Campos - Práctica

Amplitudes de Scattering en QED.

Ya vimos que los elementos constituyentes para armar los diagramas de Feynman de la QED son: propagadores fermiónicos y del fotón, patas externas de fermiones y fotón, y un vértice de interacción con tres patas (dos fermiónicas, una del fotón).

Ya vimos que los elementos constituyentes para armar los diagramas de Feynman de la QED son: propagadores fermiónicos y del fotón, patas externas de fermiones y fotón, y un vértice de interacción con tres patas (dos fermiónicas, una del fotón).

El proceso para construir diagramas que contribuyen a orden n en e a la amplitud de scattering $\mathcal{M}$ para un proceso en QED es el siguiente:

1. Dibujar las patas externas (a la izquierda las correspondientes a partículas entrantes y a la derechas las de partículas salientes).

Reglas de Feynman

Ya vimos que los elementos constituyentes para armar los diagramas de Feynman de la QED son: propagadores fermiónicos y del fotón, patas externas de fermiones y fotón, y un vértice de interacción con tres patas (dos fermiónicas, una del fotón).

El proceso para construir diagramas que contribuyen a orden n en e a la amplitud de scattering $\mathcal{M}$ para un proceso en QED es el siguiente:

1. Dibujar las patas externas (a la izquierda las correspondientes a partículas entrantes y a la derechas las de partículas salientes).
2. Dibujar $j = 0$ vértices y hacer salir 3 líneas (internas) de cada uno de ellos.

Reglas de Feynman

Ya vimos que los elementos constituyentes para armar los diagramas de Feynman de la QED son: propagadores fermiónicos y del fotón, patas externas de fermiones y fotón, y un vértice de interacción con tres patas (dos fermiónicas, una del fotón).

El proceso para construir diagramas que contribuyen a orden n en e a la amplitud de scattering $\mathcal{M}$ para un proceso en QED es el siguiente:

1. Dibujar las patas externas (a la izquierda las correspondientes a partículas entrantes y a la derechas las de partículas salientes).
2. Dibujar $j = 0$ vértices y hacer salir 3 líneas (internas) de cada uno de ellos.
3. Dibujar todos los diagramas que representan las distintas formas en las que todas las líneas anteriores pueden unirse.

Reglas de Feynman

Ya vimos que los elementos constituyentes para armar los diagramas de Feynman de la QED son: propagadores fermiónicos y del fotón, patas externas de fermiones y fotón, y un vértice de interacción con tres patas (dos fermiónicas, una del fotón).

El proceso para construir diagramas que contribuyen a orden n en e a la amplitud de scattering $\mathcal{M}$ para un proceso en QED es el siguiente:

1. Dibujar las patas externas (a la izquierda las correspondientes a partículas entrantes y a la derechas las de partículas salientes).
2. Dibujar $j = 0$ vértices y hacer salir 3 líneas (internas) de cada uno de ellos.
3. Dibujar todos los diagramas que representan las distintas formas en las que todas las líneas anteriores pueden unirse.
4. Iterar aumentando j en una unidad, hasta $j = n$.

Reglas de Feynman

Ya vimos que los elementos constituyentes para armar los diagramas de Feynman de la QED son: propagadores fermiónicos y del fotón, patas externas de fermiones y fotón, y un vértice de interacción con tres patas (dos fermiónicas, una del fotón).

El proceso para construir diagramas que contribuyen a orden n en e a la amplitud de scattering $\mathcal{M}$ para un proceso en QED es el siguiente:

1. Dibujar las patas externas (a la izquierda las correspondientes a partículas entrantes y a la derechas las de partículas salientes).
2. Dibujar $j = 0$ vértices y hacer salir 3 líneas (internas) de cada uno de ellos.
3. Dibujar todos los diagramas que representan las distintas formas en las que todas las líneas anteriores pueden unirse.
4. Iterar aumentando j en una unidad, hasta $j = n$.

Para saber cuál es la contribución que hay que asignarle a cada diagrama uno utiliza las reglas de Feynman (las damos directamente en espacio de momentos porque es lo que vamos a usar).

Reglas de Feynman

Para saber cuál es la contribución que hay que asignarle a cada diagrama uno utiliza las reglas de Feynman

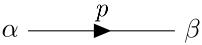
1. Propagadores:

$$\alpha \xrightarrow{\quad p \quad} \beta \;=\; \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\ (\text{propagador Dirac})\,,$$

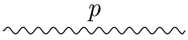
Reglas de Feynman

Para saber cuál es la contribución que hay que asignarle a cada diagrama uno utiliza las reglas de Feynman

1. Propagadores:



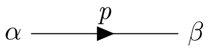
$$= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \text{ (propagador Dirac)},$$



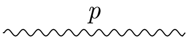
$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \text{ (propagador del fotón)}.$$

Para saber cuál es la contribución que hay que asignarle a cada diagrama uno utiliza las reglas de Feynman

1. Propagadores:

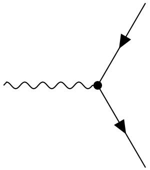


$$= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \text{ (propagador Dirac)}\,,$$



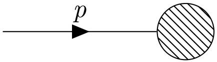
$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \text{ (propagador del fotón)}\,.$$

2. Vértice:



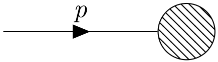
$$= -ie\gamma^{\mu}\,.$$

3. Patas externas (la burbuja indica el resto del diagrama):



$$= u^s(p) \ (\text{electrón entrante})\,,$$

3. Patas externas (la burbuja indica el resto del diagrama):

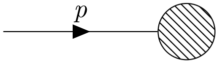


$$= u^s(p) \text{ (electrón entrante)}\,,$$

$$= \bar{v}^s(p) \text{ (positrón entrante)}\,,$$

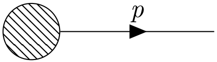
Reglas de Feynman

3. Patas externas (la burbuja indica el resto del diagrama):



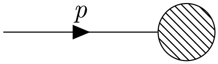
$$= u^s(p) \text{ (electrón entrante)}\,,$$

$$= \bar{v}^s(p) \text{ (positrón entrante)}\,,$$



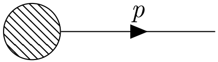
$$= \bar{u}^s(p) \text{ (electrón saliente)}\,,$$

3. Patas externas (la burbuja indica el resto del diagrama):

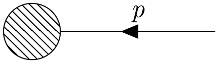


$$= u^s(p) \text{ (electrón entrante)}\,,$$

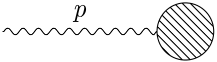
$$= \bar{v}^s(p) \text{ (positrón entrante)}\,,$$



$$= \bar{u}^s(p) \text{ (electrón saliente)}\,,$$

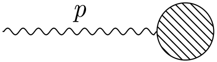


$$= v^s(p) \text{ (positrón saliente)}\,.$$

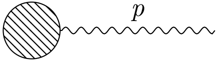


$= \epsilon_\mu(p)$ (fotón entrante) ,

Reglas de Feynman

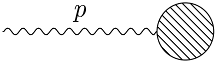


$$= \epsilon_\mu(p) \text{ (fotón entrante)}\,,$$

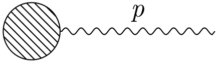


$$= \epsilon_\mu(p)^* \text{ (fotón saliente)}\,,$$

Reglas de Feynman



$$= \epsilon_\mu(p) \text{ (fotón entrante)}\,,$$

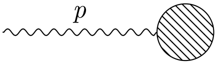


$$= \epsilon_\mu(p)^* \text{ (fotón saliente)}\,,$$

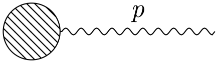
4. Por cada vértice con flechas entrantes de momentos $\{k_i\}_i$ y flechas salientes de momentos $\{p_j\}_j$ agregamos:

$$(2\pi)^4 \delta\left(\sum_j p_j - \sum_i k_i\right) \,.$$

Reglas de Feynman



$$= \epsilon_\mu(p) \text{ (fotón entrante)}\,,$$



$$= \epsilon_\mu(p)^* \text{ (fotón saliente)}\,,$$

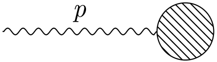
4. Por cada vértice con flechas entrantes de momentos $\{k_i\}_i$ y flechas salientes de momentos $\{p_j\}_j$ agregamos:

$$(2\pi)^4 \delta \left(\sum_j p_j - \sum_i k_i \right) \,.$$

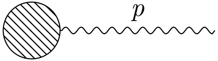
5. Integramos sobre el momento p de cada línea interna:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

.



$$= \epsilon_\mu(p) \text{ (fotón entrante)} \,,$$



$$= \epsilon_\mu(p)^* \text{ (fotón saliente)} \,,$$

4. Por cada vértice con flechas entrantes de momentos $\{k_i\}_i$ y flechas salientes de momentos $\{p_j\}_j$ agregamos:

$$(2\pi)^4 \delta \left(\sum_j p_j - \sum_i k_i \right) \,.$$

5. Integramos sobre el momento p de cada línea interna:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

.

6. Dividimos por el factor de simetría.

Reglas de Feynman

La relación entre la amplitud de scattering y los diagramas es finalmente

$$i\mathcal{M}\,(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_{\text{patas salientes}} p_i - \sum_{\text{patas entrantes}} p_i\right) = \begin{array}{c}\text{suma de contribuciones de los}\\ \text{diagramas conectados.}\end{array}$$

La relación entre la amplitud de scattering y los diagramas es finalmente

$$i\mathcal{M}\,(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_{\text{patas salientes}} p_i - \sum_{\text{patas entrantes}} p_i\right) = \begin{array}{c}\text{suma de contribuciones de los}\\ \text{diagramas conectados.}\end{array}$$

Importante: El signo que lleve cada diagrama por sí sólo no es relevante, pero sí lo es el signo relativo respecto a los otros diagramas. Al tratar con fermiones hay que

a. Agregar un (-1) por cada loop fermiónico en el diagrama;

Reglas de Feynman

La relación entre la amplitud de scattering y los diagramas es finalmente

$$i\mathcal{M}\,(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_{\text{patas salientes}} p_i - \sum_{\text{patas entrantes}} p_i\right) = \begin{array}{c}\text{suma de contribuciones de los}\\ \text{diagramas conectados.}\end{array}$$

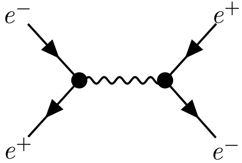
Importante: El signo que lleve cada diagrama por sí sólo no es relevante, pero sí lo es el signo relativo respecto a los otros diagramas. Al tratar con fermiones hay que

a. Agregar un (-1) por cada loop fermiónico en el diagrama;
b. Incluir un signo relativo en cada diagrama que difiera de otro sólo por el intercambio de
   - Dos electrones entrantes;
   - Dos electrones salientes;
   - Dos positrones entrantes;
   - Dos positrones salientes;
   - Un electrón entrante por un positrón saliente;
   - Un positrón entrante por un electrón saliente;

(Práctica 6, Ejercicio 73(a))*Usando las reglas anteriores hallar la amplitud de scattering para el siguiente proceso (scattering de Bhabha) al orden más bajo no trivial, dibujando los diagramas de Feynman que contribuyen al proceso* $e^+e^- \to e^+e^-$

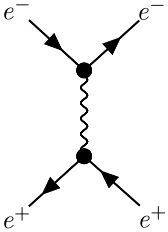
(Práctica 6, Ejercicio 73(a))*Usando las reglas anteriores hallar la amplitud de scattering para el siguiente proceso (scattering de Bhabha) al orden más bajo no trivial, dibujando los diagramas de Feynman que contribuyen al proceso* $e^+e^- \to e^+e^-$

Necesitamos tener cuatro patas externas, y como estamos considerando diagramas conectados, debe haber al menos dos vértices (que dan cuatro patas fermiónicas). Uno de los diagramas posibles es entonces

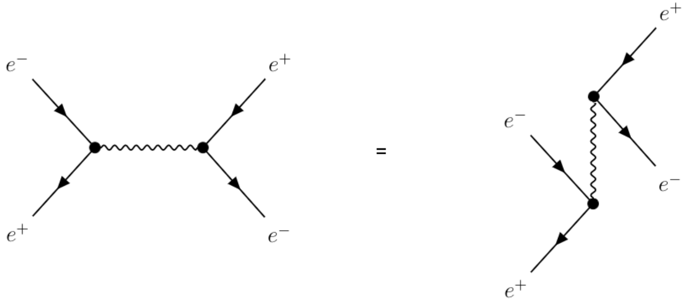


Scattering de Bhabha

Pero noten que también tenemos este otro diagrama que contribuye al mismo orden en e (ya que tiene dos vértices de interacción).



Este segundo diagrama se puede obtener a partir del primero intercambiando la línea que representa al positrón final con la del electrón inicial, ya que, como se puede ver en el siguiente dibujo, el primer diagrama es equivalente a



y por lo tanto su contribución tendrá un signo de diferencia con la del primer diagrama.

Scattering de Bhabha

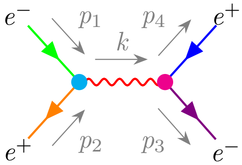
Llamamos Ξ_1 y Ξ_2 a las contribuciones de los dos diagramas anteriores, de modo que

$$i\mathcal{M}\,(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_{\text{patas salientes}} p_i - \sum_{\text{patas entrantes}} p_i\right) = \Xi_1 + \Xi_2\,,\ \ \text{a orden}\ e^2\,. \tag{1}$$

Llamamos Ξ_1 y Ξ_2 a las contribuciones de los dos diagramas anteriores, de modo que

$$i\mathcal{M}\,(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_{\text{patas salientes}} p_i - \sum_{\text{patas entrantes}} p_i\right) = \Xi_1 + \Xi_2\,, \quad \text{a orden } e^2\,. \tag{1}$$

Vamos a calcular estas contribuciones, pero primero analicemos un poco el primer diagrama para estar seguros de que entendemos cuáles son sus componentes básicos. En dicho diagrama tenemos dos vértices de interacción (marcados en cyan y magenta en el siguiente dibujo), cuatro patas externas (naranja, verde, morado y azul) y un propagador del fotón (rojo).



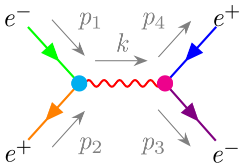
Llamamos Ξ_1 y Ξ_2 a las contribuciones de los dos diagramas anteriores, de modo que

$$i\mathcal{M}\,(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_{\text{patas salientes}} p_i - \sum_{\text{patas entrantes}} p_i\right) = \Xi_1 + \Xi_2\,,\ \ \text{a orden } e^2\,. \tag{2}$$

Llamamos Ξ_1 y Ξ_2 a las contribuciones de los dos diagramas anteriores, de modo que

$$i\mathcal{M}\,(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_{\text{patas salientes}} p_i - \sum_{\text{patas entrantes}} p_i\right) = \Xi_1 + \Xi_2\,, \quad \text{a orden } e^2\,. \tag{2}$$

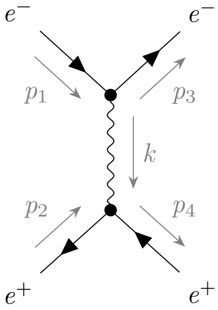
Tenemos dos vértices de interacción (marcados en cyan y magenta en el siguiente dibujo), cuatro patas externas (naranja, verde, morado y azul) y un propagador del fotón (rojo).



Usando las reglas de Feynman podemos escribir la contribución del primer diagrama

$$
\begin{aligned}
\Xi_1 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[(2\pi)^4\delta^4(k-p_1-p_2)\right]\left[(2\pi)^4\delta^4(p_3+p_4-k)\right]\times & (3)\\
&\times\ \bar{\boldsymbol{v}}^{s_2}(\boldsymbol{p}_2)[-\boldsymbol{ie}\boldsymbol{\gamma}^{\mu}]\boldsymbol{u}^{s_1}(\boldsymbol{p}_1)\left(\frac{-\boldsymbol{ig}_{\mu\nu}}{\boldsymbol{k}^2+\boldsymbol{i\varepsilon}}\right)\bar{\boldsymbol{u}}^{s_3}(\boldsymbol{p}_3)[-\boldsymbol{ie}\boldsymbol{\gamma}^{\nu}]\boldsymbol{v}^{s_4}(\boldsymbol{p}_4) = & (4)\\
&= (2\pi)^4 ie^2\,\frac{\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^{\mu}u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_{\mu}v^{s_4}(p_4)\right]}{(p_1+p_2)^2+i\varepsilon}\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)\,. & (5)
\end{aligned}
$$

Vamos ahora al segundo diagrama



Usando las reglas de Feynman se obtiene (recuerden escribir las contribuciones de los fermiones siguiendo el sentido opuesto de las líneas fermiónicas y agregar un (-1) por el signo de diferencia que debe llevar con respecto al primer diagrama)

$$\begin{aligned}
\Xi_2 &= -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[(2\pi)^4\delta^4(k+p_3-p_1)\right]\left[(2\pi)^4\delta^4(p_4-k-p_2)\right]\times && (6)\\
&\times\ \bar{u}^{s_3}(p_3)\left[-ie\gamma^\mu\right]u^{s_1}(p_1)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}\right)\bar{v}^{s_2}(p_2)\left[-ie\gamma^\nu\right]v^{s_4}(p_4) = && (7)\\
&= -(2\pi)^4 ie^2\frac{\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)\right]}{(p_1-p_3)^2+i\varepsilon}\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)\,. && (8)
\end{aligned}$$

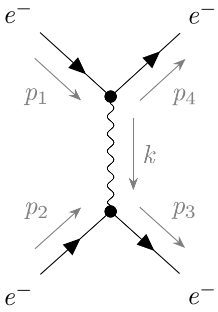
Mirando ahora la ecuación (2), sacamos entonces que la amplitud de scattering $\mathcal{M}$ del proceso de scattering de Bhabha a orden e^2 está dada por

$$\mathcal{M} = e^2 \left\{ \frac{\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^{\mu} u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_{\mu} v^{s_4}(p_4)\right]}{(p_1+p_2)^2} - \frac{\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma^{\mu} u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma_{\mu} v^{s_4}(p_4)\right]}{(p_1-p_3)^2} \right\} \quad (9)$$

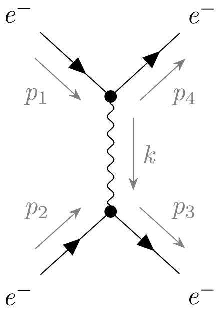
(Práctica 6, Ejercicio 73(b)) *Usando las reglas de Feynman hallar la amplitud de scattering para el siguiente proceso (scattering de Møller) al orden más bajo no trivial, dibujando los diagramas de Feynman que contribuyen al proceso* $e^- e^- \to e^- e^-$

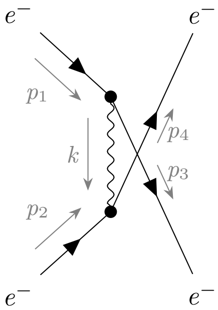
Scattering de Møller

(Práctica 6, Ejercicio 73(b))*Usando las reglas de Feynman hallar la amplitud de scattering para el siguiente proceso (scattering de Møller) al orden más bajo no trivial, dibujando los diagramas de Feynman que contribuyen al proceso* $e^- e^- \to e^- e^-$



(Práctica 6, Ejercicio 73(b))*Usando las reglas de Feynman hallar la amplitud de scattering para el siguiente proceso (scattering de Møller) al orden más bajo no trivial, dibujando los diagramas de Feynman que contribuyen al proceso* $e^- e^- \to e^- e^-$





Escribimos nuevamente las contribuciones de estos dos diagramas a la amplitud como lo hicimos en la ecuación (2). La contribución del primer diagrama es

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[(2\pi)^4 \delta^4(k + p_4 - p_1)\right] \left[(2\pi)^4 \delta^4(p_3 - k - p_2)\right] \times \\ &\times \quad \bar{u}^{s_4}(p_4) \left[-ie\gamma^\mu\right] u^{s_1}(p_1) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}\right) \bar{u}^{s_3}(p_3) \left[-ie\gamma^\nu\right] u^{s_2}(p_2) \\ &= (2\pi)^4 ie^2 \frac{\left[\bar{u}^{s_4}(p_4)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)\right] \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu u^{s_2}(p_2)\right]}{(p_1 - p_4)^2 + i\varepsilon} \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \,. \end{aligned} \tag{10}$$

Escribimos nuevamente las contribuciones de estos dos diagramas a la amplitud como lo hicimos en la ecuación (2). La contribución del primer diagrama es

$$\begin{aligned}\Xi_1 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[(2\pi)^4\delta^4(k+p_4-p_1)\right]\left[(2\pi)^4\delta^4(p_3-k-p_2)\right]\times \\ &\times\ \bar{u}^{s_4}(p_4)\left[-ie\gamma^\mu\right]u^{s_1}(p_1)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}\right)\bar{u}^{s_3}(p_3)\left[-ie\gamma^\nu\right]u^{s_2}(p_2) \\ &= (2\pi)^4 ie^2\frac{\left[\bar{u}^{s_4}(p_4)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu u^{s_2}(p_2)\right]}{(p_1-p_4)^2+i\varepsilon}\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)\,. \qquad (10)\end{aligned}$$

mientras que la del segundo es igual pero cambiando $p_3 \leftrightarrow p_4$, $s_3 \leftrightarrow s_4$ y agregando un signo global porque difiere del anterior en el intercambio de dos electrones salientes

$$\Xi_2 = -(2\pi)^4 ie^2\frac{\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{s_4}(p_4)\gamma_\mu u^{s_2}(p_2)\right]}{(p_1-p_3)^2+i\varepsilon}\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)\,. \qquad (11)$$

Scattering de Møller

Por lo tanto, la amplitud de scattering $\mathcal{M}$ del proceso de scattering de Møller a orden e^2 está dada por

$$\mathcal{M} = e^2 \left\{ \frac{\left[\bar{u}^{s_4}(p_4)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu u^{s_2}(p_2)\right]}{(p_1 - p_4)^2} - \frac{\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{s_4}(p_4)\gamma_\mu u^{s_2}(p_2)\right]}{(p_1 - p_3)^2} \right\}. \quad (12)$$

(Práctica 6, Ejercicio 71)*¿Por qué motivo en la electrodinámica cuántica no es posible el proceso en el que un electrón y un positrón se aniquilan dando lugar a un solo fotón?*

Aniquilación de pares

(Práctica 6, Ejercicio 71)*¿Por qué motivo en la electrodinámica cuántica no es posible el proceso en el que un electrón y un positrón se aniquilan dando lugar a un solo fotón?*

Por la interacción que aparece en QED entre fotón y fermiones, es natural empezar estudiando el proceso en el cual los fermiones se aniquilan entre sí para dar un fotón. Sin embargo, utilizando argumentos sencillos es posible ver que dicho proceso no puede ocurrir en la naturaleza. Como el electrón y el positrón tienen masa no nula, siempre es posible encontrar un sistema de referencia inercial para el cual el centro de masa del sistema esté en reposo. En ese sistema, el momento total entonces es nulo. Como en el proceso de aniquilación se debería conservar el momento, esto implicaría que en ese sistema de referencia el fotón debería estar en reposo. Pero como el fotón no tiene masa se mueve a la velocidad de la luz en cualquier sistema inercial. Este proceso entonces no puede ocurrir en la naturaleza.

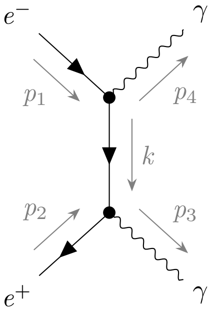
Aniquilación de pares

(Práctica 6, Ejercicio 73(c)) *Usando las reglas de Feynman hallar la amplitud de scattering para el proceso de aniquilación de pares al orden más bajo no trivial, dibujando los diagramas de Feynman que contribuyen al proceso.*

Aniquilación de pares

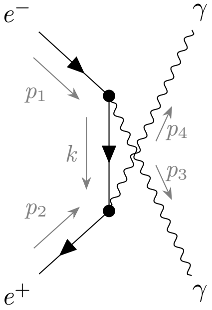
(Práctica 6, Ejercicio 73(c)) *Usando las reglas de Feynman hallar la amplitud de scattering para el proceso de aniquilación de pares al orden más bajo no trivial, dibujando los diagramas de Feynman que contribuyen al proceso.*

Como el proceso tiene dos fotones al final y cada vértice tiene una pata de fotón, necesitaremos al menos dos vértices. Con dos vértices es posible armarse el siguiente diagrama



Aniquilación de pares

Recuerden que, nuevamente, como las partículas al final del proceso son idénticas (dos fotones) tenemos que agregar el siguiente diagrama



Al calcular las contribuciones, las diferencias principales con los diagramas de los dos ejercicios anteriores es que ahora van a aparecer dos patas externas de fotones y un propagador del fermión. Teniendo esto en cuenta, y volviendo a escribir la contribución total como una suma de la de cada diagrama (ecuación (2)), la contribución del primer diagrama es

$$\begin{aligned}
\Xi_1 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[(2\pi)^4 \delta^4(k+p_4-p_1)\right] \left[(2\pi)^4 \delta^4(p_3-k-p_2)\right] \times \\
&\times \quad \bar{v}^{s_2}(p_2)\,[-ie\gamma^\mu]\,\frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2+i\varepsilon}\,[-ie\gamma^\nu]\,u^{s_1}(p_1)\epsilon_\mu(p_3)^*\epsilon_\nu(p_4)^* \\
&= - \quad (2\pi)^4 ie^2 \bar{v}^{s_2}(p_2)\frac{\gamma^\mu(\not{p}_1-\not{p}_4+m)\gamma^\nu}{(p_1-p_4)^2-m^2+i\varepsilon} u^{s_1}(p_1)\epsilon_\mu(p_3)^*\epsilon_\nu(p_4)^*\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)\,,
\end{aligned}$$

y la del segundo es la misma expresión pero cambiando $p_3 \leftrightarrow p_4$.

Entonces, la amplitud de scattering $\mathcal{M}$ del proceso de aniquilación de pares a orden e^2 está dada por

$$\mathcal{M} = -e^2 \bar{v}^{s_2}(p_2) \left\{ \frac{\gamma^\mu (\not{p}_1 - \not{p}_4 + m)\gamma^\nu}{(p_1 - p_4)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu (\not{p}_1 - \not{p}_3 + m)\gamma^\mu}{(p_1 - p_3)^2 - m^2} \right\} u^{s_1}(p_1)\epsilon_\mu(p_3)^* \epsilon_\nu(p_4)^* \,. \quad (13)$$

(Práctica 7, Ejercicio 75) *Para el cálculo posterior de la sección eficaz, es util aislar una cantidad invariante de Lorentz de la expresion de la matriz de Scatering, aislando factores dependientes del momento de las particulas iniciales y finales. Si* S *es la matriz de Scatering y* S_{fi} *su elemento de matriz para estados iniciales y finales* i *y* f*, la cantidad* M_{fi} *se define a partir de:*

$$(S-1)_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - k_i) M_{fi} \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_j}}$$

(Práctica 7, Ejercicio 75) *Para el cálculo posterior de la sección eficaz, es util aislar una cantidad invariante de Lorentz de la expresion de la matriz de Scatering, aislando factores dependientes del momento de las particulas iniciales y finales. Si* S *es la matriz de Scatering y* S_{fi} *su elemento de matriz para estados iniciales y finales* i *y* f*, la cantidad* M_{fi} *se define a partir de:*

$$(S-1)_{fi} = i(2\pi)^4\delta^4(p_f - k_i)M_{fi}\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_j}}$$

siendo N *el numero total de particulas. Se asumio aquí que todas las particulas son bosonicas. (Debe agregarse factores* $2m_i$ *por cada partícula asociada a un campo de Dirac masivo).*

(Práctica 7, Ejercicio 75) *Para el cálculo posterior de la sección eficaz, es util aislar una cantidad invariante de Lorentz de la expresion de la matriz de Scatering, aislando factores dependientes del momento de las particulas iniciales y finales. Si S es la matriz de Scatering y S_{fi} su elemento de matriz para estados iniciales y finales i y f, la cantidad M_{fi} se define a partir de:*

$$(S-1)_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - k_i) M_{fi} \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_j}}$$

siendo N el numero total de particulas. Se asumio aquí que todas las particulas son bosonicas. (Debe agregarse factores $2m_i$ por cada partícula asociada a un campo de Dirac masivo).

Una transformación de Lorentz tiene el siguiente efecto sobre los operadores de destrucción

$$U^\dagger(\Lambda) a_{\mathbf{p}} U(\Lambda) = \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{p}}}} a_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}} \tag{14}$$

Una transformación de Lorentz tiene el siguiente efecto sobre los operadores de destrucción

$$U^\dagger(\Lambda) a_{\mathbf{p}} U(\Lambda) = \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{p}}}} a_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}} \tag{14}$$

con lo cual el estado transforma como

$$|\mathbf{p}\rangle = a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \to U^\dagger(\Lambda) a_{\mathbf{p}}^\dagger U(\Lambda)|0\rangle = \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{p}}}} a_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{p}}}} |\Lambda^{-1}\mathbf{p}\rangle. \tag{15}$$

Variables de Mandelstam

Eso se podía ver de la siguiente manera

$$\hat{\phi}(\Lambda x^{\mu} + a^{\mu}) = U^{\dagger}(\Lambda, a)\,\hat{\phi}(x^{\mu})\,U(\Lambda, a) \tag{16}$$

Eso se podía ver de la siguiente manera

$$\hat{\phi}(\Lambda x^{\mu} + a^{\mu}) = U^{\dagger}\left(\Lambda, a\right)\hat{\phi}(x^{\mu})\,U\left(\Lambda, a\right) \tag{16}$$

$$\int_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}\, e^{-ip(\Lambda x + a)} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\, e^{ip(\Lambda x + a)} = \int_{\mathbf{p}} U^{\dagger}\left(\Lambda, a\right)\hat{a}_{\mathbf{p}}\, U\left(\Lambda, a\right) e^{-ipx} + U^{\dagger}\left(\Lambda, a\right)\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\, U\left(\Lambda, a\right) e^{ipx} \tag{17}$$

Eso se podía ver de la siguiente manera

$$\hat{\phi}(\Lambda x^{\mu} + a^{\mu}) = U^{\dagger}(\Lambda, a)\,\hat{\phi}(x^{\mu})\,U(\Lambda, a) \tag{16}$$

$$\int_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}\, e^{-ip(\Lambda x + a)} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\, e^{ip(\Lambda x + a)} = \int_{\mathbf{p}} U^{\dagger}(\Lambda, a)\,\hat{a}_{\mathbf{p}}\,U(\Lambda, a)\,e^{-ipx} + U^{\dagger}(\Lambda, a)\,\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\,U(\Lambda, a)\,e^{ipx} \tag{17}$$

y haciendo el cambio de variable $\Lambda p = \tilde{p}$ tenemos

$$\int \left[\hat{a}_{\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{p}}}\, e^{i\tilde{p}x}\, e^{-i\Lambda^{-1}\tilde{p}a} + \hat{a}^{\dagger}_{\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{p}}}\, e^{-i\tilde{p}x}\, e^{i\Lambda^{-1}\tilde{p}a}\right] \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}\, \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3 2\omega_{\tilde{\mathbf{p}}}}$$

Eso se podía ver de la siguiente manera

$$\hat{\phi}(\Lambda x^{\mu} + a^{\mu}) = U^{\dagger}(\Lambda, a)\, \hat{\phi}(x^{\mu})\, U(\Lambda, a) \tag{16}$$

$$\int_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}\, e^{-ip(\Lambda x + a)} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\, e^{ip(\Lambda x + a)} = \int_{\mathbf{p}} U^{\dagger}(\Lambda, a)\, \hat{a}_{\mathbf{p}}\, U(\Lambda, a)\, e^{-ipx} + U^{\dagger}(\Lambda, a)\, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\, U(\Lambda, a)\, e^{ipx} \tag{17}$$

y haciendo el cambio de variable $\Lambda p = \tilde{p}$ tenemos

$$\int \left[\hat{a}_{\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{p}}}\, e^{i\tilde{p}x} e^{-i\Lambda^{-1}\tilde{p}a} + \hat{a}^{\dagger}_{\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{p}}}\, e^{-i\tilde{p}x} e^{i\Lambda^{-1}\tilde{p}a} \right] \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3 2\omega_{\tilde{\mathbf{p}}}}$$

$$= \int \left[U^{\dagger}(\Lambda, a)\, \hat{a}_{\mathbf{p}}\, U(\Lambda, a)\, e^{-ipx} + U^{\dagger}(\Lambda, a)\, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\, U(\Lambda, a)\, e^{ipx} \right] \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \tag{18}$$

Eso se podía ver de la siguiente manera

$$\hat{\phi}(\Lambda x^\mu + a^\mu) = U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{\phi}(x^\mu)\,U(\Lambda, a) \tag{16}$$

$$\int_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}\, e^{-ip(\Lambda x + a)} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\, e^{ip(\Lambda x + a)} = \int_{\mathbf{p}} U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{a}_{\mathbf{p}}\,U(\Lambda, a)\,e^{-ipx} + U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\,U(\Lambda, a)\,e^{ipx} \tag{17}$$

y haciendo el cambio de variable $\Lambda p = \tilde{p}$ tenemos

$$\int \left[\hat{a}_{\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{p}}}\, e^{i\tilde{p}x} e^{-i\Lambda^{-1}\tilde{p}a} + \hat{a}^\dagger_{\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{p}}}\, e^{-i\tilde{p}x} e^{i\Lambda^{-1}\tilde{p}a}\right] \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}\, \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3 2\omega_{\tilde{\mathbf{p}}}}$$

$$= \int \left[U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{a}_{\mathbf{p}}\,U(\Lambda, a)\,e^{-ipx} + U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\,U(\Lambda, a)\,e^{ipx}\right] \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}\, \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \tag{18}$$

(usamos la invariancia de la medida de integración) y podemos concluir que

$$U^\dagger(\Lambda, a)\,\hat{a}_{\mathbf{p}}\,U(\Lambda, a) = \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{p}}}}\,\hat{a}_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}}\, e^{-i(\Lambda^{-1}p)a}. \tag{19}$$

Mientras que para una teoría invariante relativista la matriz de Scattering transforma como

$$S \to U^\dagger(\Lambda) S U(\Lambda) = U^\dagger(\Lambda) \exp\left(-i \int d^4 z \mathcal{H}_I(z)\right) U(\Lambda) \tag{20}$$

$$= \exp\left(-i \int d^4 z U^\dagger(\Lambda) \mathcal{H}_I(z) U(\Lambda)\right) = \exp\left(-i \int d^4 z \mathcal{H}_I(\Lambda z)\right) \tag{21}$$

$$= \exp\left(-i \int d^4 z \mathcal{H}_I(z)\right) = S, \tag{22}$$

es decir, que la matriz de Scattering es invariante

Mientras que para una teoría invariante relativista la matriz de Scattering transforma como

$$S \to U^\dagger(\Lambda) S U(\Lambda) = U^\dagger(\Lambda) \exp\left(-i\int d^4z \mathcal{H}_I(z)\right) U(\Lambda) \tag{20}$$

$$= \exp\left(-i\int d^4z U^\dagger(\Lambda)\mathcal{H}_I(z) U(\Lambda)\right) = \exp\left(-i\int d^4z \mathcal{H}_I(\Lambda z)\right) \tag{21}$$

$$= \exp\left(-i\int d^4z \mathcal{H}_I(z)\right) = S, \tag{22}$$

es decir, que la matriz de Scattering es invariante . Usando estas dos relaciones tenemos que

$$\langle \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_m \rangle \tag{23}$$

$$\to \langle \Lambda^{-1}\mathbf{p}_1, ..., \Lambda^{-1}\mathbf{p}_n | U^\dagger(\Lambda) S U(\Lambda) | \Lambda^{-1}\mathbf{k}_1, ..., \Lambda^{-1}\mathbf{k}_m \rangle \left(\Pi_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}_j}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}_j}}}\right) \left(\Pi_{i=1}^{m} \frac{\sqrt{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{k}_i}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}_i}}}\right) \tag{24}$$

$$\to \langle \Lambda^{-1}\mathbf{p}_1, ..., \Lambda^{-1}\mathbf{p}_n | S | \Lambda^{-1}\mathbf{k}_1, ..., \Lambda^{-1}\mathbf{k}_m \rangle \left(\Pi_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}_j}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}_j}}}\right) \left(\Pi_{i=1}^{m} \frac{\sqrt{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{k}_i}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}_i}}}\right) \tag{25}$$

Variables de Mandelstam

Esto nos permite ver cómo transforma la matriz invariante

$$i(2\pi)^4\delta(\sum_j p_j - \sum_i k_i)\mathcal{M} = \left(\Pi_{j=1}^{n}(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_j}}\right)\left(\Pi_{i=1}^{m}(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}}\right)\langle \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_n | iT | \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_m\rangle \tag{26}$$

Esto nos permite ver cómo transforma la matriz invariante

$$i(2\pi)^4\delta(\sum_j p_j - \sum_i k_i)\mathcal{M} = \left(\Pi_{j=1}^{n}(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_j}}\right)\left(\Pi_{i=1}^{m}(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}}\right)\langle \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_n | iT | \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_m \rangle \tag{26}$$

$$= \left(\Pi_{j=1}^{n}(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_j}}\right)\left(\Pi_{i=1}^{m}(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}}\right)\langle \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_n | S - 1 | \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_m \rangle \tag{27}$$

Esto nos permite ver cómo transforma la matriz invariante

$$i(2\pi)^4\delta(\sum_j p_j - \sum_i k_i)\mathcal{M} = \left(\Pi_{j=1}^n (2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_j}}\right)\left(\Pi_{i=1}^m (2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}}\right)\langle \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_n | iT | \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_m\rangle \tag{26}$$

$$= \left(\Pi_{j=1}^n (2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_j}}\right)\left(\Pi_{i=1}^m (2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}}\right)\langle \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_n | S-1 | \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_m\rangle \tag{27}$$

$$\to \left(\Pi_{j=1}^n (2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_j}}\right)\left(\Pi_{i=1}^m (2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}}\right)\langle \Lambda^{-1}\mathbf{p}_1, ..., \Lambda^{-1}\mathbf{p}_n | S-1 | \Lambda^{-1}\mathbf{k}_1, ..., \Lambda^{-1}\mathbf{k}_m\rangle \tag{28}$$

$$\times \left(\Pi_{j=1}^n \frac{\sqrt{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}_j}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}_j}}}\right)\left(\Pi_{i=1}^m \frac{\sqrt{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{k}_i}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}_i}}}\right)$$

Esto nos permite ver cómo transforma la matriz invariante

$$i(2\pi)^4\delta(\sum_j p_j - \sum_i k_i)\mathcal{M} = \left(\Pi_{j=1}^{n}(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_j}}\right)\left(\Pi_{i=1}^{m}(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}}\right)\langle \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_n | iT | \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_m\rangle \tag{26}$$

$$= \left(\Pi_{j=1}^{n}(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_j}}\right)\left(\Pi_{i=1}^{m}(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}}\right)\langle \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_n | S-1 | \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_m\rangle \tag{27}$$

$$\to \left(\Pi_{j=1}^{n}(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_j}}\right)\left(\Pi_{i=1}^{m}(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}}\right)\langle \Lambda^{-1}\mathbf{p}_1, ..., \Lambda^{-1}\mathbf{p}_n | S-1 | \Lambda^{-1}\mathbf{k}_1, ..., \Lambda^{-1}\mathbf{k}_m\rangle \tag{28}$$

$$\times \left(\Pi_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{p}_j}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}_j}}}\right)\left(\Pi_{i=1}^{m}\frac{\sqrt{\omega_{\Lambda^{-1}\mathbf{k}_i}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}_i}}}\right)$$

$$= i(2\pi)^4\delta(\sum_j \Lambda^{-1}p_j - \sum_i \Lambda^{-1}k_i)\mathcal{M} = i(2\pi)^4\delta(\sum_j p_j - \sum_i k_i)\mathcal{M}. \tag{29}$$

Esto prueba que $\mathcal{M}$ es invariante de Lorentz.

Variables de Mandelstam

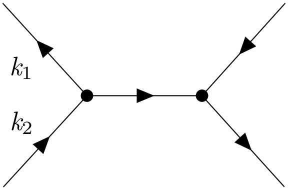
Verifique que en los casos de la guía anterior esta cantidad es invariante de Lorentz y que en esos casos (procesos del tipo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$) puede escribirse en términos de las variables de Mandelstan, invariantes de Lorentz:

$$
\begin{aligned}
s &= (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 \\
t &= (k_1 - p_1)^2 = (k_2 - p_2)^2 \\
u &= (k_1 - p_2)^2 = (k_2 - p_1)^2
\end{aligned}
$$

Variables de Mandelstam

Yendo a las variables de Mandelstam, notemos que resultan convenientes para expresar las amplitudes de scattering, por ejemplo, para la teoría de $\lambda\phi^3/3!$ tenemos

canal s:

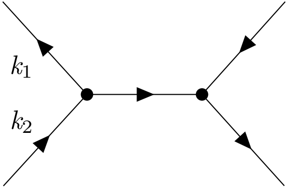


$$\mathcal{M} \propto \frac{1}{(k_1+k_2)^2 - m^2} = \frac{1}{s - m^2} \tag{30}$$

Variables de Mandelstam

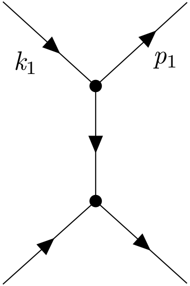
Yendo a las variables de Mandelstam, notemos que resultan convenientes para expresar las amplitudes de scattering, por ejemplo, para la teoría de $\lambda\phi^3/3!$ tenemos

canal s:



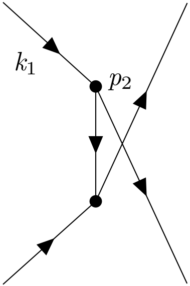
$$\mathcal{M} \propto \frac{1}{(k_1+k_2)^2 - m^2} = \frac{1}{s - m^2} \tag{30}$$

canal t:



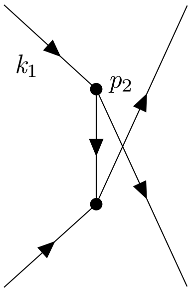
$$\mathcal{M} \propto \frac{1}{(k_1-p_1)^2 - m^2} = \frac{1}{t - m^2} \tag{31}$$

canal u:



$$\mathcal{M} \propto \frac{1}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} = \frac{1}{u - m^2} \tag{32}$$

canal u:

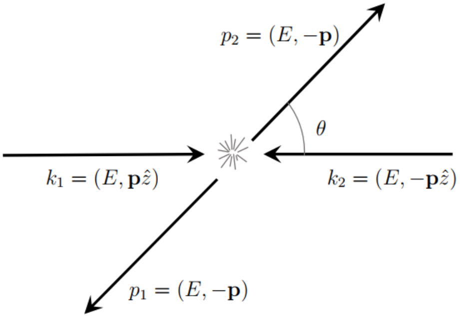


$$\mathcal{M} \propto \frac{1}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} = \frac{1}{u - m^2} \tag{32}$$

Noten además que en todos los casos $\mathcal{M}$ depende de las normas de los cuadrivectores lo que confirma explícitamente que su invariancia de Lorentz.

Variables de Mandelstam

Para entender mejor qué representan físicamente estas variables consideremos el caso de dos partículas con cuadrimomentos k_1 y k_2 que colisionan dando lugar a otras dos partículas con cuadrimomentos p_1 y p_2. Además simplifiquemoslo aún mas asumiendo que todas las partículas tienen la misma masa



Variables de Mandelstam

Entonces tenemos

$$s = (k_1 + k_2)^2 = (2E)^2 = E_{\mathsf{cm}}^2$$

Variables de Mandelstam

Entonces tenemos

$$s = (k_1 + k_2)^2 = (2E)^2 = E_{\mathsf{cm}}^2$$

$$t = (k_1 - p_1)^2 = (E - E)^2 - |k_{1x} - p_{1x}|^2 - |k_{1z} - p_{1z}|^2$$

Variables de Mandelstam

Entonces tenemos

$$s = (k_1 + k_2)^2 = (2E)^2 = E_{\mathsf{cm}}^2$$

$$t = (k_1 - p_1)^2 = (E - E)^2 - |k_{1x} - p_{1x}|^2 - |k_{1z} - p_{1z}|^2$$

$$= -|\mathbf{p}|^2 \sin^2\theta - (|\mathbf{p}| - |\mathbf{p}|\cos\theta)^2 = -2|\mathbf{p}|^2(1 - \cos\theta)$$

Variables de Mandelstam

Entonces tenemos

$$s = (k_1 + k_2)^2 = (2E)^2 = E_{\mathsf{cm}}^2$$

$$t = (k_1 - p_1)^2 = (E - E)^2 - |k_{1x} - p_{1x}|^2 - |k_{1z} - p_{1z}|^2$$

$$= -|\mathbf{p}|^2 \sin^2\theta - (|\mathbf{p}| - |\mathbf{p}|\cos\theta)^2 = -2|\mathbf{p}|^2(1 - \cos\theta)$$

$$u = (k_1 - p_2)^2 = -|\mathbf{p}|^2 \sin^2\theta - |\mathbf{p}|^2(1 + \cos\theta)^2 = -2|\mathbf{p}|^2(1 + \cos\theta)$$

Variables de Mandelstam

Entonces tenemos

$$s = (k_1 + k_2)^2 = (2E)^2 = E_{\mathsf{cm}}^2$$

$$t = (k_1 - p_1)^2 = (E - E)^2 - |k_{1x} - p_{1x}|^2 - |k_{1z} - p_{1z}|^2$$

$$= -|\mathbf{p}|^2 \sin^2\theta - (|\mathbf{p}| - |\mathbf{p}|\cos\theta)^2 = -2|\mathbf{p}|^2(1 - \cos\theta)$$

$$u = (k_1 - p_2)^2 = -|\mathbf{p}|^2 \sin^2\theta - |\mathbf{p}|^2(1 + \cos\theta)^2 = -2|\mathbf{p}|^2(1 + \cos\theta)$$

De esto podemos concluir que, para la teoría $\lambda\phi^3/3!$ y en el sistema centro de masa, los procesos que ocurren por el canal s producen partículas con probabilidad uniforme en todas direcciones; mientras que los que ocurren por el canal t o u producen más partículas en la dirección de la colisión ($\theta = 0, \pi$).

Variables de Mandelstam

Otra propiedad útil de las variables de Mandelstam es que si expandimos

$$s = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \tag{33}$$

Variables de Mandelstam

Otra propiedad útil de las variables de Mandelstam es que si expandimos

$$s = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2 \tag{33}$$

$$t = k_1^2 + p_1^2 - 2k_1p_1 \tag{34}$$

Variables de Mandelstam

Otra propiedad útil de las variables de Mandelstam es que si expandimos

$$s = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \tag{33}$$

$$t = k_1^2 + p_1^2 - 2k_1 p_1 \tag{34}$$

$$u = k_1^2 + p_2^2 - 2k_1 p_2, \tag{35}$$

Otra propiedad útil de las variables de Mandelstam es que si expandimos

$$s = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2 \tag{33}$$

$$t = k_1^2 + p_1^2 - 2k_1p_1 \tag{34}$$

$$u = k_1^2 + p_2^2 - 2k_1p_2, \tag{35}$$

podemos ver que

$$\begin{aligned} s + t + u &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2k_1^2 + 2k_1k_2 - 2k_1p_1 - 2k_1p_2 && (36) \\ &= \sum_{i=1}^{4} m_i^2 + 2k_1(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) && (37) \\ &= \sum_{i=1}^{4} m_i^2, && (38) \end{aligned}$$

donde para la última igualdad usamos la conservación del momento.

Amplitudes de scattering en QED

Calculamos las amplitudes para

- El scattering de Bhabha

$$\mathcal{M} = e^2 \left\{ \frac{[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)]\,[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)]}{(p_1+p_2)^2} - \frac{[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)]\,[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)]}{(p_1-p_3)^2} \right\}$$

Amplitudes de scattering en QED

Calculamos las amplitudes para

- El scattering de Bhabha

$$\mathcal{M} = e^2 \left\{ \frac{[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)]\,[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)]}{(p_1+p_2)^2} - \frac{[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)]\,[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)]}{(p_1-p_3)^2} \right\}$$

- El scattering de Møller

$$\mathcal{M} = e^2 \left\{ \frac{[\bar{u}^{s_4}(p_4)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)]\,[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu u^{s_2}(p_2)]}{(p_1-p_4)^2} - \frac{[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)]\,[\bar{u}^{s_4}(p_4)\gamma_\mu u^{s_2}(p_2)]}{(p_1-p_3)^2} \right\}$$

Amplitudes de scattering en QED

Calculamos las amplitudes para

- El scattering de Bhabha

$$\mathcal{M} = e^2 \left\{ \frac{[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)]\,[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)]}{(p_1+p_2)^2} - \frac{[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)]\,[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)]}{(p_1-p_3)^2} \right\}$$

- El scattering de Møller

$$\mathcal{M} = e^2 \left\{ \frac{[\bar{u}^{s_4}(p_4)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)]\,[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu u^{s_2}(p_2)]}{(p_1-p_4)^2} - \frac{[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)]\,[\bar{u}^{s_4}(p_4)\gamma_\mu u^{s_2}(p_2)]}{(p_1-p_3)^2} \right\}$$

- La aniquilación de pares

$$\mathcal{M} = -e^2 \bar{v}^{s_2}(p_2) \left\{ \frac{\gamma^\mu(\not{p}_1 - \not{p}_4 + m)\gamma^\nu}{(p_1-p_4)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu(\not{p}_1 - \not{p}_3 + m)\gamma^\mu}{(p_1-p_3)^2 - m^2} \right\} u^{s_1}(p_1)\epsilon_\mu(p_3)^*\epsilon_\nu(p_4)^* \,.$$