Material adicional: El grupo conforme

Vimos que el grupo de Poincaré preserva la distancia o intervalo. El grupo de Poincaré es un subgrupo de un grupo más grande que es muy relevante en la física teórica y se conoce como **grupo conforme**. El grupo conforme deja invariante los conos de luz, es decir, preserva los ángulos. Ante la transformación $x \to x'$, los ángulos se preservan si ocurre

$$ds^2(x') = F(x) ds^2(x)\,, \tag{1}$$

para cierta $F(x)$ adecuadamente regular. Les proponemos que resuelvan el siguiente ejercicio para hallar la forma explícita que tienen las transformaciones conformes a nivel infinitesimal para dimensión del espacio-tiempo $d \geq 3$.

Ejercicio: Considerando transformacions infinitesimales

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)\,, \tag{2}$$

muestre que,

(a) La condicion (1) es equivalente a

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(x) g_{\mu\nu}, \qquad \text{donde } f(x) = F(x) - 1\,. \tag{3}$$

(b) Aplicando derivadas a (3) se obtiene

$$(2-d)\partial_\mu \partial_\nu f = g_{\mu\nu} \Box f\,. \tag{4}$$

(c) Para $d \geq 3$

$$\partial_\mu \partial_\nu f = 0\,. \tag{5}$$

(d) Que en el caso anterior ϵ_μ es una función a lo sumo cuadrática en las coordenadas.

(e) Que las transformaciones admisibles son

$$\begin{aligned}
x'_\mu &= x_\mu + a_\mu \;, && \text{Traslaciones}\,. \\
x'_\mu &= (1+\alpha) x_\mu\,, && \text{Dilataciones}\,. \\
x'_\mu &= (g^\nu_\mu + \epsilon^\nu_\mu) x_\nu\,, \;\; \text{con } \epsilon^\nu_\mu = -\epsilon^\mu_\nu\,, && \text{Rotaciones}\,. \\
x'_\mu &= x_\mu + 2(x.b) x_\mu - b_\mu x^2 \;, && \text{Transformaciones especiales conformes}\,.
\end{aligned}$$

Este es el **grupo conforme** en $d \geq 3$. Estas expresiones corresponden a las versiones infinitesimales de las transformaciones. A partir de ellas pueden hallarse expresiones generales para cada transformación.

El grupo conforme en $d \geq 3$ contiene entonces al grupo de Poincaré y además a las dilataciones y las llamadas transformaciones especiales conformes. Para $d = 2$, donde el resultado del inciso (c) del ejercicio anterior no es válido, el grupo conforme se hace más grande. De hecho, en $d = 2$ el grupo conforme contiene infinitos tipos de nuevas transformaciones (aparecen infinitos generadores para su álgebra). Esto hace que los modelos que manifiestan la simetría conforme en dimensión $1+1$ sean muy ricos para el estudio analítico y es uno de los motivos por los cuales las teorías conformes en $1+1$ tienen tanta relevancia en física teórica.

Si les interesa el tema, les recomendamos que lean por ejemplo la introducción del libro "Conformal Field Theory" de los autores P. Di Francesco, P. Mathieu y D. Senechal. También pueden buscar en internet reviews o lectures sobre el tema; es común que al comienzo de ellos se mencionen algunas de las motivaciones para estudiar teorías conformes.