Campos - Práctica

Formulación Lagrangiana de teorías de campos.

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

Recordemos que el **lagrangiano** L es un funcional de los campos y sus derivadas $L(\phi, \partial_\mu \phi)$, es decir, un escalar de Lorentz.

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \,. \tag{1}$$

Recordemos que el **lagrangiano** L es un funcional de los campos y sus derivadas $L(\phi, \partial_\mu \phi)$, es decir, un escalar de Lorentz.

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\,. \tag{1}$$

Recordamos la definición de la **acción**

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{2}$$

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

Recordemos que el **lagrangiano** L es un funcional de los campos y sus derivadas $L(\phi, \partial_\mu \phi)$, es decir, un escalar de Lorentz.

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\,. \tag{1}$$

Recordamos la definición de la **acción**

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{2}$$

Principio de mínima acción $\implies$ ecuaciones de movimiento

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

Recordemos que el **lagrangiano** L es un funcional de los campos y sus derivadas $L(\phi, \partial_\mu \phi)$, es decir, un escalar de Lorentz.

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\,. \tag{1}$$

Recordamos la definición de la **acción**

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{2}$$

Principio de mínima acción $\implies$ ecuaciones de movimiento

ecuación de Euler-Lagrange: $$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0}\,. \tag{3}$$

Definiendo el **momento canónico conjugado** a ϕ como

$$\Pi_\phi(x) := \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)}, \tag{4}$$

Definiendo el **momento canónico conjugado** a ϕ como

$$\Pi_\phi(x) := \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)}, \tag{4}$$

podremos escribir el Hamiltoniano

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(x), \tag{5}$$

con

$$\mathcal{H}(x) = \sum_\phi \Pi_\phi(x)\partial_0\phi(x) - \mathcal{L}(x). \tag{6}$$

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

Campo escalar

La densidad lagrangiana

$$\boxed{\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2}$$

con $\phi \in \mathbb{R}$ nos da la ecuación de klein-gordon mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Campo escalar

La densidad lagrangiana

$$\boxed{\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2}\phi^2}$$

con $\phi \in \mathbb{R}$ nos da la ecuación de klein-gordon mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Comencemos calculando las derivadas que necesitaremos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \tag{7}$$

Campo escalar

La densidad lagrangiana

$$\boxed{\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2}$$

con $\phi \in \mathbb{R}$ nos da la ecuación de klein-gordon mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Comencemos calculando las derivadas que necesitaremos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi \tag{7}$$

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial_\mu\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}\left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi\right) = \partial_\mu\left[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\beta\phi + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\frac{\partial\left(\partial_\beta\phi\right)}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] \tag{8}$$

Campo escalar

La densidad lagrangiana

$$\boxed{\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2}\phi^2}$$

con $\phi \in \mathbb{R}$ nos da la ecuación de klein-gordon mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Comencemos calculando las derivadas que necesitaremos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \tag{7}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi\right) = \partial_\mu \left[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial\left(\partial_\alpha \phi\right)}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\beta \phi + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \phi \frac{\partial\left(\partial_\beta \phi\right)}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right] \tag{8}$$

$$= \partial_\mu \left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\delta^\mu_\alpha \partial_\beta \phi + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \phi \delta^\mu_\beta\right) = \partial_\mu \left(\frac{1}{2}2\eta^{\mu\nu}\partial_\nu \phi\right) = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu \phi \tag{9}$$

Campo escalar

La densidad lagrangiana

$$\boxed{\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2}$$

con $\phi \in \mathbb{R}$ nos da la ecuación de klein-gordon mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Comencemos calculando las derivadas que necesitaremos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi \tag{7}$$

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial_\mu\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}\left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi\right) = \partial_\mu\left[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\beta\phi + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\frac{\partial\left(\partial_\beta\phi\right)}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] \tag{8}$$

$$= \partial_\mu\left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\delta^\mu_\alpha\partial_\beta\phi + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\delta^\mu_\beta\right) = \partial_\mu\left(\frac{1}{2}2\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right) = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi \tag{9}$$

Luego reemplando estas en la ecuación de Euler-Lagrange tenemos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \boxed{-m^2\phi - \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = 0} \tag{10}$$

Podemos además obtener el momento canónico conjugado de ϕ

$$\Pi_\phi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi \tag{11}$$

Podemos además obtener el momento canónico conjugado de ϕ

$$\Pi_\phi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi \tag{11}$$

con lo que el Hamiltoniano resulta ser

$$\boxed{\mathcal{H}(x)} = \partial_0 \phi \partial_0 \phi(x) - \mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2 = \boxed{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \left(\nabla \phi\right)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2} \tag{12}$$

que podemos reconocer como la suma de la energía cinética más la potencial.

Podemos además obtener el momento canónico conjugado de ϕ

$$\Pi_\phi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi \tag{11}$$

con lo que el Hamiltoniano resulta ser

$$\boxed{\mathcal{H}(x)} = \partial_0\phi\partial_0\phi(x) - \mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 = \boxed{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2} \tag{12}$$

que podemos reconocer como la suma de la energía cinética más la potencial.

Considere ahora la densidad Lagrangiana $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*$, donde ϕ ahora es un campo complejo. Note que ahora no está el factor $\frac{1}{2}$ en el término cinético y en el de masa. Escribiendo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, con ϕ_1 y ϕ_2 reales, obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange para ϕ_1 y ϕ_2 y muestre que ambos cumplen la ecuación de Klein-Gordon.

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

Expandamos primero el Lagrangiano

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^* - m^2\phi\phi^* =$$

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

Expandamos primero el Lagrangiano

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^* - m^2\phi\phi^* =$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\partial_\nu\left(\phi_1 - i\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\left(\phi_1 - i\phi_2\right)$$

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

Expandamos primero el Lagrangiano

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^* - m^2\phi\phi^* =$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\partial_\nu\left(\phi_1 - i\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\left(\phi_1 - i\phi_2\right)$$

$$= \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_1 + i\partial_\mu\phi_2\partial_\nu\phi_1 - i\partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_1 + \partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)$$

Expandamos primero el Lagrangiano

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^* - m^2\phi\phi^* =$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\partial_\nu\left(\phi_1 - i\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\left(\phi_1 - i\phi_2\right)$$

$$= \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_1 + i\partial_\mu\phi_2\partial_\nu\phi_1 - i\partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_1 + \partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)$$

$$= \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_1 + \partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) \tag{13}$$

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

Expandamos primero el Lagrangiano

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^* - m^2\phi\phi^* =$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\partial_\nu\left(\phi_1 - i\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\left(\phi_1 - i\phi_2\right)$$

$$= \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_1 + i\partial_\mu\phi_2\partial_\nu\phi_1 - i\partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_1 + \partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)$$

$$= \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_1 + \partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) \tag{13}$$

Calculemos ahora las derivadas

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_j} = -m^2\phi_j\,, \quad \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_j)} = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi_j\,. \tag{14}$$

Expandamos primero el Lagrangiano

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^* - m^2\phi\phi^* =$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\partial_\nu\left(\phi_1 - i\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\left(\phi_1 - i\phi_2\right)$$

$$= \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_1 + i\partial_\mu\phi_2\partial_\nu\phi_1 - i\partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_1 + \partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)$$

$$= \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_1 + \partial_\nu\phi_2\partial_\mu\phi_2\right) - m^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) \tag{13}$$

Calculemos ahora las derivadas

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_j} = -m^2\phi_j\,, \quad \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_j)} = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi_j\,. \tag{14}$$

Reemplazando entonces en la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_j} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_j)} = \boxed{-m^2\phi_j - \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi_j = 0} \tag{15}$$

obtenemos que los campos ϕ_1 y ϕ_2 satisfacen la ecuación de Klein-Gordon.

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange considerando ϕ *y* ϕ^* *como variables independientes y verifique que obtiene las mismas ecuaciones de movimiento que en el inciso anterior.*

Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange considerando ϕ y ϕ^* como variables independientes y verifique que obtiene las mismas ecuaciones de movimiento que en el inciso anterior.

Calculando las derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -m^2\phi \tag{16}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \left(\eta^{\mu\nu}\partial_\nu \phi \partial_\mu \phi^*\right) = \partial_\nu \left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu \phi\right) \tag{17}$$

Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange considerando ϕ y ϕ^* como variables independientes y verifique que obtiene las mismas ecuaciones de movimiento que en el inciso anterior.

Calculando las derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -m^2 \phi \tag{16}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi^*\right) = \partial_\nu \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi\right) \tag{17}$$

Introduciendo esto en la ecuación de Euler-Lagrange

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = -m^2 \phi - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi \tag{18}$$

Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange considerando ϕ y ϕ^* como variables independientes y verifique que obtiene las mismas ecuaciones de movimiento que en el inciso anterior.

Calculando las derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -m^2 \phi \tag{16}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi^*\right) = \partial_\nu \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi\right) \tag{17}$$

Introduciendo esto en la ecuación de Euler-Lagrange

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = -m^2 \phi - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi \tag{18}$$

y reemplazando aquí $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ tenemos

$$0 = -m^2 \left(\phi_1 + i\phi_2\right) - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \left(\phi_1 + i\phi_2\right) \tag{19}$$

Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange considerando ϕ y ϕ^* como variables independientes y verifique que obtiene las mismas ecuaciones de movimiento que en el inciso anterior.

Calculando las derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -m^2 \phi \tag{16}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi^*\right) = \partial_\nu \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi\right) \tag{17}$$

Introduciendo esto en la ecuación de Euler-Lagrange

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = -m^2 \phi - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi \tag{18}$$

y reemplazando aquí $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ tenemos

$$0 = -m^2 \left(\phi_1 + i\phi_2\right) - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \left(\phi_1 + i\phi_2\right) \tag{19}$$

y como la parte imaginaria y real deben anularse por separado obtenemos

$$0 = -m^2 \phi_j - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi_j \tag{20}$$

con lo cual reobtuvimos las ecuaciones de movimiento del item anterior.

Tenemos entonces que el momento canónico conjugado a ϕ es

$$\Pi_\phi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^* \tag{21}$$

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

Tenemos entonces que el momento canónico conjugado a ϕ es

$$\Pi_\phi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi^* \tag{21}$$

y análogamente $\Pi_{\phi^*}(x) = \partial_0\phi$ con lo que el Hamiltoniano resulta ser

$$\boxed{\mathcal{H}(x)} = \partial_0\phi^*\partial_0\phi(x) + \partial_0\phi\partial_0\phi^*(x) - \mathcal{L}(x) = \partial_\mu\phi^*\partial_\mu\phi + m^2|\phi|^2 \tag{22}$$

Tenemos entonces que el momento canónico conjugado a ϕ es

$$\Pi_\phi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi^* \tag{21}$$

y análogamente $\Pi_{\phi^*}(x) = \partial_0\phi$ con lo que el Hamiltoniano resulta ser

$$\boxed{\mathcal{H}(x)} = \partial_0\phi^*\partial_0\phi(x) + \partial_0\phi\partial_0\phi^*(x) - \mathcal{L}(x) = \partial_\mu\phi^*\partial_\mu\phi + m^2|\phi|^2 \tag{22}$$

$$\boxed{= \dot{\phi_1}^2 + (\nabla\phi_1)^2 + m^2\phi_1^2 + \dot{\phi_2}^2 + (\nabla\phi_2)^2 + m^2\phi_2^2} \tag{23}$$

que reconocemos como la suma de dos Hamiltonianos de campos escalares reales independientes (para que aparezcan los factores $1/2$ de la ec. (12) podríamos haber empezado escribiendo $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ en lugar de $\phi = \phi_1 + i\phi_2$).

Bilineales de Dirac

Obtener el lagrangiano de Dirac

$\longrightarrow$ formar escalares que transformen de manera covariante a partir de Ψ

$\Psi \in \mathbb{C}^4$

Obtener el lagrangiano de Dirac

$\longrightarrow$ formar escalares que transformen de manera covariante a partir de Ψ

$\Psi \in \mathbb{C}^4$

Primera idea: $\Psi^\dagger \Psi$

Bilineales de Dirac

Obtener de lagrangiano de Dirac

$\longrightarrow$ formar escalares que transformen de manera covariante a partir de Ψ

$\Psi \in \mathbb{C}^4$

<u>Primera idea:</u> $\Psi^\dagger \Psi \xrightarrow{boost} (S(\Lambda)\Psi)^\dagger S(\Lambda)\Psi = \Psi^\dagger S(\Lambda)^\dagger S(\Lambda)\Psi$

Bilineales de Dirac

Obtener de lagrangiano de Dirac

$\longrightarrow$ formar escalares que transformen de manera covariante a partir de Ψ

$\Psi \in \mathbb{C}^4$

Primera idea: $\Psi^\dagger \Psi \xrightarrow{boost} (S(\Lambda)\Psi)^\dagger S(\Lambda)\Psi = \Psi^\dagger S(\Lambda)^\dagger S(\Lambda)\Psi$

¿$S(\Lambda)$ es unitaria?

Bilineales de Dirac

Obtener de lagrangiano de Dirac

$\longrightarrow$ formar escalares que transformen de manera covariante a partir de Ψ

$\Psi \in \mathbb{C}^4$

Primera idea: $\Psi^\dagger \Psi \xrightarrow{boost} (S(\Lambda)\Psi)^\dagger S(\Lambda)\Psi = \Psi^\dagger S(\Lambda)^\dagger S(\Lambda)\Psi$

¿$S(\Lambda)$ es unitaria?

$S(\Lambda) = e^{i\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}$ unitaria $\iff$ $\Sigma^{\mu\nu}$hermitica

Bilineales de Dirac

Obtener de lagrangiano de Dirac

$\longrightarrow$ formar escalares que transformen de manera covariante a partir de Ψ

$\Psi \in \mathbb{C}^4$

<u>Primera idea:</u> $\Psi^\dagger\Psi \xrightarrow{boost} (S(\Lambda)\Psi)^\dagger S(\Lambda)\Psi = \Psi^\dagger S(\Lambda)^\dagger S(\Lambda)\Psi$

¿$S(\Lambda)$ es unitaria?

$S(\Lambda) = e^{i\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}$ unitaria $\iff$ $\Sigma^{\mu\nu}$hermitica

$\Sigma^{0i} = \frac{i}{4}\left[\gamma^0, \gamma^i\right] = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}$ ¿hermítica? ✗

Bilineales de Dirac

Obtener de lagrangiano de Dirac

$\longrightarrow$ formar escalares que transformen de manera covariante a partir de Ψ

$\Psi \in \mathbb{C}^4$

<u>Primera idea:</u> $\Psi^\dagger \Psi \xrightarrow{boost} (S(\Lambda)\Psi)^\dagger S(\Lambda)\Psi = \Psi^\dagger S(\Lambda)^\dagger S(\Lambda)\Psi$

¿$S(\Lambda)$ es unitaria?

$S(\Lambda) = e^{i\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}$ unitaria $\iff$ $\Sigma^{\mu\nu}$hermitica

$\Sigma^{0i} = \frac{i}{4}\left[\gamma^0, \gamma^i\right] = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}$ ¿hermítica? ✗

¡No funciona!

Bilineales de Dirac

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

Bilineales de Dirac

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$(\gamma^0)^2 = \mathsf{Id}$

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$(\gamma^0)^2 = \mathsf{Id}$

$\gamma^0 \left(\Sigma^{ij}\right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \left(\Sigma^{ij}\right) \gamma^0 = \Sigma^{ij}$

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$(\gamma^0)^2 = \mathsf{Id}$

$\gamma^0 \left(\Sigma^{ij}\right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \left(\Sigma^{ij}\right) \gamma^0 = \Sigma^{ij}$

$\gamma^0 \left(\Sigma^{0j}\right)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \left(-\Sigma^{0j}\right) \gamma^0 = \Sigma^{0j}$

Bilineales de Dirac

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$(\gamma^0)^2 = \mathsf{Id}$

$\gamma^0 \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = \Sigma^{\mu\nu}$

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$(\gamma^0)^2 = \mathsf{Id}$

$\gamma^0 \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = \Sigma^{\mu\nu}$

$B\ A = \mathsf{Id}, \quad f$ analítica $\implies A\ f(C)\ B = f(A\ C\ B)$

Bilineales de Dirac

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$(\gamma^0)^2 = \mathsf{Id}$

$\gamma^0 \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = \Sigma^{\mu\nu}$

$B\ A = \mathsf{Id}, \quad f$ analítica $\implies A\ f(C)\ B = f(A\ C\ B)$

$\bar{\Psi} \xrightarrow{boost} \Psi^\dagger S(\Lambda)^\dagger \gamma^0$

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$$(\gamma^0)^2 = \mathrm{Id}$$

$$\gamma^0 \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = \Sigma^{\mu\nu}$$

$$B\ A = \mathrm{Id}, \quad f \text{ analítica} \implies A\ f(C)\ B = f(A\ C\ B)$$

$$\bar{\Psi} \xrightarrow{boost} \Psi^\dagger\ \mathrm{Id}\ S(\Lambda)^\dagger \gamma^0$$

Bilineales de Dirac

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$(\gamma^0)^2 = \mathsf{Id}$

$\gamma^0 \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = \Sigma^{\mu\nu}$

$B\ A = \mathsf{Id}, \quad f$ analítica $\implies A\ f(C)\ B = f(A\ C\ B)$

$\bar{\Psi} \xrightarrow{boost} \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0$

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$(\gamma^0)^2 = \mathsf{Id}$

$\gamma^0 \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = \Sigma^{\mu\nu}$

$B\ A = \mathsf{Id}, \quad f$ analítica $\implies A\ f(C)\ B = f(A\ C\ B)$

$\bar{\Psi} \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0$

Bilineales de Dirac

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$(\gamma^0)^2 = \mathsf{Id}$

$\gamma^0 \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = \Sigma^{\mu\nu}$

$B\ A = \mathsf{Id}, \quad f$ analítica $\implies A\ f(C)\ B = f(A\ C\ B)$

$\bar{\Psi} \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0$

$$\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 =$$

Bilineales de Dirac

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$(\gamma^0)^2 = \mathsf{Id}$

$\gamma^0 \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = \Sigma^{\mu\nu}$

$B\ A = \mathsf{Id}, \quad f$ analítica $\implies A\ f(C)\ B = f(A\ C\ B)$

$\bar{\Psi} \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0$

$$\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \exp\left(i\omega_{\mu\nu}\left(\Sigma^{\mu\nu}\right)\right)^\dagger \gamma^0$$

Bilineales de Dirac

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$(\gamma^0)^2 = \mathsf{Id}$

$\gamma^0 \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = \Sigma^{\mu\nu}$

$B\ A = \mathsf{Id}, \quad f$ analítica $\implies A\ f(C)\ B = f(A\ C\ B)$

$\bar{\Psi} \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0$

$$\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \exp\left(-i\omega_{\mu\nu} \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^\dagger\right) \gamma^0$$

Bilineales de Dirac

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$(\gamma^0)^2 = \mathsf{Id}$

$\gamma^0 \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = \Sigma^{\mu\nu}$

$B\ A = \mathsf{Id}, \quad f$ analítica $\implies A\ f(C)\ B = f(A\ C\ B)$

$\bar{\Psi} \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0$

$$\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = \exp\left(-i\omega_{\mu\nu}\gamma^0 \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0\right)$$

Bilineales de Dirac

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$(\gamma^0)^2 = \mathsf{Id}$

$\gamma^0 \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = \Sigma^{\mu\nu}$

$B\ A = \mathsf{Id}, \quad f$ analítica $\implies A\ f(C)\ B = f(A\ C\ B)$

$\bar{\Psi} \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0$

$$\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = \exp\left(-i\omega_{\mu\nu}\left(\Sigma^{\mu\nu}\right)\right)$$

Bilineales de Dirac

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$(\gamma^0)^2 = \mathsf{Id}$

$\gamma^0 \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = \Sigma^{\mu\nu}$

$B\ A = \mathsf{Id}, \quad f$ analítica $\implies A\ f(C)\ B = f(A\ C\ B)$

$\bar{\Psi} \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0$

$$\boxed{\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = S(\Lambda)^{-1}}$$

Bilineales de Dirac

¿Cómo transforma $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$?

$(\gamma^0)^2 = \mathsf{Id}$

$\gamma^0 \left(\Sigma^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = \Sigma^{\mu\nu}$

$B\ A = \mathsf{Id}, \quad f$ analítica $\implies A\ f(C)\ B = f(A\ C\ B)$

$\bar{\Psi} \xrightarrow{boost} \bar{\Psi} S(\Lambda)^{-1}$

Bilineales de Dirac

$$\bar{\Psi}\Psi \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}S(\Lambda)^{-1}S(\Lambda)\Psi$$

$\bar{\Psi}\Psi \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\Psi$ Escalar

Bilineales de Dirac

$\bar{\Psi}\Psi \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\Psi$ Escalar

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda)\Psi$

Bilineales de Dirac

$\bar{\Psi}\Psi \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\Psi$ Escalar

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi \xrightarrow{boost} \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\Psi}\gamma^{\nu}\Psi$ Vector

Bilineales de Dirac

$\bar{\Psi}\Psi \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\Psi$ Escalar

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi \xrightarrow{boost} \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\Psi}\gamma^{\nu}\Psi$ Vector

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\Psi \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}\gamma^{5}S(\Lambda)\Psi$

Bilineales de Dirac

$\bar{\Psi}\Psi \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\Psi$ Escalar

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi \xrightarrow{boost} \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\Psi}\gamma^{\nu}\Psi$ Vector

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\Psi \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda)\gamma^{5}\Psi$

Bilineales de Dirac

$\bar{\Psi}\Psi \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\Psi$ Escalar

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi \xrightarrow{boost} \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\Psi}\gamma^{\nu}\Psi$ Vector

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\Psi \xrightarrow{boost} \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\Psi}\gamma^{\nu}\gamma^{5}\Psi$ Vector

Bilineales de Dirac

$\bar{\Psi}\Psi \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\Psi$ Escalar

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi \xrightarrow{boost} \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\Psi}\gamma^{\nu}\Psi$ Vector

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\Psi \xrightarrow{boost} \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\Psi}\gamma^{\nu}\gamma^{5}\Psi$ Vector

$\bar{\Psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}\Psi = \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\Psi - \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\Psi$

Bilineales de Dirac

$$\bar{\Psi}\Psi \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\Psi \qquad \text{Escalar}$$

$$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi \xrightarrow{boost} \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\Psi}\gamma^{\nu}\Psi \qquad \text{Vector}$$

$$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\Psi \xrightarrow{boost} \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\Psi}\gamma^{\nu}\gamma^{5}\Psi \qquad \text{Vector}$$

$$\bar{\Psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}\Psi \xrightarrow{boost} \tfrac{1}{2}\bar{\Psi}S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}S(\Lambda)\Psi - \tfrac{1}{2}\bar{\Psi}S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}S(\Lambda)\Psi$$

Bilineales de Dirac

$\bar{\Psi}\Psi \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\Psi$ Escalar

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi \xrightarrow{boost} \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\Psi}\gamma^{\nu}\Psi$ Vector

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\Psi \xrightarrow{boost} \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\Psi}\gamma^{\nu}\gamma^{5}\Psi$ Vector

$$\bar{\Psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}\Psi \xrightarrow{boost} \tfrac{1}{2}\bar{\Psi}S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda)S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\nu}S(\Lambda)\Psi - \tfrac{1}{2}\bar{\Psi}S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\nu}S(\Lambda)S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda)\Psi$$

Bilineales de Dirac

$\bar{\Psi}\Psi \xrightarrow{boost} \bar{\Psi}\Psi$ Escalar

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi \xrightarrow{boost} \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\Psi}\gamma^{\nu}\Psi$ Vector

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\Psi \xrightarrow{boost} \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\Psi}\gamma^{\nu}\gamma^{5}\Psi$ Vector

$\bar{\Psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}\Psi \xrightarrow{boost} \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}\bar{\Psi}\gamma^{[\rho}\gamma^{\sigma]}\Psi$ Tensor antisimétrico de orden 2

Bilineales de Dirac

Bilineales de Dirac: $\bar{\Psi}\Gamma\Psi, \quad \Gamma$ una matriz de 4×4

$\bar{\Psi}\Psi$ Escalar

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi$ Vector

$\bar{\Psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}\Psi$ Tensor de orden 2

$\bar{\Psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho]}\Psi$ Tensor de orden 3

$\bar{\Psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma]}\Psi$ Tensor de orden 4

Bilineales de Dirac

Bilineales de Dirac: $\bar{\Psi}\Gamma\Psi, \quad \Gamma$ una matriz de 4×4

$\bar{\Psi}\Psi$ Escalar

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi$ Vector

$\bar{\Psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}\Psi$ Tensor de orden 2

$\bar{\Psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho]}\Psi$ Tensor de orden 3

$\bar{\Psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma]}\Psi$ Tensor de orden 4

$\bar{\Psi}\gamma^{5}\Psi$ pseudo-escalar

$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\Psi$ pseudo-vector

Pseudo-escalar/vector: Transforma como un escalar/vector ante $SO(3,1)$ y saca un (-1) ante paridad

Campo de Dirac

A partir del Lagrangiano

$$\boxed{\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\Psi} i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi} \tag{24}$$

podemos obtener la ecuación de movimiento para un campo de Dirac

Campo de Dirac

A partir del Lagrangiano

$$\boxed{\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\Psi} i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi} \tag{24}$$

podemos obtener la ecuación de movimiento para un campo de Dirac

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \bar{\Psi})} = i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi - m \Psi. \tag{25}$$

Campo de Dirac

A partir del Lagrangiano

$$\boxed{\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi} \tag{24}$$

podemos obtener la ecuación de movimiento para un campo de Dirac

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} = i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi. \tag{25}$$

El momento canónico conjugado a Ψ es entonces

$$\Pi_\Psi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \Psi)} = \bar{\Psi} i\gamma^0 = i\Psi\gamma^0\gamma^0 = i\Psi^\dagger \tag{26}$$

Campo de Dirac

A partir del Lagrangiano

$$\boxed{\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\Psi} i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi} \tag{24}$$

podemos obtener la ecuación de movimiento para un campo de Dirac

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_{\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\Psi})} = i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi - m\Psi. \tag{25}$$

El momento canónico conjugado a Ψ es entonces

$$\Pi_{\Psi}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0\Psi)} = \bar{\Psi} i\gamma^0 = i\Psi\gamma^0\gamma^0 = i\Psi^{\dagger} \tag{26}$$

mientras que el momento canónico conjugado de $\Psi^{\dagger}$ es

$$\Pi_{\Psi^{\dagger}}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0\Psi^{\dagger})} = 0 \tag{27}$$

Campo de Dirac

A partir del Lagrangiano

$$\boxed{\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi} \tag{24}$$

podemos obtener la ecuación de movimiento para un campo de Dirac

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} = i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi. \tag{25}$$

El momento canónico conjugado a Ψ es entonces

$$\Pi_\Psi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \Psi)} = \bar{\Psi} i\gamma^0 = i\Psi\gamma^0\gamma^0 = i\Psi^\dagger \tag{26}$$

mientras que el momento canónico conjugado de $\Psi^\dagger$ es

$$\Pi_{\Psi^\dagger}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \Psi^\dagger)} = 0 \tag{27}$$

y el Hamiltoniano resulta

$$\boxed{\mathcal{H} = \bar{\Psi}\left[-i\gamma^j \partial_j + m\right]\Psi}. \tag{28}$$

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

Escriba la forma más general posible del Lagrangiano invariante de Lorentz para un campo cuadrivectorial con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo. ¿A qué se reduce este Lagrangiano en el caso en que además se requiera invariancia ante transformaciones de gauge? Derive las ecuaciones de movimiento y compare con las de Maxwell.

Escriba la forma más general posible del Lagrangiano invariante de Lorentz para un campo cuadrivectorial con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo. ¿A qué se reduce este Lagrangiano en el caso en que además se requiera invariancia ante transformaciones de gauge? Derive las ecuaciones de movimiento y compare con las de Maxwell.

Los términos que tenga este Lagrangiano deben ser escalares de Lorentz y deberemos construirlos contrayendo índices del campo cuadrivectorial A^μ y la derivada ∂_μ. Como los índices se contraen de a pares deberá haber una cantidad par de estos objetos.

Escriba la forma más general posible del Lagrangiano invariante de Lorentz para un campo cuadrivectorial con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo. ¿A qué se reduce este Lagrangiano en el caso en que además se requiera invariancia ante transformaciones de gauge? Derive las ecuaciones de movimiento y compare con las de Maxwell.

Los términos que tenga este Lagrangiano deben ser escalares de Lorentz y deberemos construirlos contrayendo índices del campo cuadrivectorial A^μ y la derivada ∂_μ. Como los índices se contraen de a pares deberá haber una cantidad par de estos objetos.

Si tenemos 2 las opciones son $A^\mu A_\mu$ y $\partial_\mu A^\mu$. Sin embargo, podemos obviar este último, ya que es una cuadri-divergencia que en la acción sólo contribuye con un término de borde.

Escriba la forma más general posible del Lagrangiano invariante de Lorentz para un campo cuadrivectorial con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo. ¿A qué se reduce este Lagrangiano en el caso en que además se requiera invariancia ante transformaciones de gauge? Derive las ecuaciones de movimiento y compare con las de Maxwell.

Los términos que tenga este Lagrangiano deben ser escalares de Lorentz y deberemos construirlos contrayendo índices del campo cuadrivectorial A^μ y la derivada ∂_μ. Como los índices se contraen de a pares deberá haber una cantidad par de estos objetos.

Si tenemos 2 las opciones son $A^\mu A_\mu$ y $\partial_\mu A^\mu$. Sin embargo, podemos obviar este último, ya que es una cuadri-divergencia que en la acción sólo contribuye con un término de borde.

Si tenemos 4 objetos, las opciones son $\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu = (\partial_\mu A^\mu)^2$, $(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu)$, $(\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu)$, $(\partial_\mu \partial_\nu A^\nu) A^\mu$ y $\partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu$.

Escriba la forma más general posible del Lagrangiano invariante de Lorentz para un campo cuadrivectorial con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo. ¿A qué se reduce este Lagrangiano en el caso en que además se requiera invariancia ante transformaciones de gauge? Derive las ecuaciones de movimiento y compare con las de Maxwell.

Los términos que tenga este Lagrangiano deben ser escalares de Lorentz y deberemos construirlos contrayendo índices del campo cuadrivectorial A^μ y la derivada ∂_μ. Como los índices se contraen de a pares deberá haber una cantidad par de estos objetos.

Si tenemos 2 las opciones son $A^\mu A_\mu$ y $\partial_\mu A^\mu$. Sin embargo, podemos obviar este último, ya que es una cuadri-divergencia que en la acción sólo contribuye con un término de borde.

Si tenemos 4 objetos, las opciones son $\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu = (\partial_\mu A^\mu)^2$, $(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu)$, $(\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu)$, $(\partial_\mu \partial_\nu A^\nu) A^\mu$ y $\partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu$.

El último término es también una cuadri-divergencia de $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu$, con lo cual podemos ignorarlo.

Escriba la forma más general posible del Lagrangiano invariante de Lorentz para un campo cuadrivectorial con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo. ¿A qué se reduce este Lagrangiano en el caso en que además se requiera invariancia ante transformaciones de gauge? Derive las ecuaciones de movimiento y compare con las de Maxwell.

Los términos que tenga este Lagrangiano deben ser escalares de Lorentz y deberemos construirlos contrayendo índices del campo cuadrivectorial A^μ y la derivada ∂_μ. Como los índices se contraen de a pares deberá haber una cantidad par de estos objetos.

Si tenemos 2 las opciones son $A^\mu A_\mu$ y $\partial_\mu A^\mu$. Sin embargo, podemos obviar este último, ya que es una cuadri-divergencia que en la acción sólo contribuye con un término de borde.

Si tenemos 4 objetos, las opciones son $\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu = (\partial_\mu A^\mu)^2$, $(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu)$, $(\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu)$, $(\partial_\mu \partial_\nu A^\nu) A^\mu$ y $\partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu$.

El último término es también una cuadri-divergencia de $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu$, con lo cual podemos ignorarlo. Además, el término $(\partial_\mu \partial_\nu A^\nu) A^\mu$ difiere del primero también en una cuadri-divergencia $((\partial_\mu \partial_\nu A^\nu) A^\mu + (\partial_\nu A^\nu)(\partial_\mu A^\mu) = \partial_\mu (\partial_\nu A^\nu A^\mu))$, con lo cual también lo descartamos.

El Lagrangiano más general, con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo, es entonces

$$\mathcal{L} = \alpha \left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 + \beta \left(\partial_\mu A^\nu\right) \left(\partial^\mu A_\nu\right) + \gamma \left(\partial_\mu A^\nu\right) \left(\partial_\nu A^\mu\right) + \delta A_\mu A^\mu. \tag{29}$$

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

El Lagrangiano más general, con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo, es entonces

$$\mathcal{L} = \alpha \left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 + \beta \left(\partial_\mu A^\nu\right)\left(\partial^\mu A_\nu\right) + \gamma \left(\partial_\mu A^\nu\right)\left(\partial_\nu A^\mu\right) + \delta A_\mu A^\mu. \tag{29}$$

Para hallar la ecuación de movimiento calculemos las derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 2\delta A^\mu \tag{30}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A_\mu)} = \alpha 2\eta^\mu_\nu \left(\partial_\sigma A^\sigma\right) + \beta 2\partial_\nu A^\mu + \gamma 2\partial^\mu A_\nu \tag{31}$$

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

El Lagrangiano más general, con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo, es entonces

$$\mathcal{L} = \alpha \left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 + \beta \left(\partial_\mu A^\nu\right)\left(\partial^\mu A_\nu\right) + \gamma \left(\partial_\mu A^\nu\right)\left(\partial_\nu A^\mu\right) + \delta A_\mu A^\mu. \tag{29}$$

Para hallar la ecuación de movimiento calculemos las derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 2\delta A^\mu \tag{30}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A_\mu)} = \alpha 2\eta^\mu_\nu \left(\partial_\sigma A^\sigma\right) + \beta 2\partial_\nu A^\mu + \gamma 2\partial^\mu A_\nu \tag{31}$$

y reemplazando en la ecuación de Euler-Lagrange obtenemos

$$\delta A^\mu - \partial^\nu \left[\alpha \eta^\mu_\nu \left(\partial_\sigma A^\sigma\right) + \beta\partial_\nu A^\mu + \gamma\partial^\mu A_\nu\right] = 0 \tag{32}$$

El Lagrangiano más general, con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo, es entonces

$$\mathcal{L} = \alpha \left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 + \beta \left(\partial_\mu A^\nu\right)\left(\partial^\mu A_\nu\right) + \gamma \left(\partial_\mu A^\nu\right)\left(\partial_\nu A^\mu\right) + \delta A_\mu A^\mu. \tag{29}$$

Para hallar la ecuación de movimiento calculemos las derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 2\delta A^\mu \tag{30}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A_\mu)} = \alpha 2\eta^\mu_\nu \left(\partial_\sigma A^\sigma\right) + \beta 2\partial_\nu A^\mu + \gamma 2\partial^\mu A_\nu \tag{31}$$

y reemplazando en la ecuación de Euler-Lagrange obtenemos

$$\delta A^\mu - \partial^\nu \left[\alpha\eta^\mu_\nu \left(\partial_\sigma A^\sigma\right) + \beta\partial_\nu A^\mu + \gamma\partial^\mu A_\nu\right] = 0 \tag{32}$$

$$\delta A^\mu = (\alpha+\gamma)\partial^\mu \left(\partial_\sigma A^\sigma\right) + \beta\Box A^\mu. \tag{33}$$

con lo cual podemos eliminar el término con α del Lagrangiano sin perder generalidad.

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

El Lagrangiano más general, con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo, es entonces

$$\mathcal{L} = \alpha\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 + \beta\left(\partial_\mu A^\nu\right)\left(\partial^\mu A_\nu\right) + \gamma\left(\partial_\mu A^\nu\right)\left(\partial_\nu A^\mu\right) + \delta A_\mu A^\mu. \tag{29}$$

Para hallar la ecuación de movimiento calculemos las derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 2\delta A^\mu \tag{30}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A_\mu)} = \alpha 2\eta^\mu_\nu\left(\partial_\sigma A^\sigma\right) + \beta 2\partial_\nu A^\mu + \gamma 2\partial^\mu A_\nu \tag{31}$$

y reemplazando en la ecuación de Euler-Lagrange obtenemos

$$\delta A^\mu - \partial^\nu\left[\alpha\eta^\mu_\nu\left(\partial_\sigma A^\sigma\right) + \beta\partial_\nu A^\mu + \gamma\partial^\mu A_\nu\right] = 0 \tag{32}$$

$$\delta A^\mu = (\alpha+\gamma)\partial^\mu\left(\partial_\sigma A^\sigma\right) + \beta\Box A^\mu. \tag{33}$$

con lo cual podemos eliminar el término con α del Lagrangiano sin perder generalidad.

Así el lagrangiano resulta

$$\mathcal{L} = \beta\left(\partial_\mu A^\nu\right)\left(\partial^\mu A_\nu\right) + \gamma\left(\partial_\mu A^\nu\right)\left(\partial_\nu A^\mu\right) + \delta A_\mu A^\mu. \tag{34}$$

Si pedimos que además tenga invariancia de gauge, o sea que al reemplazar $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ las ecuaciones de movimiento no cambien

Si pedimos que además tenga invariancia de gauge, o sea que al reemplazar $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ las ecuaciones de movimiento no cambien

$$\delta \left(A^\mu + \partial^\mu \Lambda\right) = \gamma \partial^\mu \left(\partial_\sigma A^\sigma + \Box \Lambda\right) + \beta \Box \left(A^\mu + \partial^\mu \Lambda\right) \tag{35}$$

Si pedimos que además tenga invariancia de gauge, o sea que al reemplazar $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ las ecuaciones de movimiento no cambien

$$\delta \left(A^\mu + \partial^\mu \Lambda \right) = \gamma \partial^\mu \left(\partial_\sigma A^\sigma + \Box \Lambda \right) + \beta \Box \left(A^\mu + \partial^\mu \Lambda \right) \tag{35}$$

pidiendo que esto coincida con la ecuación de movimiento original tenemos

$$\delta \partial^\mu \Lambda = \gamma \partial^\mu \Box \Lambda + \beta \partial^\mu \Box \Lambda \quad \forall \Lambda, \tag{36}$$

Si pedimos que además tenga invariancia de gauge, o sea que al reemplazar $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ las ecuaciones de movimiento no cambien

$$\delta \left(A^\mu + \partial^\mu \Lambda \right) = \gamma \partial^\mu \left(\partial_\sigma A^\sigma + \Box \Lambda \right) + \beta \Box \left(A^\mu + \partial^\mu \Lambda \right) \tag{35}$$

pidiendo que esto coincida con la ecuación de movimiento original tenemos

$$\delta \partial^\mu \Lambda = \gamma \partial^\mu \Box \Lambda + \beta \partial^\mu \Box \Lambda \quad \forall \Lambda, \tag{36}$$

en particular tomando una función Λ tal que $\Box \Lambda = 0$ tenemos que $\delta = 0$ y la ecuación anterior resulta $(\gamma + \beta) \partial^\mu \Box \Lambda = 0$ lo que nos dice que $\gamma = -\beta$.

Si pedimos que además tenga invariancia de gauge, o sea que al reemplazar $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ las ecuaciones de movimiento no cambien

$$\delta \left(A^\mu + \partial^\mu \Lambda \right) = \gamma \partial^\mu \left(\partial_\sigma A^\sigma + \Box \Lambda \right) + \beta \Box \left(A^\mu + \partial^\mu \Lambda \right) \tag{35}$$

pidiendo que esto coincida con la ecuación de movimiento original tenemos

$$\delta \partial^\mu \Lambda = \gamma \partial^\mu \Box \Lambda + \beta \partial^\mu \Box \Lambda \quad \forall \Lambda, \tag{36}$$

en particular tomando una función Λ tal que $\Box \Lambda = 0$ tenemos que $\delta = 0$ y la ecuación anterior resulta $(\gamma + \beta) \partial^\mu \Box \Lambda = 0$ lo que nos dice que $\gamma = -\beta$.Así, el Lagrangiano resulta

$$\mathcal{L} = \beta \left(\partial_\mu A^\nu \right) \left(\partial^\mu A_\nu \right) - \beta \left(\partial_\mu A^\nu \right) \left(\partial_\nu A^\mu \right) = -2\beta \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right). \tag{37}$$

que coincide con el Lagrangiano para el campo de Maxwell.

Teorema de Noether

El **teorema de Noether** nos dice que a cada simetría continua de un sistema le corresponde una ley de conservación.

Teorema de Noether

El **teorema de Noether** nos dice que a cada simetría continua de un sistema le corresponde una ley de conservación. Matemáticamente, si ante una transformación de simetría infinitesimal

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu(x) \tag{38}$$

Teorema de Noether

El **teorema de Noether** nos dice que a cada simetría continua de un sistema le corresponde una ley de conservación. Matemáticamente, si ante una transformación de simetría infinitesimal

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu(x) \tag{38}$$

$$\phi_i(x) \to \phi_i'(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\,. \tag{39}$$

El índice a etiqueta la cantidad de parámetros infinitesimales, mientras que el índice i el número de campos si hay más de uno o de componentes del campo si el mismo es por ejemplo un espinor de Dirac.

El **teorema de Noether** nos dice que a cada simetría continua de un sistema le corresponde una ley de conservación. Matemáticamente, si ante una transformación de simetría infinitesimal

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu(x) \tag{38}$$

$$\phi_i(x) \to \phi'_i(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\,. \tag{39}$$

El índice a etiqueta la cantidad de parámetros infinitesimales, mientras que el índice i el número de campos si hay más de uno o de componentes del campo si el mismo es por ejemplo un espinor de Dirac.En dicho caso, el teorema de Noether asegura que

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0\,, \tag{40}$$

sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento, El **teorema de Noether** nos dice que a cada simetría continua de un sistema le corresponde una ley de conservación. Matemáticamente, si ante una transformación de simetría infinitesimal

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu(x) \tag{38}$$

$$\phi_i(x) \to \phi_i'(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\,. \tag{39}$$

El índice a etiqueta la cantidad de parámetros infinitesimales, mientras que el índice i el número de campos si hay más de uno o de componentes del campo si el mismo es por ejemplo un espinor de Dirac.En dicho caso, el teorema de Noether asegura que

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0\,, \tag{40}$$

sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento,siendo

$$j_a^\mu = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A_a^\nu(x)\partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\right] \right\} - A_a^\mu(x)\mathcal{L}(x)\,. \tag{41}$$

Teorema de Noether

El **teorema de Noether** nos dice que a cada simetría continua de un sistema le corresponde una ley de conservación. Matemáticamente, si ante una transformación de simetría infinitesimal

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A^\mu_a(x) \tag{38}$$

$$\phi_i(x) \to \phi'_i(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\,. \tag{39}$$

El índice a etiqueta la cantidad de parámetros infinitesimales, mientras que el índice i el número de campos si hay más de uno o de componentes del campo si el mismo es por ejemplo un espinor de Dirac.En dicho caso, el teorema de Noether asegura que

$$\partial_\mu j^\mu_a = 0\,, \tag{40}$$

sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento,siendo

$$j^\mu_a = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A^\nu_a(x)\partial_\nu\phi_i(x) - F_{i,a}(\phi,\partial\phi)\right] \right\} - A^\mu_a(x)\mathcal{L}(x)\,. \tag{41}$$

Además, la cantidad

$$Q_a = \int d^3x j^0_a(x)\,, \tag{42}$$

es una **constante de movimiento**

Teorema de Noether

Las simetrías pueden ser **internas** si sólo afectan al campo y no cambian las coordenadas o **espacio-temporales** en caso contrario.

Las simetrías pueden ser **internas** si sólo afectan al campo y no cambian las coordenadas o **espacio-temporales** en caso contrario.

Por ejemplo, si tenemos un campo escalar sin masa su Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \tag{43}$$

es invariante si hacemos la transformación $\phi \to \phi + \alpha$ con α una constante. Esta es una simetría interna.

Las simetrías pueden ser **internas** si sólo afectan al campo y no cambian las coordenadas o **espacio-temporales** en caso contrario.

Por ejemplo, si tenemos un campo escalar sin masa su Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \tag{43}$$

es invariante si hacemos la transformación $\phi \to \phi + \alpha$ con α una constante. Esta es una simetría interna.

Mientras que cambiar $\phi(x) \to \phi(x + \alpha)$ también es una simetría pero espacio-temporal.

Las simetrías pueden ser **internas** si sólo afectan al campo y no cambian las coordenadas o **espacio-temporales** en caso contrario.

Por ejemplo, si tenemos un campo escalar sin masa su Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \tag{43}$$

es invariante si hacemos la transformación $\phi \to \phi + \alpha$ con α una constante. Esta es una simetría interna.

Mientras que cambiar $\phi(x) \to \phi(x + \alpha)$ también es una simetría pero espacio-temporal.

Estas son simetrías continuas puesto que uno puede variar α de manera continua. Mientras que las simetrías discretas son por ejemplo C, P y T.

Las simetrías pueden ser **internas** si sólo afectan al campo y no cambian las coordenadas o **espacio-temporales** en caso contrario.

Por ejemplo, si tenemos un campo escalar sin masa su Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \tag{43}$$

es invariante si hacemos la transformación $\phi \to \phi + \alpha$ con α una constante. Esta es una simetría interna.

Mientras que cambiar $\phi(x) \to \phi(x + \alpha)$ también es una simetría pero espacio-temporal.

Estas son simetrías continuas puesto que uno puede variar α de manera continua. Mientras que las simetrías discretas son por ejemplo C, P y T.

En el caso de la simetría interna para el campo escalar sin masa que mostramos antes tenemos

$$\phi \to \phi(x) + \alpha \tag{44}$$

Las simetrías pueden ser **internas** si sólo afectan al campo y no cambian las coordenadas o **espacio-temporales** en caso contrario.

Por ejemplo, si tenemos un campo escalar sin masa su Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \tag{43}$$

es invariante si hacemos la transformación $\phi \to \phi + \alpha$ con α una constante. Esta es una simetría interna.

Mientras que cambiar $\phi(x) \to \phi(x+\alpha)$ también es una simetría pero espacio-temporal.

Estas son simetrías continuas puesto que uno puede variar α de manera continua. Mientras que las simetrías discretas son por ejemplo C, P y T.

En el caso de la simetría interna para el campo escalar sin masa que mostramos antes tenemos

$$\phi \to \phi(x) + \alpha \tag{44}$$

y tenemos la ley de conservación

$$0 = \partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \partial^\mu \phi \tag{45}$$

que en este caso no nos aporta nada nuevo pues es la ecuación de movimiento para el campo.

Otra simetría interna que podemos considerar es multiplicar a un campo escalar complejo por un número complejo $\phi \to e^{i\theta}\phi$ pues

$$\mathcal{L} \to \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi e^{i\theta})(\partial_\nu \phi^* e^{-i\theta}) - m^2 e^{i\theta}\phi e^{-i\theta}\phi^* = \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi^*) - m^2 \phi\phi^*. \qquad (46)$$

Otra simetría interna que podemos considerar es multiplicar a un campo escalar complejo por un número complejo $\phi \to e^{i\theta}\phi$ pues

$$\mathcal{L} \to \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi e^{i\theta})(\partial_\nu \phi^* e^{-i\theta}) - m^2 e^{i\theta}\phi e^{-i\theta}\phi^* = \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi^*) - m^2 \phi\phi^*. \qquad (46)$$

Estas son las transformaciones internas dadas por el grupo $U(1)$.

Otra simetría interna que podemos considerar es multiplicar a un campo escalar complejo por un número complejo $\phi \to e^{i\theta}\phi$ pues

$$\mathcal{L} \to \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi e^{i\theta})(\partial_\nu \phi^* e^{-i\theta}) - m^2 e^{i\theta}\phi e^{-i\theta}\phi^* = \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi^*) - m^2 \phi\phi^* . \tag{46}$$

Estas son las transformaciones internas dadas por el grupo $U(1)$.

Si tratamos a los campos ϕ y ϕ^* como independientes, esta simetría genera las transformaciones infinitesimales

$$\phi \to \phi + i\theta\phi\,, \quad \phi^* \to \phi^* - i\theta\phi^*\,, \tag{47}$$

Otra simetría interna que podemos considerar es multiplicar a un campo escalar complejo por un número complejo $\phi \to e^{i\theta}\phi$ pues

$$\mathcal{L} \to \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi e^{i\theta})(\partial_\nu \phi^* e^{-i\theta}) - m^2 e^{i\theta}\phi e^{-i\theta}\phi^* = \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi^*) - m^2\phi\phi^* . \qquad (46)$$

Estas son las transformaciones internas dadas por el grupo $U(1)$.

Si tratamos a los campos ϕ y ϕ^* como independientes, esta simetría genera las transformaciones infinitesimales

$$\phi \to \phi + i\theta\phi\,, \quad \phi^* \to \phi^* - i\theta\phi^*\,, \qquad (47)$$

y la corriente conservada resulta ser

$$\boxed{j^\mu = i\left[(\partial^\mu \phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu \phi)\right]} \qquad (48)$$

que es la misma corriente que habíamos estudiado anteriormente y ahora podemos ver que proviene de la simetría interna del campo ante multiplicar por una fase. Veremos que esta corriente estará asociada con la carga del campo.

Teorema de Noether

La teoría de Dirac también es invariante ante $U(1)$

La teoría de Dirac también es invariante ante $U(1)$

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi\,, \quad \psi^\dagger \to e^{-i\alpha}\psi^\dagger\,, \tag{49}$$

α es un número real es una simetría de la teoría

La teoría de Dirac también es invariante ante $U(1)$

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi\,, \quad \psi^\dagger \to e^{-i\alpha}\psi^\dagger\,, \tag{49}$$

α es un número real es una simetría de la teoría

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger\gamma^0\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi \to \mathcal{L}' = e^{-i\alpha}\psi^\dagger\gamma^0\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)e^{i\alpha}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = \mathcal{L}\,, \tag{50}$$

y como la transformación sólo involucra a los campos y no a las coordenadas, la acción también es invariante.

La teoría de Dirac también es invariante ante $U(1)$

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi \,, \quad \psi^\dagger \to e^{-i\alpha}\psi^\dagger \,, \tag{49}$$

α es un número real es una simetría de la teoría

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger\gamma^0 \left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi \to \mathcal{L}' = e^{-i\alpha}\psi^\dagger\gamma^0 \left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)e^{i\alpha}\psi = \psi^\dagger\gamma^0 \left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = \mathcal{L} \,, \tag{50}$$

y como la transformación sólo involucra a los campos y no a las coordenadas, la acción también es invariante.

Tenemos una corriente conservada, para encontrar notemos que infinitesimalmente

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi \approx \psi + i\alpha\psi \,, \quad \psi^\dagger \to e^{-i\alpha}\psi^\dagger \approx \psi - i\alpha\psi^\dagger \,, \tag{51}$$

por lo que en la ecuación (41) tenemos que poner $F_1 = i\psi$ y $F_2 = -i\psi^\dagger$.

Además, como la transformación no involucra a las coordenadas, se tiene $A^\mu = 0$. Entonces, la corriente conservada resulta

$$\boxed{j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} i\psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^\dagger)}(-i\psi^\dagger) = -\psi^\dagger \gamma^0 i\gamma^\mu i\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi} \,. \tag{52}$$

Además, como la transformación no involucra a las coordenadas, se tiene $A^\mu = 0$. Entonces, la corriente conservada resulta

$$\boxed{j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} i\psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^\dagger)}(-i\psi^\dagger) = -\psi^\dagger \gamma^0 i\gamma^\mu i\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu \psi} \,. \tag{52}$$

La carga conservada dada por la ecuación (42) es en este caso

$$\boxed{Q} = \int d^3\mathbf{x}\, j^0(0,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}\, \psi^\dagger(0,\mathbf{x})\gamma^0\gamma^0\psi(0,\mathbf{x}) = \boxed{\int d^3\mathbf{x}\, \psi^\dagger(0,\mathbf{x})\psi(0,\mathbf{x})} \,. \tag{53}$$

Ecuación de Euler-Lagrange para un campo: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$

Teorema de Noether

Ecuación de Euler-Lagrange para un campo: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$

Algunos Lagrangianos para recordar:

- Klein-Gordon (cargado): $\mathcal{L}_{\textsf{K-G}} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*$

Ecuación de Euler-Lagrange para un campo: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$

Algunos Lagrangianos para recordar:

- Klein-Gordon (cargado): $\mathcal{L}_{\text{K-G}} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*$
- Dirac: $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi$

Teorema de Noether

Ecuación de Euler-Lagrange para un campo: $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$$

Algunos Lagrangianos para recordar:

- Klein-Gordon (cargado): $\mathcal{L}_{\text{K-G}} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*$
- Dirac: $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi$
- Maxwell: $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$

Ecuación de Euler-Lagrange para un campo: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$

Algunos Lagrangianos para recordar:

- Klein-Gordon (cargado): $\mathcal{L}_{\text{K-G}} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*$
- Dirac: $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi$
- Maxwell: $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$

Idea del Teorema de Noether: A cada simetría continua de un sistema le corresponde una corriente conservada.