652}$$

Así, para mantener el valor medio $\langle A \rangle$ invariante definimos que los estados deberán evolucionar como

$$|\alpha(t)\rangle_I = e^{iH_0(t-t_0)} |\alpha(t)\rangle_S = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} |\alpha(t_0)\rangle_S = U(t_1, t_0) |\alpha(t_0)\rangle_S \tag{653}$$

siendo

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} = T\left\{\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} H_I(t')dt'\right)\right\}. \tag{654}$$

Noten que en este picture tendremos

$$\phi_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi_S e^{-iH_0(t-t_0)} = \phi_H^{\text{libre}}(t), \tag{655}$$

como buscábamos.

Queremos entonces averiguar la amplitud de probabilidad de que un estado inicial $|\alpha\rangle$ pase a un estado final $|\beta\rangle$ a tiempos largos, es decir, queremos calcular

$$\lim_{t\to\infty} \langle\beta|\alpha(t)\rangle = \lim_{t\to\infty} \langle\beta| T\left\{\exp\left(-i\int_{-t}^{t} H_I(t')dt'\right)\right\} |\alpha\rangle \tag{656}$$

En el caso de campos nos interesa la probabilidad de que un estado de partículas con momento definido $|k_1, ..., k_m\rangle$ colisionen y den lugar a un estado final $|p_1, ..., p_n\rangle$, cuya amplitud viene dada por

$$\lim_{t\to\infty} \langle p_1, ..., p_n | k_1, ..., k_m(t)\rangle = \lim_{t\to\infty} \langle p_1, ..., p_n | T\{\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty} dt' H_I(t')\right]\} | k_1, ..., k_m\rangle \tag{657}$$

$$= \langle p_1, ..., p_n | S | k_1, ..., k_m\rangle \tag{658}$$

donde S es la matriz unitaria de Scattering. En la teórica vieron la fórmula de reducción LSZ que permite escribir

$$\langle p_1, ..., p_n | S | k_1, ..., k_m\rangle = \int \left(\Pi_{i=1}^{m} \frac{d^4x_i e^{-ik_i x_i}(k_i^2 - m^2)}{i\sqrt{Z}}\right) \int \left(\Pi_{j=1}^{n} \frac{d^4y_j e^{ip_j y_j}(p_j^2 - m^2)}{i\sqrt{Z}}\right) \times$$
$$\times \langle 0 | T\{\phi(x_1)...\phi(x_m)\phi(y_1)...\phi(y_n)\} | 0\rangle \tag{659}$$

Para continuar simplificando esta expresión, vieron en la teórica que el valor T-ordenado de campos puede ser escrito en términos de los campos en el picture de interacción (para los cuales vale la misma expansión que los libres) como

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\}|0\rangle = \frac{\langle 0|T\{\phi_I(x_1)...\phi_I(x_n)\exp\left[-i\int d^4x\mathcal{H}_I(x)\right]\}|0\rangle}{\langle 0|T\{\exp\left[-i\int d^4x\mathcal{H}_I(x)\right]\}|0\rangle} \tag{660}$$

Para calcular la amplitud de scattering será necesario conocer $\mathcal{H}_I$ que es la densidad hamiltoniana de interacción en el picture de interacción, pero si el Lagrangiano de interacción no depende de las derivadas del campo tenemos

$$\mathcal{H}_{\text{int}}[\phi] = -\mathcal{L}_{\text{int}}[\phi]. \tag{661}$$

Además si $\mathcal{L}_{\text{int}}[\phi]$ es una función analítica del campo tendremos

$$\mathcal{H}_I[\phi] = e^{iH_0t}\mathcal{H}_{\text{int}}[\phi]e^{-iH_0t} = -e^{iH_0t}\mathcal{L}_{\text{int}}[\phi]e^{-iH_0t} = \mathcal{L}_{\text{int}}[e^{iH_0t}\phi e^{-iH_0t}] = -\mathcal{L}_{\text{int}}[\phi_I]. \tag{662}$$

De ahora en más sobreentenderemos que todos los campos que aparezcan son en el picture de interacción y omitiremos el subíndice.

5.2.1. Teorema de Wick

Para seguir simplificando la expresión (660) debemos calcular una expresión T-ordenada de campos, para ello enunciamos el teorema de Wick

$$T\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\} = \sum \left(\text{Todas las combinaciones de contracciones posibles en orden normal}\right), \tag{663}$$

siendo una contracción de campos

$$\overbracket{\phi(x)\phi}(y) = \Delta_F(x-y). \tag{664}$$

Este teorema es válido cuando los campos son libres. Este teorema se entiende del siguiente modo: primero consideramos la expresión con 0 contracciones, luego todas las formas de contraer un par de campos, luego todas las formas de contraer 2 pares de campos y así siguiendo. Por ejemplo,

$$T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\} =: \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) : + : \overbracket{\phi(x_1)\phi}(x_2)\phi(x)\phi(x_4) : \tag{665}$$

$$+ : \overbracket{\phi(x_1)\phi(x_2)}\phi(x_3)\phi(x_4) : + : \overbracket{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)}\phi(x_4) : \tag{666}$$

$$+ : \phi(x_1)\overbracket{\phi(x_2)\phi}(x_3)\phi(x_4) : + : \phi(x_1)\overbracket{\phi(x_2)\phi(x_3)}\phi(x_4) : \tag{667}$$

$$+ : \phi(x_1)\phi(x_2)\overbracket{\phi(x_3)\phi}(x_4) : + : \overbracket{\phi(x_1)\phi}(x_2)\overbracket{\phi(x_3)\phi}(x_4) : \tag{668}$$

$$+ : \overbracket{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)}\phi(x_4) : + : \overbracket{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)}\phi(x_4) : \ . \tag{669}$$

Notemos que como para cualquier operador $\mathcal{O}(\phi)$ vale que

$$\langle 0| : \mathcal{O}(\phi) : |0\rangle = 0, \tag{670}$$

tenemos que si hay una cantidad impar de campos en cada sumando quedará al menos un operador sin contraer y al tomar valor medio se anulará, con lo cual tendremos

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\}|0\rangle = 0 \quad \forall n \text{ impar}. \tag{671}$$

Mientras que si tenemos un número par de campos los sumandos en los que no estén todos los campos contraídos se anularán y tendremos

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)...\phi(x_{2n})\}|0\rangle = \sum_{\sigma\in S_n} \Pi_{j=1}^{n} \Delta_F(x_{\sigma(j)} - x_{n+j}) = \sum \begin{array}{c}\text{Todas las combinaciones de}\\ \text{todos los campos contraídos}\end{array}. \tag{672}$$

El teorema de Wick vale también para fermiones con la definición

$$T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) = \theta(x^0 - y^0)\psi(x)\bar{\psi}(y) - \theta(y^0 - x^0)\bar{\psi}(y)\psi(x) \tag{673}$$

y teniendo en cuenta que para campos de más espinores, generalizamos esta definición tomando que el producto T-ordenado adquiere un signo menos cada vez que intercambiamos operadores para llevarlo al orden correcto. Además definimos

$$\overbracket{\psi(x)\bar{\psi}}(y) = S(x-y) \tag{674}$$

$$\overbracket{\psi(x)\psi}(y) = \overbracket{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}}(y) = 0. \tag{675}$$

Ejercicio: (Práctica 6,Ejercicio 67) *Usando el teorema de Wick, exprese la función de 4 puntos* $\langle 0 \mid \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\gamma(x_3)\bar{\psi}_\delta(x_4) \mid 0\rangle$ *en terminos de la de 2 puntos.*

Si $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ tendremos

$$\langle 0 \mid \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_3)\bar{\psi}(x_4) \mid 0\rangle = \langle 0 \mid T(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_3)\bar{\psi}(x_4)) \mid 0\rangle \tag{676}$$

$$=: \overbracket{\psi(x_1)\bar{\psi}}(x_2)\overbracket{\psi(x_3)\bar{\psi}}(x_4) : + : \overbracket{\psi(x_1)\overbracket{\bar{\psi}(x_2)\psi}(x_3)\bar{\psi}}(x_4) : \tag{677}$$

$$= S(x_1 - x_2)S(x_3 - x_4) - S(x_1 - x_4)S(x_2 - x_3), \tag{678}$$

donde usamos que al tomar valor medio sobre el vacío solo contribuyen los sumandos con todos los campos contraídos. Y si todos los puntos son distintos podremos anticonmutar los campos hasta llevarlos a orden temporal y aplicar el resultado anterior, con lo cual solo diferirá un signo $(-1)^p$ siendo p el signo de la permutación.

5.2.2. Diagramas disconexos

Usemos entonces el teorma de Wick para simplificar la ecuación (660)

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\exp\left[-i\int d^4z\mathcal{H}_I(z)\right]\}|0\rangle \tag{679}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-i)^j}{j!}\int d^4z_1...\int dz_j^4\langle 0|T\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\mathcal{H}_I(z_1)...\mathcal{H}_I(z_j)\}. \tag{680}$$

Para ello notemos que al calcular el producto T-ordenado con Wick existen contracciones en las que los puntos externos $x_1, ..., x_n$ no se hayan contraído con ciertos $\mathcal{H}_I$ hacemos entonces la siguiente separación

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\mathcal{H}_I(z_1)...\mathcal{H}_I(z_j)\}|0\rangle \tag{681}$$

$$=\sum_{m=0}^{j}\sum_{\text{combinaciones}}\langle 0|T_{\text{ext}}\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\mathcal{H}_I(z_1')...\mathcal{H}_I(z_{j-m}')\}|0\rangle\langle 0|T_{\text{vac}}\{\mathcal{H}_I(z_{m+1}')...\mathcal{H}_I(z_j')\}|0\rangle \tag{682}$$

donde las combinaciones consisten en elegir j elementos del conjunto $\{z_1, ..., z_m\}$ de m elementos, separandolo en dos conjuntos disconexos $\{z_i'\}_{1\leq i\leq j}$ y $\{z_i'\}_{j+1\leq i\leq m}$.

Al reemplazar (682) en (680) como estos puntos están integrados los $\begin{pmatrix} j \\ m \end{pmatrix}$ sumandos correspondientes a haber elegido j elementos dan el mismo resultado y tenemos

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\exp\left[-i\int d^4z\mathcal{H}_I(z)\right]\}|0\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-i)^j}{j!}\int d^4z_1...\int dz_j^4\sum_{m=0}^{q}\begin{pmatrix} j \\ m \end{pmatrix}\times$$
$$\times\langle 0|T_{\text{ext}}\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\mathcal{H}_I(z_1')...\mathcal{H}_I(z_{j-m}')\}|0\rangle\langle 0|T_{\text{vac}}\{\mathcal{H}_I(z_{m+1}')...\mathcal{H}_I(z_j')\}|0\rangle \tag{683}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-i)^j}{j!}\int d^4z_1...\int dz_j^4\sum_{m=0}^{j}\frac{j!}{(j-m)!m!}\langle 0|T_{\text{ext}}\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\mathcal{H}_I(z_1')...\mathcal{H}_I(z_{j-m}')\}|0\rangle\times$$
$$\times\langle 0|T_{\text{vac}}\{\mathcal{H}_I(z_{j-m+1}')...\mathcal{H}_I(z_j')\}|0\rangle \tag{684}$$

haciendo el cambio $k=j-m$ tenemos

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{(k)!}\int d^4z_1...\int dz_k^4\langle 0|T_{\text{ext}}\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\mathcal{H}_I(z_1')...\mathcal{H}_I(z_k')\}|0\rangle\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i)^m}{m!}\int d^4z_{k+1}...\int dz_{k+m}^4\langle 0|T_{\text{vac}}\{\mathcal{H}_I(z_{k+1}')...\mathcal{H}_I(z_{k+m}')\}|0\rangle \tag{685}$$

$$=\langle 0|T\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\exp\left[-i\int d^4z\mathcal{H}_I(z)\right]\}|0\rangle_{\text{conectado}}\langle 0|T\{\exp\left[-i\int d^4z\mathcal{H}_I(z)\right]\}|0\rangle \tag{686}$$

con lo cual el denominador de (660) se cancela y al reemplazar esa ecuación en (659) tenemos

$$\langle p_1, ..., p_n|S|k_1, ..., k_m\rangle = \int \left(\Pi_{i=1}^m \frac{d^4x_i e^{-ik_ix_i}(k_i^2 - m^2)}{i\sqrt{Z}}\right) \int \left(\Pi_{j=1}^n \frac{d^4y_y e^{ip_jy_j}(p_j^2 - m^2)}{i\sqrt{Z}}\right) \times$$
$$\times \langle 0|T\{(\Pi_{i=1}^m \phi(x_i)) \left(\Pi_{j=1}^n \phi(y_j)\right) \exp\left[-i\int d^4z\mathcal{H}_I(z)\right]\}|0\rangle_{\text{conectado}}. \quad (687)$$

5.2.3. Reglas de Feynman para $\frac{\lambda}{\alpha!}\phi^\alpha$

Veamos entonces cómo usar el teorema de Wick para calcular la amplitud de scattering (687). Comenzamos expandiendo la exponencial

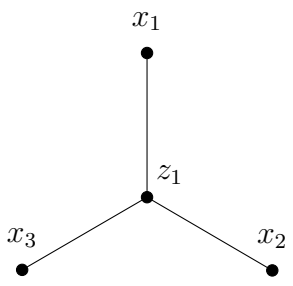
$$\langle 0|T\{(\Pi_{i=1}^m \phi(x_i)) \left(\Pi_{j=1}^n \phi(y_j)\right) \exp\left[-i\int d^4z\mathcal{H}_I(z)\right]\}|0\rangle_{\text{conectado}}$$
$$= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-i)^q}{q!} \int d^4z_1 ... \int d^4z_q \langle 0|T\{(\Pi_{i=1}^m \phi(x_i)) \left(\Pi_{j=1}^n \phi(y_j)\right) \mathcal{H}_I(z_1)...\mathcal{H}_I(z_q)\}|0\rangle_{\text{conectado}}. \quad (688)$$

En el caso de una interacción tipo $\mathcal{H}_I = \frac{\lambda}{\alpha!}\phi^\alpha$ tenemos que el orden q es

$$\frac{1}{q!}\left(\frac{-i\lambda}{\alpha!}\right)^q \int d^4z_1 ... \int d^4z_q \langle 0|T\{(\Pi_{i=1}^m \phi(x_i)) \left(\Pi_{j=1}^n \phi(y_j)\right) (\Pi_{k=1}^q \phi^\alpha(z_k))\}|0\rangle_{\text{conectado}} \quad (689)$$

y por la observación anterior si $m + n + q\alpha$ es impar el mismo se anulará. Además, asumiendo que $\lambda \ll 1$, la constante λ^q hace que los órdenes más altos contribuyan progresivamente menos a la amplitud de transición. Finalmente, podemos calcular cada orden usando el teorema de Wick sumando todas las posibles contracciones conectadas de todos los campos. Para hacer esto resulta conveniente representar cada combinación por un diagrama de Feynman donde los puntos $\{x_i, y_j, z_k\}_{i,j,k}$ son vértices y cada contracción $\phi(w_1)\phi(w_2)$ se representa graficamente por una arista que une los puntos w_1 y w_2, con lo cual de cada vértice z_k de interacción z_k saldrán α aristas. Por ejemplo,

$$\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(z_1)\phi(z_1)\phi(z_1) = \Delta_F(x_1 - z_1)\Delta_F(y_1 - z_1)\Delta_F(y_2 - z_1) \quad (690)$$

$=$ 

. (691)

En la práctica resulta más sencillo dibujar los diagramas en vez de considerar todas las posibles contracciones; sin embargo, varias contracciones distintas pueden dar lugar al mismo diagrama, en ejemplo anterior ocurre con $\phi(x_1)\phi(y_1)\phi(y_2)\phi(z_1)\phi(z_1)\phi(z_1)$ y $\phi(x_1)\phi(y_1)\phi(y_2)\phi(z_1)\phi(z_1)\phi(z_1)$.

De manera tal, que cada diagrama de Feynman debería ser multiplicado por un factor de multiplicidad que cuente el número de contracciones que dan lugar al mismo grafo.

Aplicando esto a la matriz de Scattering tenemos

$$\langle p_1, ..., p_n|S|k_1, ..., k_m\rangle = \sum_{q=0}^{\infty} \int \left(\Pi_{i=1}^{m} \frac{d^4x_i e^{-ik_ix_i}(k_i^2 - m^2)}{i\sqrt{Z}}\right) \int \left(\Pi_{j=1}^{n} \frac{d^4y_y e^{ip_jy_j}(p_j^2 - m^2)}{i\sqrt{Z}}\right)$$
$$\times \int \left(\Pi_{k=1}^{q} d^4z_k\right) \frac{1}{q!} \left(\frac{-i\lambda}{\alpha!}\right)^q \left(\sum \text{multiplicidad} \times \begin{array}{c}\text{Todos los diagramas de Feynman}\\ \text{conectados de}\{x_i, y_j, z_k\}_{i,j,k}\end{array}\right). \tag{692}$$

El factor de multiplicidad proviene en parte de que las etiquetas z_k de los vértices internos es arbitraria y todas las permutaciones son equivalentes, esto se compensa con el factor $1/q!$ de la serie; mientras que otra parte de la multiplicidad viene de las α aristas que entran a un vértice interno son equivalentes, lo cual se compensa con el factor $1/\alpha!$ que acompaña a cada vértice interno (por ello es que definimos el término de interacción con ese factorial extra). La multiplicidad cancela parcialmente estos factores pero todavía sobra un factor de simetría dividiendo producto de que pueden haber aristas que salgan de un vértice y vuelvan a entrar a él o de que dos vértices pueden ser unidos por multiples aristas. La fórmula entonces puede ser simplificada a

$$\langle p_1, ..., p_n|S|k_1, ..., k_m\rangle = \sum_{q=0}^{\infty} \int \left(\Pi_{i=1}^{m} \frac{d^4x_i e^{-ik_ix_i}(k_i^2 - m^2)}{i\sqrt{Z}}\right) \int \left(\Pi_{j=1}^{n} \frac{d^4y_y e^{ip_jy_j}(p_j^2 - m^2)}{i\sqrt{Z}}\right)$$
$$\times \int \left(\Pi_{k=1}^{q} d^4z_k\right) (-i\lambda)^q \times \left(\sum \frac{\begin{array}{c}\text{Todos los diagramas de Feynman}\\ \text{conectados de}\{x_i, y_j, z_k\}_{i,j,k}\end{array}}{\text{Factor de simetría}}\right). \tag{693}$$

Para aislar la parte interesante de la matriz de scattering, aquella debida a la interacción, definimos la matriz T como

$$S = 1 + iT \tag{694}$$

y el elemento de matriz invariante $\mathcal{M}$

$$\langle p_1, ..., p_n|iT|k_1, ..., k_m\rangle = i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta(\sum_j p_j - \sum_i k_i)(i\sqrt{Z})^{n+m}. \tag{695}$$

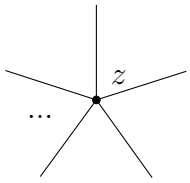
Podemos entonces calcular el elemento de matriz invariante de m partículas con momentos $k_1, ..., k_m$ a n partículas con momentos $p_1, ..., p_n$ en una teoría con interacción $\frac{\lambda}{\alpha!}\phi^\alpha$ y a orden q de la siguiente manera: primero realizamos todos diagramas de Feynman conectados. Para ello etiquetamos $m + n$ vértices externos como $x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n$ y q vértices internos como

$z_1, z_2, ..., z_q$; luego, unimos con una arista cada uno de los vértices internos a otros α vértices procurando que los vértices de salida solo se unan a 1 vértice y que el diagrama quede conectado. Segundo, asignamos a cada uno de los diagramas una expresión algebraica con las reglas de Feynman en el espacio de posición

1) Por cada par de puntos w_1, w_2 unidos por una arista escribimos el propagador de Feynman $\Delta_F(w_1 - w_2)$.

$$= \Delta_F(w_1 - w_2) \tag{696}$$

2) Por cada vértice interno z escribimos $-i\lambda$.



$$= -i\lambda \tag{697}$$

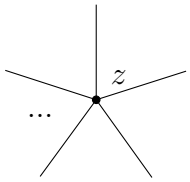
3) Por cada vértice de entrada x_i escribimos $e^{-ik_ix_i}(k_i^2 - m^2)$.

$$= e^{-ik_ix_i}(k_i^2 - m^2) \tag{698}$$

4) Por cada vértice de salida y_j escribimos $e^{ip_jy_j}(p_j^2 - m^2)$.

$$= e^{ip_jy_j}(p_j^2 - m^2) \tag{699}$$

5) Integramos sobre todos los vértices.



$$= \int d^4z \tag{700}$$

6) Dividimos por el factor de simetría.

Es posible simplificar aún más esta fórmula realizando las integrales sobre posición y pasando al espacio de momentos, veamos cómo haríamos esto de manera iterativa. Cada vértice externo x estará unido a un único vértice interno z tendremos entonces un factor

$$\int d^4x e^{-ikx}(k^2 - m^2)\Delta_F(x - z) \tag{701}$$

$$= e^{-ikz}\int d^4\tilde{x} e^{-ik\tilde{x}}(k^2 - m^2)\Delta_F(\tilde{x}) = e^{-ikz}(k^2 - m^2)\frac{1}{(k^2 - m^2)} \tag{702}$$

$$= e^{-ikz}, \tag{703}$$

o e^{ikz} si corresponde a un partícula saliente.

Por otro lado un vértice interno z_0 unido a otros vértices internos $z_1, ..., z_l$, a vértices de entrada $x_1, ..., x_m$ y vértices de salida $y_1, ..., y_n$ ya simplificados con la ecuación anterior dará lugar a

$$\int d^4z_0 \left(\Pi_{k=1}^{l}\Delta_F(z_k - z_0)\right)\left(\Pi_{i=1}^{m}e^{-ik_iz_0}\right)\left(\Pi_{i=1}^{n}e^{ip_jz_0}\right) \tag{704}$$

$$= \int d^4z_0 \int \Pi_{k=1}^{l}\frac{d^4q_k}{(2\pi)^4}e^{-iq_k(z_k-z_0)}\frac{1}{q_k^2-m^2}\Pi_{i=1}^{m}e^{-ik_iz_0}\Pi_{i=1}^{n}e^{ip_jz_0} \tag{705}$$

$$= e^{-iq_kz_k}\int \Pi_{k=1}^{l}\frac{d^4q_k}{(2\pi)^4}\frac{1}{q_k^2-m^2}\int d^4z_0 e^{iz_0\left(\sum_k q_k - \sum_i k_i + \sum_j p_j\right)} \tag{706}$$

$$= e^{-iq_kz_k}\int \Pi_{k=1}^{l}d^4q_k\frac{1}{q_k^2-m^2}\delta\left(\sum_k q_k - \sum_i k_i + \sum_j p_j\right). \tag{707}$$

Repitiendo este proceso sobre cada vértice interno obtenemos, los factores $e^{-iq_kz_k}$ actuarán como partículas entrantes sobre otros vértices. Noten además que si tenemos una arista que entra y sale de un mismo vértice conectado a un vértice externo tendremos un factor

$$\int d^4q\frac{1}{q^2-m^2+i\epsilon} \tag{708}$$

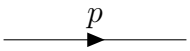
que diverge en el ultravioleta. Por ello consideraremos solo diagramas amputados, es dcir, aquellos en los que quitamos todos los subdiagramas asociados a las patas externas que se pueden separar cortando solo una línea. Obtenemos entonces como resultado

$$\langle p_1, ..., p_n|S|k_1, ..., k_m\rangle = \left(\frac{1}{i\sqrt{Z}}\right)^{n+m}\sum_{q=0}^{\infty}(-i\lambda)^q\int\left(\Pi_k d^4q_k\frac{1}{q_k^2-m^2+i\epsilon}\right)(2\pi)\times$$
$$\delta\left(\sum_k q_k - \sum_i k_i + \sum_j p_j\right)\left(\sum\frac{\begin{array}{c}\text{Todos los diagramas de Feynman conectados y amputados}\\ \text{de } q \text{ vértices y momentos } \{k_i, p_j, q_k\}_{i,j,k}\end{array}}{\text{Factor de simetría}}\right). \tag{709}$$

Podemos entonces calcular el elemento de matriz invariante de m partículas con momentos $k_1, ..., k_m$ a n partículas con momentos $p_1, ..., p_n$ en una teoría con interacción $\frac{\lambda}{\alpha!}\phi^\alpha$ y a orden q de la siguiente manera: primero realizamos todos diagramas de Feynman de momentos conectados y amputados. Para ello realizamos q vértices y los unimos con aristas etiquetadas con momentos internosq_j procurando que el diagrama quede conectado y amputado y además unimos $n+m$ aristas con sólo uno de sus extremos conectados a un vértice (estas serán las patas externas) y las etiquetamos con los momentos $\{k_i, p_j\}_{i,j}$. A cada arista le daremos una orientación mediante una flecha, que para las patas externas será entrante si es el momento inicial o saliente si es el final y le daremos una orientación arbitraria a las aristas internas. Noten que ya no habrán

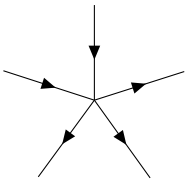
vértices externos. Segundo, asignamos a cada uno de los diagramas una expresión algebraica con las reglas de Feynman en el espacio de momentos

1) Por cada arista interna con momento p escribimos el propagador de Feynman en el espacio de momentos: $\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}$.



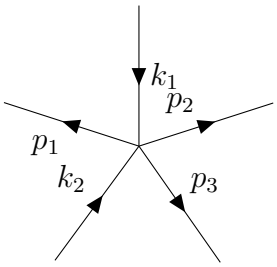
$$= \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{710}$$

2) Por cada vértice escribimos un factor: $-i\lambda$.



$$= -i\lambda \tag{711}$$

3) Por cada vértices con flechas entrantes de momentos $\{k_i\}_i$ y flechas salientes de momentos $\{p_j\}_j$ imponemos la conservación de momento con el factor: $\delta\left(\sum_j p_j - \sum_i k_i\right)$.



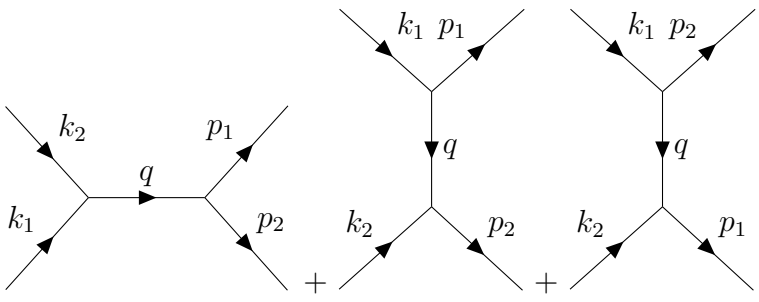
$$= \delta\left(p_1 + p_2 + p_3 - k_1 - k_2\right) \tag{712}$$

4) Integramos sobre el momento p de cada artista interna: $\int d^4p$.

5) Dividimos por el factor de simetría.

Utilicemos estas reglas para calcular la amplitud de scattering 2 partículas $|k_1, k_2\rangle$ a 2 partículas $|p_1, p_2\rangle$ en la teoría $\frac{\phi^3}{3!}$ hasta orden 2. A orden 1 la amplitud se anula porque no hay diagramas conexos o por la ecuación (671) pues $2+2+3\times 1$ es impar. A orden 2 solo tenemos 3 diagramas conexos y amputados

$\delta(p_1 + p_2 - k_1 + k_2)i\mathcal{M} =$



(713)

$$= (-i\lambda)^2 \int d^4q \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon}[\delta(q - k_1 + k_2)\delta(p_1 - p_2 - q) + \delta(p_1 + q - k_1)\delta(p_2 - q - k_1)$$
$$+ \delta(p_2 + q - k_1)\delta(p_1 - q - k_2)] \tag{714}$$

$$= (-i\lambda)^2 \int d^4q \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \delta(p_1 + p_2 - k_1 + k_2)[\delta(q - k_1 + k_2) + \delta(p_2 - q - k_1) + \delta(p_2 + q - k_1)] \tag{715}$$

$$= (-i\lambda)^2 \delta(p_1 + p_2 - k_1 + k_2)[\frac{1}{(k_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{(p_2 - k_1)^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{(k_1 - p_2)^2 - m^2 + i\epsilon}] \tag{716}$$

Algunas cosas para llevarse de esta clase...

- Teorema de Wick

  $T\{\phi(x_1)...\phi(x_n)\} = \sum$: (Todas las combinaciones de contracciones posibles) :

  El teorema vale para campos libres. Tener en cuenta los signos que aparecen para fermiones.

- La amplitud de scattering se calcula considerando los diagramas de Feynman conectados amputados y traduciendo estos diagramas a expresiones algebraicas usando las reglas de Feynman.

A. Derivadas Funcionales

Sea $F[\phi]$ un funcional, es decir, una función que asigna un número en $\mathbb{C}$ (o cualquier otro cuerpo) a cada función ϕ de cierto espacio normado M

$$F : M \to \mathbb{C} \,. \tag{717}$$

La relación que vincula la *variación* $\delta F[\phi]$ de un funcional $F[\phi]$, debida a variaciones infinitesimales $\delta\phi$ de su argumento, permite definir la *derivada funcional* $\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)}$:

$$\delta F[\phi] = F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] := \int d^3x \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) \,. \tag{718}$$

El cálculo formal de la derivada funcional puede también hacerse tomando variaciones en ϕ de la forma $\delta\phi(x) = \epsilon\delta(x-y)$. De este modo, la derivada funcional se expresa como

$$\frac{\delta F[\phi(x)]}{\delta\phi(y)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{F[\phi(x) + \epsilon\delta(x-y)] - F[\phi(x)]}{\epsilon} \,. \tag{719}$$

Tomando la ecuación (719) como la definición de la derivada funcional, les proponemos:

1. Encontrar las derivadas funcionales de los siguientes funcionales

   a) $F[\phi] = \int dx\, (\phi(x))^n$;

   b) $F[\phi] = \int dx \left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right)^n$;

   c) $F_y[\phi] = \int dx' K(y,x')\, \phi(x')$;

   d) $F_x[\phi] = \phi(x)$;

   e) $F_x[\phi] = \partial_x\phi(x)$;

2. Dentro del formalismo de Hamilton, definimos el corchete de Poisson entre dos funcionales $F[\phi,\pi]$ y $G[\phi,\pi]$ del siguiente modo

$$\{F,G\} = \int dx \left[\frac{\delta F}{\delta\phi(x)}\frac{\delta G}{\delta\pi(x)} - \frac{\delta F}{\delta\pi(x)}\frac{\delta G}{\delta\phi(x)}\right] \,. \tag{720}$$

   Demostrar las siguientes identidades (a tiempos iguales) de los corchetes de Poisson entre el campo y su momento canónico conjugado

$$\{\phi(t,x), \pi(t,x')\} = \delta(x-x') \,, \quad \{\phi(t,x), \phi(t,x')\} = \{\pi(t,x), \pi(t,x')\} = 0 \tag{721}$$

3. Expresar las ecuaciones de Euler-Lagrange, que surgen de anular la variación de la acción, en término de derivadas funcionales de los campos.