Campos - Práctica

Simetrías ante transformaciones espaciotemporales.

Recordemos que el **lagrangiano** L es un funcional de los campos y sus derivadas $L(\phi, \partial_\mu \phi)$, es decir, un escalar de Lorentz.

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\,. \tag{1}$$

Recordemos que el **lagrangiano** L es un funcional de los campos y sus derivadas $L(\phi, \partial_\mu \phi)$, es decir, un escalar de Lorentz.

$$L = \int d^3 x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\,. \tag{1}$$

Recordamos la definición de la **acción**

$$S = \int d^4 x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{2}$$

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

Recordemos que el **lagrangiano** L es un funcional de los campos y sus derivadas $L(\phi, \partial_\mu \phi)$, es decir, un escalar de Lorentz.

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\,. \tag{1}$$

Recordamos la definición de la **acción**

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{2}$$

Principio de mínima acción $\implies$ ecuaciones de movimiento

Formulación Lagrangiana de teorías de campos

Recordemos que el **lagrangiano** L es un funcional de los campos y sus derivadas $L(\phi, \partial_\mu \phi)$, es decir, un escalar de Lorentz.

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\,. \tag{1}$$

Recordamos la definición de la **acción**

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{2}$$

Principio de mínima acción $\implies$ ecuaciones de movimiento

ecuación de Euler-Lagrange: $$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0}\,. \tag{3}$$

Definiendo el **momento canónico conjugado** a ϕ como

$$\Pi_\phi(x) := \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)}, \tag{4}$$

Definiendo el **momento canónico conjugado** a ϕ como

$$\Pi_\phi(x) := \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)}, \tag{4}$$

podremos escribir el Hamiltoniano

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(x), \tag{5}$$

con

$$\mathcal{H}(x) = \sum_\phi \Pi_\phi(x)\partial_0\phi(x) - \mathcal{L}(x). \tag{6}$$

Teorema de Noether

El **teorema de Noether** nos dice que a cada simetría continua de un sistema le corresponde una ley de conservación.

El **teorema de Noether** nos dice que a cada simetría continua de un sistema le corresponde una ley de conservación. Matemáticamente, si ante una transformación de simetría infinitesimal

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu(x) \tag{7}$$

Teorema de Noether

El **teorema de Noether** nos dice que a cada simetría continua de un sistema le corresponde una ley de conservación. Matemáticamente, si ante una transformación de simetría infinitesimal

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu(x) \tag{7}$$

$$\phi_i(x) \to \phi_i'(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\,. \tag{8}$$

El índice a etiqueta la cantidad de parámetros infinitesimales, mientras que el índice i el número de campos si hay más de uno o de componentes del campo si el mismo es por ejemplo un espinor de Dirac.

Teorema de Noether

El **teorema de Noether** nos dice que a cada simetría continua de un sistema le corresponde una ley de conservación. Matemáticamente, si ante una transformación de simetría infinitesimal

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A^\mu_a(x) \tag{7}$$

$$\phi_i(x) \to \phi'_i(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\,. \tag{8}$$

El índice a etiqueta la cantidad de parámetros infinitesimales, mientras que el índice i el número de campos si hay más de uno o de componentes del campo si el mismo es por ejemplo un espinor de Dirac.En dicho caso, el teorema de Noether asegura que

$$\partial_\mu j^\mu_a = 0\,, \tag{9}$$

sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento, El **teorema de Noether** nos dice que a cada simetría continua de un sistema le corresponde una ley de conservación. Matemáticamente, si ante una transformación de simetría infinitesimal

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A^\mu_a(x) \tag{7}$$

$$\phi_i(x) \to \phi'_i(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\,. \tag{8}$$

El índice a etiqueta la cantidad de parámetros infinitesimales, mientras que el índice i el número de campos si hay más de uno o de componentes del campo si el mismo es por ejemplo un espinor de Dirac.En dicho caso, el teorema de Noether asegura que

$$\partial_\mu j^\mu_a = 0\,, \tag{9}$$

sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento,siendo

$$j^\mu_a = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A^\nu_a(x)\partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] \right\} - A^\mu_a(x)\mathcal{L}(x)\,. \tag{10}$$

Teorema de Noether

El **teorema de Noether** nos dice que a cada simetría continua de un sistema le corresponde una ley de conservación. Matemáticamente, si ante una transformación de simetría infinitesimal

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu(x) \tag{7}$$

$$\phi_i(x) \to \phi_i'(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\,. \tag{8}$$

El índice a etiqueta la cantidad de parámetros infinitesimales, mientras que el índice i el número de campos si hay más de uno o de componentes del campo si el mismo es por ejemplo un espinor de Dirac.En dicho caso, el teorema de Noether asegura que

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0\,, \tag{9}$$

sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento,siendo

$$j_a^\mu = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A_a^\nu(x)\partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\right] \right\} - A_a^\mu(x)\mathcal{L}(x)\,. \tag{10}$$

Además, la cantidad

$$Q_a = \int d^3x j_a^0(x)\,, \tag{11}$$

es una **constante de movimiento**

Teorema de Noether

Las simetrías pueden ser **internas** si sólo afectan al campo y no cambian las coordenadas o **espacio-temporales** en caso contrario.

Las simetrías pueden ser **internas** si sólo afectan al campo y no cambian las coordenadas o **espacio-temporales** en caso contrario.

Vimos que las transformaciones internas dadas por el grupo $U(1)$ ($\phi \rightarrow e^{i\theta}\phi$) eran simetrías de la teoría del campo de Klein-Gordon complejo y del campo de Dirac con

$$\boxed{j^\mu = i\left[(\partial^\mu \phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu \phi)\right]} \tag{12}$$

$$\boxed{j^\mu = -\psi^\dagger \gamma^0 i \gamma^\mu i \psi = \bar{\psi}\gamma^\mu \psi}\,. \tag{13}$$

Hoy veremos las simetrías ante transformaciones espacio-temporales, sus corrientes y cargas conservadas.

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

Recordamos el Lagrangiano de Klein-Gordon para un **campo complejo** (cargado)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi \,. \tag{14}$$

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

Recordamos el Lagrangiano de Klein-Gordon para un **campo complejo** (cargado)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi \,. \tag{14}$$

Una traslación espacio-temporal en un parámetro ϵ^μ,

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu = x^\mu + \epsilon^\nu g^\mu_\nu \,, \tag{15}$$

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

Recordamos el Lagrangiano de Klein-Gordon para un **campo complejo** (cargado)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi \,. \tag{14}$$

Una traslación espacio-temporal en un parámetro ϵ^μ,

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu = x^\mu + \epsilon^\nu g^\mu_\nu \,, \tag{15}$$

(noten que según la ecuación (7), en este caso es $A^\mu_\nu = g^\mu_\nu$) induce la siguiente transformación en los campos

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x' - \epsilon) = \phi(x) \,, \tag{16}$$

y lo análogo para ϕ^*.

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

Recordamos el Lagrangiano de Klein-Gordon para un **campo complejo** (cargado)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi \,. \tag{14}$$

Una traslación espacio-temporal en un parámetro ϵ^μ,

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu = x^\mu + \epsilon^\nu g^\mu_\nu \,, \tag{15}$$

(noten que según la ecuación (7), en este caso es $A^\mu_\nu = g^\mu_\nu$) induce la siguiente transformación en los campos

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x' - \epsilon) = \phi(x) \,, \tag{16}$$

y lo análogo para ϕ^*.Comparando la ecuación (16) con (8), vemos que en este caso, resulta

$$F_{i,\mu} = 0 \,, \tag{17}$$

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

Recordamos el Lagrangiano de Klein-Gordon para un **campo complejo** (cargado)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi \,. \tag{14}$$

Una traslación espacio-temporal en un parámetro ϵ^μ,

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu = x^\mu + \epsilon^\nu g^\mu_\nu \,, \tag{15}$$

(noten que según la ecuación (7), en este caso es $A^\mu_\nu = g^\mu_\nu$) induce la siguiente transformación en los campos

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x' - \epsilon) = \phi(x) \,, \tag{16}$$

y lo análogo para ϕ^*.Comparando la ecuación (16) con (8), vemos que en este caso, resulta

$$F_{i,\mu} = 0 \,, \tag{17}$$

para todo i y μ. Noten que identificamos $a \to \mu$, porque hay cuatro traslaciones infinitesimales, una por cada dirección del espacio-tiempo. El índice i toma los valores 1 y 2 (asociados a ϕ y ϕ^*).

El Lagrangiano queda invariante ante estas transformaciones

$$\mathcal{L}'(x') \equiv \mathcal{L}\left[\phi'(x'), \frac{\partial \phi'}{\partial x'}, x'\right] = \mathcal{L}\left[\phi(x), \frac{\partial \phi}{\partial x'}, x'\right] \ , \tag{18}$$

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

El Lagrangiano queda invariante ante estas transformaciones

$$\mathcal{L}'(x') \equiv \mathcal{L}\left[\phi'(x'), \frac{\partial \phi'}{\partial x'}, x'\right] = \mathcal{L}\left[\phi(x), \frac{\partial \phi}{\partial x'}, x'\right] , \tag{18}$$

pero como ϵ^μ es un cuadrivector constante, derivar respecto a x' es lo mismo que derivar respecto a x, y como el lagrangiano no depende explícitamente de las coordenadas

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}\left[\phi(x), \frac{\partial \phi}{\partial x}, x'\right] = \mathcal{L}\left[\phi(x), \frac{\partial \phi}{\partial x}\right] = \mathcal{L}(x) , \tag{19}$$

y como $d^4x' = d^4x$ la acción también es invariante. Esto nos dice que las traslaciones son simetrías y entonces hay corrientes conservadas.

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

Recurriendo a la ecuación (10) y recordando que $A^\mu_\nu = g^\mu_\nu$ y $F_\mu = 0$, las corrientes quedan

$$j^\mu_\sigma = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A^\nu_\sigma(x) \partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] \right\} - A^\mu_\sigma(x) \mathcal{L}(x) \tag{20}$$

Recurriendo a la ecuación (10) y recordando que $A^\mu_\nu = g^\mu_\nu$ y $F_\mu = 0$, las corrientes quedan

$$j^\mu_\sigma = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A^\nu_\sigma(x) \partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] \right\} - A^\mu_\sigma(x) \mathcal{L}(x) \tag{20}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} g^\nu_\sigma \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} g^\nu_\sigma \partial_\nu \phi^* - g^\mu_\sigma \mathcal{L} \tag{21}$$

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

Recurriendo a la ecuación (10) y recordando que $A^\mu_\nu = g^\mu_\nu$ y $F_\mu = 0$, las corrientes quedan

$$j^\mu_\sigma = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A^\nu_\sigma(x) \partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] \right\} - A^\mu_\sigma(x) \mathcal{L}(x) \tag{20}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} g^\nu_\sigma \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} g^\nu_\sigma \partial_\nu \phi^* - g^\mu_\sigma \mathcal{L} \tag{21}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\sigma \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \partial_\sigma \phi^* - g^\mu_\sigma \mathcal{L} \tag{22}$$

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

Recurriendo a la ecuación (10) y recordando que $A^\mu_\nu = g^\mu_\nu$ y $F_\mu = 0$, las corrientes quedan

$$j^\mu_\sigma = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A^\nu_\sigma(x)\partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi)\right] \right\} - A^\mu_\sigma(x)\mathcal{L}(x) \tag{20}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} g^\nu_\sigma \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} g^\nu_\sigma \partial_\nu \phi^* - g^\mu_\sigma \mathcal{L} \tag{21}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\sigma \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \partial_\sigma \phi^* - g^\mu_\sigma \mathcal{L} \tag{22}$$

$$= \partial^\mu \phi^* \partial_\sigma \phi + \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi^* - g^\mu_\sigma \left(\partial_\nu \phi \partial^\nu \phi^* - m^2 \phi^* \phi\right) \tag{23}$$

Recurriendo a la ecuación (10) y recordando que $A^{\mu}_{\nu} = g^{\mu}_{\nu}$ y $F_{\mu} = 0$, las corrientes quedan

$$j^{\mu}_{\sigma} = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A^{\nu}_{\sigma}(x) \partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] \right\} - A^{\mu}_{\sigma}(x) \mathcal{L}(x) \tag{20}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} g^{\nu}_{\sigma} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} g^{\nu}_{\sigma} \partial_\nu \phi^* - g^{\mu}_{\sigma} \mathcal{L} \tag{21}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\sigma \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \partial_\sigma \phi^* - g^{\mu}_{\sigma} \mathcal{L} \tag{22}$$

$$= \partial^\mu \phi^* \partial_\sigma \phi + \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi^* - g^{\mu}_{\sigma} \left(\partial_\nu \phi \partial^\nu \phi^* - m^2 \phi^* \phi \right) \tag{23}$$

$$= \partial^\mu \phi^* \partial_\sigma \phi + \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi^* - g^{\mu}_{\sigma} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi^* + g^{\mu}_{\sigma} m^2 \phi^* \phi \,. \tag{24}$$

Recurriendo a la ecuación (10) y recordando que $A^\mu_\nu = g^\mu_\nu$ y $F_\mu = 0$, las corrientes quedan

$$j^\mu_\sigma = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A^\nu_\sigma(x)\partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] \right\} - A^\mu_\sigma(x)\mathcal{L}(x) \tag{20}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} g^\nu_\sigma \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} g^\nu_\sigma \partial_\nu \phi^* - g^\mu_\sigma \mathcal{L} \tag{21}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\sigma \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \partial_\sigma \phi^* - g^\mu_\sigma \mathcal{L} \tag{22}$$

$$= \partial^\mu \phi^* \partial_\sigma \phi + \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi^* - g^\mu_\sigma \left(\partial_\nu \phi \partial^\nu \phi^* - m^2 \phi^* \phi \right) \tag{23}$$

$$= \partial^\mu \phi^* \partial_\sigma \phi + \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi^* - g^\mu_\sigma \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi^* + g^\mu_\sigma m^2 \phi^* \phi \,. \tag{24}$$

En general, a la corriente j^μ_σ asociada a la invariancia ante traslaciones se la llama **tensor de energía-impulso**, y se la denota con la letra θ. Como acabamos de ver, en el caso del campo escalar cargado, el tensor de energía-impulso es

$$\theta^\mu_\sigma = \partial^\mu \phi^* \partial_\sigma \phi + \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi^* - g^\mu_\sigma \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi^* + g^\mu_\sigma m^2 \phi^* \phi \,. \tag{25}$$

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

A partir de la corriente conservada podemos encontrar cuatro cargas/constantes de movimiento dadas por la ecuación (11)

$$Q_\sigma = \int d^3x j^0_\sigma(x) = \int d^3x \theta^0_\sigma(x) \,. \tag{26}$$

Q^0 es la **energía** o Hamiltoniano y Q^i son las componentes del **momento**.

A partir de la corriente conservada podemos encontrar cuatro cargas/constantes de movimiento dadas por la ecuación (11)

$$Q_\sigma = \int d^3x j^0_\sigma(x) = \int d^3x \theta^0_\sigma(x)\,. \tag{26}$$

Q^0 es la **energía** o Hamiltoniano y Q^i son las componentes del **momento**. La energía es

$$E \equiv Q^0 = \int d^3\, x\theta^{00}(x) \tag{27}$$

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

A partir de la corriente conservada podemos encontrar cuatro cargas/constantes de movimiento dadas por la ecuación (11)

$$Q_\sigma = \int d^3x j^0_\sigma(x) = \int d^3x \theta^0_\sigma(x)\,. \tag{26}$$

Q^0 es la **energía** o Hamiltoniano y Q^i son las componentes del **momento**. La energía es

$$E \equiv Q^0 = \int d^3\, x\theta^{00}(x) \tag{27}$$

$$= \int d^3x \left(\partial^0\phi\partial^0\phi^* + \bar{\nabla}\phi \cdot \bar{\nabla}\phi^* + m^2\phi^*\phi\right) \tag{28}$$

A partir de la corriente conservada podemos encontrar cuatro cargas/constantes de movimiento dadas por la ecuación (11)

$$Q_\sigma = \int d^3x j^0_\sigma(x) = \int d^3x \theta^0_\sigma(x)\,. \tag{26}$$

Q^0 es la **energía** o Hamiltoniano y Q^i son las componentes del **momento**. La energía es

$$E \equiv Q^0 = \int d^3\, x\theta^{00}(x) \tag{27}$$

$$= \int d^3x \, \left(\partial^0\phi\partial^0\phi^* + \bar{\nabla}\phi \cdot \bar{\nabla}\phi^* + m^2\phi^*\phi\right) \tag{28}$$

$$= \int d^3x \, \left(|\partial^0\phi|^2 + |\bar{\nabla}\phi|^2 + m^2|\phi|^2\right)\ . \tag{29}$$

Las otras cargas son

$$P^i \equiv Q^i = \int d^3x \, j^{0i}(x) = \tag{30}$$

$$= \int d^3x \, \left(\partial^0 \phi^* \partial^i \phi + \partial^i \phi^* \partial^0 \phi\right) \tag{31}$$

que corresponden al momento lineal que se conserva.

La cuenta que hicimos muestra que la expresión del tensor de energía-impulso para cualquier teoría de campos descripta por un Lagrangiano $\mathcal{L}$ y campos ϕ_i está dada por

$$\theta^{\mu\nu} = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i \right] - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \,. \tag{32}$$

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

La cuenta que hicimos muestra que la expresión del tensor de energía-impulso para cualquier teoría de campos descripta por un Lagrangiano $\mathcal{L}$ y campos ϕ_i está dada por

$$\theta^{\mu\nu} = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i \right] - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \,. \tag{32}$$

Usando la expresión anterior pueden calcular los tensores de energía-impulso del campo de Dirac y el de Maxwell. Los resultados son

$$\theta^{\mu\nu}_{\mathrm{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial^\nu \psi - g^{\mu\nu} \bar{\psi} \left(i\gamma^\sigma \partial_\sigma - m \right) \psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial^\nu \psi \,, \tag{33}$$

$$\theta^{\mu\nu}_{\mathrm{Maxwell}} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\alpha} \partial^\nu A_\alpha \,, \tag{34}$$

donde $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$.

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

Muchas veces se nota al tensor de energía-impulso como $T^{\mu\nu}$. Nosotros vamos a reservar la letra T para referirnos al tensor de energía-impulso simetrizado.

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

Muchas veces se nota al tensor de energía-impulso como $T^{\mu\nu}$. Nosotros vamos a reservar la letra T para referirnos al tensor de energía-impulso simetrizado.

Si a cualquier corriente conservada le sumamos una cantidad que tenga cuadridivergencia nula, la cantidad resultante también será una corriente conservada.

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

Muchas veces se nota al tensor de energía-impulso como $T^{\mu\nu}$. Nosotros vamos a reservar la letra T para referirnos al tensor de energía-impulso simetrizado.

Si a cualquier corriente conservada le sumamos una cantidad que tenga cuadridivergencia nula, la cantidad resultante también será una corriente conservada.

Podemos usar esta libertad para construir un tensor de energía-impulso que sea simétrico, el procedimiento es el siguiente.

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

Muchas veces se nota al tensor de energía-impulso como $T^{\mu\nu}$. Nosotros vamos a reservar la letra T para referirnos al tensor de energía-impulso simetrizado.

Si a cualquier corriente conservada le sumamos una cantidad que tenga cuadridivergencia nula, la cantidad resultante también será una corriente conservada.

Podemos usar esta libertad para construir un tensor de energía-impulso que sea simétrico, el procedimiento es el siguiente.

Definimos

$$T_{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial^{\sigma}\chi_{\sigma\mu\nu}\,, \tag{35}$$

donde $\chi_{\sigma\mu\nu}$ es un tensor arbitrario antisimétrico en sus dos primeros índices, es decir

$$\chi_{\sigma\mu\nu} = -\chi_{\mu\sigma\nu}\,, \tag{36}$$

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

Muchas veces se nota al tensor de energía-impulso como $T^{\mu\nu}$. Nosotros vamos a reservar la letra T para referirnos al tensor de energía-impulso simetrizado.

Si a cualquier corriente conservada le sumamos una cantidad que tenga cuadridivergencia nula, la cantidad resultante también será una corriente conservada.

Podemos usar esta libertad para construir un tensor de energía-impulso que sea simétrico, el procedimiento es el siguiente.

Definimos

$$T_{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial^{\sigma}\chi_{\sigma\mu\nu} \,, \tag{35}$$

donde $\chi_{\sigma\mu\nu}$ es un tensor arbitrario antisimétrico en sus dos primeros índices, es decir

$$\chi_{\sigma\mu\nu} = -\chi_{\mu\sigma\nu} \,, \tag{36}$$

ya que esta condición nos asegura que tenga divergencia nula y que entonces $T_{\mu\nu}$ también sea una corriente conservada. En efecto

$$\begin{aligned} \partial^{\mu}T_{\mu\nu} &= \partial^{\mu}\theta^{\mu\nu} + \partial^{\mu}\partial^{\sigma}\chi_{\sigma\mu\nu} = & (37) \\ &= \partial^{\mu}\theta^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^{\mu}\partial^{\sigma}\left(\chi_{\sigma\mu\nu} + \chi_{\mu\sigma\nu}\right) = \partial^{\mu}\theta^{\mu\nu} = & (38) \\ &= 0\,. & (39) \end{aligned}$$

Simetria ante traslaciones espaciotemporales

Se verifica además que $T^{\mu\mu}$ y $\theta^{\mu\mu}$ tienen las mismas cargas conservadas. La libertad en la elección de $\chi_{\sigma\mu\nu}$ puede utilizarse para construir un tensor de energía momento simétrico ante el intercambio $\mu \leftrightarrow \nu$.

Se verifica además que $T^{\mu\mu}$ y $\theta^{\mu\mu}$ tienen las mismas cargas conservadas. La libertad en la elección de $\chi_{\sigma\mu\nu}$ puede utilizarse para construir un tensor de energía momento simétrico ante el intercambio $\mu \leftrightarrow \nu$.

Por ejemplo, para simetrizar el tensor de energía-impulso del campo de Maxwell dado por la ecuación (34) podemos tomar $\chi^{\sigma\mu\nu} = F^{\mu\sigma} A^{\nu}$ y se obtiene

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{Maxwell}} = \theta^{\mu\nu}_{\mathrm{Maxwell}} + \partial_\sigma F^{\mu\sigma} A^{\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha} \,, \tag{40}$$

que como pueden ver es un tensor simétrico.

Se verifica además que $T^{\mu\mu}$ y $\theta^{\mu\mu}$ tienen las mismas cargas conservadas. La libertad en la elección de $\chi_{\sigma\mu\nu}$ puede utilizarse para construir un tensor de energía momento simétrico ante el intercambio $\mu \leftrightarrow \nu$.

Por ejemplo, para simetrizar el tensor de energía-impulso del campo de Maxwell dado por la ecuación (34) podemos tomar $\chi^{\sigma\mu\nu} = F^{\mu\sigma} A^{\nu}$ y se obtiene

$$T^{\mu\nu}_{\text{Maxwell}} = \theta^{\mu\nu}_{\text{Maxwell}} + \partial_\sigma F^{\mu\sigma} A^{\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha} \,, \tag{40}$$

que como pueden ver es un tensor simétrico. Además, las densidades de energía y momento son $T^{00} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E^2} + \mathbf{B^2}\right)$ y $T^{0i} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i$, respectivamente, que ya deben identificar como densidad de energía de los campos y componentes del vector de Poynting.

Siguiendo con el campo de Dirac.

Las cargas conservadas ante traslaciones espacio-temporales son también la energía y el momento lineal

$$H = \int \theta^{00}_{\text{Dirac}} d^3\mathbf{x} = \int i\overline{\psi}\gamma^0\partial^0\psi d^3\mathbf{x}$$

$$P^i = \int \theta^{0i}_{\text{Dirac}} d^3\mathbf{x} = \int i\overline{\psi}\gamma^0\partial^i\psi d^3\mathbf{x}.$$

Simetría ante transformaciones de Lorentz

Recordamos el Lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}_{\mathsf{Dirac}} = \bar{\psi} i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi - m \bar{\psi} \psi \,. \tag{41}$$

Recordamos el Lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}_{\mathsf{Dirac}} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \,. \tag{41}$$

Una transformación de Lorentz de las coordenadas se puede escribir como

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \,, \tag{42}$$

donde

$$\Lambda^\mu_\nu = \left(e^{\frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}} \right)^\mu_\nu \,. \tag{43}$$

Simetría ante transformaciones de Lorentz

Recordamos el Lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \,. \tag{41}$$

Una transformación de Lorentz de las coordenadas se puede escribir como

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \,, \tag{42}$$

donde

$$\Lambda^\mu_\nu = \left(e^{\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}} \right)^\mu_\nu \,. \tag{43}$$

Expandiendo la exponencial en (43) y quedándonos a primer orden en los parámetros tenemos

$$x'^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta} \left(M^{\alpha\beta} \right)^\mu_\nu x^\nu \,, \tag{44}$$

Recordamos el Lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \,. \tag{41}$$

Una transformación de Lorentz de las coordenadas se puede escribir como

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \,, \tag{42}$$

donde

$$\Lambda^\mu_\nu = \left(e^{\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}} \right)^\mu_{\ \nu} \,. \tag{43}$$

Expandiendo la exponencial en (43) y quedándonos a primer orden en los parámetros tenemos

$$x'^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta} \left(M^{\alpha\beta} \right)^\mu_{\ \nu} x^\nu \,, \tag{44}$$

Ante una transformación de Lorentz, el campo de Dirac transforma como

$$\psi(x) \to \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') = S(\Lambda)\psi(x) \,. \tag{45}$$

Simetría ante transformaciones de Lorentz

La ecuación anterior, a primer orden en los parámetros ω, es

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = \psi(x) + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}\psi(x)\,, \tag{46}$$

La ecuación anterior, a primer orden en los parámetros ω, es

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = \psi(x) + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}\psi(x)\,, \tag{46}$$

que escrita para cada componente ψ^σ del espinor, para llevarlo a la forma dada por la ecuación (8) y que sea sencillo leer $F_{i,a}$, queda

$$\psi'^{\sigma}(x') = \left(S(\Lambda)\right)^{\sigma}_{\ \rho}\psi^{\rho}(x) = \psi^{\sigma}(x) + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)^{\sigma}_{\ \rho}\psi^{\rho}(x)\,. \tag{47}$$

La ecuación anterior, a primer orden en los parámetros ω, es

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = \psi(x) + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}\psi(x)\,, \tag{46}$$

que escrita para cada componente ψ^σ del espinor, para llevarlo a la forma dada por la ecuación (8) y que sea sencillo leer $F_{i,a}$, queda

$$\psi'^\sigma(x') = \left(S(\Lambda)\right)^\sigma_{\ \rho}\,\psi^\rho(x) = \psi^\sigma(x) + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)^\sigma_{\ \rho}\,\psi^\rho(x)\,. \tag{47}$$

Mirando las ecuaciones (7) y (8), e identificando $a \to \alpha\beta$, $\epsilon^a \to \omega^{\alpha\beta}$, obtenemos

$$A^\mu_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}(M_{\alpha\beta})^\mu_{\ \nu}x^\nu\,, \tag{48}$$

Simetría ante transformaciones de Lorentz

La ecuación anterior, a primer orden en los parámetros ω, es

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = \psi(x) + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}\psi(x)\,, \tag{46}$$

que escrita para cada componente ψ^σ del espinor, para llevarlo a la forma dada por la ecuación (8) y que sea sencillo leer $F_{i,a}$, queda

$$\psi'^\sigma(x') = (S(\Lambda))^\sigma_{\ \rho}\,\psi^\rho(x) = \psi^\sigma(x) + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(\Sigma^{\alpha\beta}\right)^\sigma_{\ \rho}\psi^\rho(x)\,. \tag{47}$$

Mirando las ecuaciones (7) y (8), e identificando $a \to \alpha\beta$, $\epsilon^a \to \omega^{\alpha\beta}$, obtenemos

$$A^\mu_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}(M_{\alpha\beta})^\mu_{\nu}x^\nu\,, \tag{48}$$

$$F_{\sigma,\alpha\beta} = \frac{i}{2}(\Sigma_{\alpha\beta})_{\sigma\rho}\psi^\rho(x)\,. \tag{49}$$

Para calcular la corriente conservada usamos que

1. $$(M^{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} = -i\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta}_{\nu} - g^{\beta\mu}g^{\alpha}_{\nu}\right)\ . \tag{50}$$

Para calcular la corriente conservada usamos que

1. $$(M^{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} = -i\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta}_{\nu} - g^{\beta\mu}g^{\alpha}_{\nu}\right)\ . \tag{50}$$

2. El último término de la corriente dada por la ecuación (10) donde aparece $\mathcal{L}$ se anula (ya que el Lagrangiano de Dirac se anula cuando los campos son soluciones de las ecuaciones de movimiento).

Para calcular la corriente conservada usamos que

1. $$(M^{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} = -i\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta}_{\nu} - g^{\beta\mu}g^{\alpha}_{\nu}\right)\ . \tag{50}$$

2. El último término de la corriente dada por la ecuación (10) donde aparece $\mathcal{L}$ se anula (ya que el Lagrangiano de Dirac se anula cuando los campos son soluciones de las ecuaciones de movimiento).
3. La expresión del tensor de energía-impulso del campo de Dirac dada por la ecuación (33).

Para calcular la corriente conservada usamos que

1. $$(M^{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} = -i\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta}_{\nu} - g^{\beta\mu}g^{\alpha}_{\nu}\right) . \tag{50}$$

2. El último término de la corriente dada por la ecuación (10) donde aparece $\mathcal{L}$ se anula (ya que el Lagrangiano de Dirac se anula cuando los campos son soluciones de las ecuaciones de movimiento).
3. La expresión del tensor de energía-impulso del campo de Dirac dada por la ecuación (33).

Trabajando un poco llegamos a que las corrientes conservadas son

$$j^{\mu}_{\alpha\beta} = x_{\alpha}\theta^{\mu}_{\beta} - x_{\beta}\theta^{\mu}_{\alpha} + \bar{\psi}\gamma^{\mu}\Sigma_{\alpha\beta}\psi\,. \tag{51}$$

Simetría ante transformaciones de Lorentz

Las constantes de movimiento asociadas a esta corriente son

$$
\begin{aligned}
Q_{\alpha\beta} &= \int d^3x\, j^0_{\alpha\beta}(x) = && (52)\\
&= \int d^3x\, \left(x_\alpha \theta^0_\beta - x_\beta \theta^0_\alpha\right) + \int d^3x\, \bar{\psi}\gamma^0 \Sigma_{\alpha\beta}\psi\,. && (53)
\end{aligned}
$$

Simetría ante transformaciones de Lorentz

Las constantes de movimiento asociadas a esta corriente son

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3x\, j^0_{\alpha\beta}(x) = \tag{52}$$

$$= \int d^3x\, \left(x_\alpha \theta^0_\beta - x_\beta \theta^0_\alpha\right) + \int d^3x\, \bar{\psi}\gamma^0\Sigma_{\alpha\beta}\psi\,. \tag{53}$$

Si definimos

$$(\mathbf{J})_k := \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}Q_{ij} = \epsilon_{ijk}\int d^3x\,(x_i P_j + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^0\Sigma_{ij}\psi) = \epsilon_{ijk}\int d^3x\,(x_i i\bar{\psi}\gamma^0\partial_j\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^0\Sigma_{ij}\psi) \tag{54}$$

Las constantes de movimiento asociadas a esta corriente son

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta} &= \int d^3x\, j^0_{\alpha\beta}(x) = && (52)\\ &= \int d^3x\, \left(x_\alpha\theta^0_\beta - x_\beta\theta^0_\alpha\right) + \int d^3x\, \bar\psi\gamma^0\Sigma_{\alpha\beta}\psi\,. && (53)\end{aligned}$$

Si definimos

$$(\mathbf{J})_k := \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}Q_{ij} = \epsilon_{ijk}\int d^3x\,(x_iP_j + \frac{1}{2}\bar\psi\gamma^0\Sigma_{ij}\psi) = \epsilon_{ijk}\int d^3x\,(x_i i\bar\psi\gamma^0\partial_j\psi + \frac{1}{2}\bar\psi\gamma^0\Sigma_{ij}\psi) \tag{54}$$

$$(\vec\Sigma)_k := \epsilon_{ijk}\Sigma_{ij} \tag{55}$$

Las constantes de movimiento asociadas a esta corriente son

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3x\, j^0_{\alpha\beta}(x) = \tag{52}$$

$$= \int d^3x\, \left(x_\alpha \theta^0_\beta - x_\beta \theta^0_\alpha\right) + \int d^3x\, \bar{\psi}\gamma^0 \Sigma_{\alpha\beta}\psi\,. \tag{53}$$

Si definimos

$$(\mathbf{J})_k := \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}Q_{ij} = \epsilon_{ijk}\int d^3x\,(x_i P_j + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^0\Sigma_{ij}\psi) = \epsilon_{ijk}\int d^3x\,(x_i i\bar{\psi}\gamma^0\partial_j\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^0\Sigma_{ij}\psi) \tag{54}$$

$$(\vec{\Sigma})_k := \epsilon_{ijk}\Sigma_{ij} \tag{55}$$

tenemos que el momento angular viene dado por

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \tag{56}$$

$$\mathbf{L} := \int \psi^\dagger \left[\mathbf{x} \times i\nabla\right] \psi d^3\mathbf{x}, \quad \text{Momento angular orbital} \tag{57}$$

$$\mathbf{S} := \int \psi^\dagger \frac{\vec{\Sigma}}{2} \psi d^3\mathbf{x}, \quad \text{Spin.} \tag{58}$$

Teorema de Noether: si las transformaciones

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu \,,$$

$$\phi_i(x) \to \phi'_i(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \,,$$

dejan invariante la acción $S = \int d^4x \, \mathcal{L}(x)$ entonces

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0$$

sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento,

Teorema de Noether

<u>Teorema de Noether:</u> si las transformaciones

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu \,,$$

$$\phi_i(x) \to \phi_i'(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \,,$$

dejan invariante la acción $S = \int d^4x \, \mathcal{L}(x)$ entonces

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0$$

sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento,siendo

$$j_a^\mu = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A_a^\nu(x) \partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] \right\} - A_a^\mu(x) \mathcal{L}(x) \,.$$

Teorema de Noether

Teorema de Noether: si las transformaciones

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu \,,$$

$$\phi_i(x) \to \phi_i'(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \,,$$

dejan invariante la acción $S = \int d^4x \, \mathcal{L}(x)$ entonces

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0$$

sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento,siendo

$$j_a^\mu = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A_a^\nu(x) \partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] \right\} - A_a^\mu(x) \mathcal{L}(x) \,.$$

Además, las cargas

$$Q_a = \int d^3x j_a^0(x) \,,$$

son constantes de movimiento.

Teorema de Noether

Teorema de Noether: si las transformaciones

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu \,,$$

$$\phi_i(x) \to \phi_i'(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \,,$$

dejan invariante la acción $S = \int d^4x \, \mathcal{L}(x)$ entonces

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0$$

sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento,siendo

$$j_a^\mu = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A_a^\nu(x) \partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] \right\} - A_a^\mu(x) \mathcal{L}(x) \,.$$

Además, las cargas

$$Q_a = \int d^3x j_a^0(x) \,,$$

son constantes de movimiento.

Corrientes conservadas por la invariancia ante el grupo de Poincaré:

- Traslaciones: Tensor de energía-impulso $\theta^{\mu\nu} = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i \right] - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$.

<u>Teorema de Noether:</u> si las transformaciones

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu \,,$$

$$\phi_i(x) \to \phi_i'(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \,,$$

dejan invariante la acción $S = \int d^4x \, \mathcal{L}(x)$ entonces

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0$$

sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento,siendo

$$j_a^\mu = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A_a^\nu(x) \partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] \right\} - A_a^\mu(x) \mathcal{L}(x) \,.$$

Además, las cargas

$$Q_a = \int d^3x j_a^0(x) \,,$$

son constantes de movimiento.

Corrientes conservadas por la invariancia ante el grupo de Poincaré:

- Traslaciones: Tensor de energía-impulso $\theta^{\mu\nu} = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i \right] - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$.
- Lorentz: Tensor de momento angular generalizado.