# Campos - Práctica

Sección eficaz.

Veamos cómo obtener la sección eficaz a partir de la amplitud de scattering. Para ello tendremos en cuenta que los estados iniciales no tienen un momento perfectamente definido sino que están dados por

$$|i\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}}} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}}} f(\mathbf{k}_1) g(\mathbf{k}_2) |k_1, k_2\rangle, \tag{1}$$

siendo $f$ y $g$ distribuciones con picos en $p_1$ y $p_2$ respectivamente; mientras que el estado final viene dado por

$$|f\rangle = |p_1', p_2'\rangle. \tag{2}$$

# Sección eficaz

Entonces la amplitud de transición viene dada por (siendo $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} = \int_{\mathbf{k}}$)

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}}} f(\mathbf{k}_1) g(\mathbf{k}_2) \langle p_1' p_2' | S - 1 | k_1, k_2 \rangle \tag{3}$$

Entonces la amplitud de transición viene dada por (siendo $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} = \int_{\mathbf{k}}$)

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}}} f(\mathbf{k}_1)g(\mathbf{k}_2)\langle p_1' p_2' | S - 1 | k_1, k_2\rangle \tag{3}$$

$$= (2\pi)^4 i \int d^3\mathbf{k}_1 \int d^3\mathbf{k}_2 f(\mathbf{k}_1)g(\mathbf{k}_2)\delta(p_1' + p_2' - k_1 - k_2)\mathcal{M}(p_1', p_2', k_1, k_2)$$
$$\times \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}}}\right)\left(\Pi_{j=1}^{2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'_j}}}\right) \tag{4}$$

# Sección eficaz

Entonces la amplitud de transición viene dada por (siendo $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} = \int_{\mathbf{k}}$)

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}}} f(\mathbf{k}_1)g(\mathbf{k}_2)\langle p_1' p_2' | S-1 | k_1, k_2\rangle \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &= (2\pi)^4 i \int d^3\mathbf{k}_1 \int d^3\mathbf{k}_2 f(\mathbf{k}_1)g(\mathbf{k}_2)\delta(p_1'+p_2'-k_1-k_2)\mathcal{M}(p_1',p_2',k_1,k_2) \\ &\qquad \times \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}}}\right)\left(\Pi_{j=1}^2 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p'}_j}}}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

mientras que la probabilidad de transición es

$$\begin{aligned} P =&(2\pi)^8 \int_{\mathbf{k}_1}\int_{\mathbf{k}_2}\int_{\mathbf{q}_1}\int_{\mathbf{q}_2} f(\mathbf{k}_1)g(\mathbf{k}_2)f^*(\mathbf{q}_1)g^*(\mathbf{q}_2)\delta(p_1'+p_2'-k_1-k_2)\delta(p_1'+p_2'-q_1-q_2) \\ &\times \mathcal{M}(p_1',p_2',k_1,k_2)\mathcal{M}(p_1',p_2',q_1,q_2)\left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}}}\right) \\ &\times \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{q}_1}}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{q}_2}}}\right)\left(\Pi_{j=1}^2 \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_j}}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

# Sección eficaz

Podemos usar la primera delta para escribir a la segunda como $\delta(k_1 + k_2 - q_1 - q_2)$ y luego reemplazar

$$(2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - q_1 - q_2) = \int e^{i(k_1+k_2-q_1-q_2)x} d^4x \tag{6}$$

Podemos usar la primera delta para escribir a la segunda como $\delta(k_1 + k_2 - q_1 - q_2)$ y luego reemplazar

$$(2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - q_1 - q_2) = \int e^{i(k_1+k_2-q_1-q_2)x} d^4x \tag{6}$$

en la probabilidad para obtener

$$\begin{aligned} P = \int d^4x |\tilde{f}(x)|^2 |\tilde{g}(x)|^2 (2\pi)^4 \delta(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) |\mathcal{M}(p_1', p_2', p_1, p_2)|^2 \\ \times \left( \frac{1}{(2\pi)^3 (2\omega_{\mathbf{k}_1})^2} \frac{1}{(2\pi)^3 (2\omega_{\mathbf{k}_2})^2} \right) \left( \Pi_{j=1}^2 \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_j}} \right), \end{aligned} \tag{7}$$

donde además aproximamos $k_1, q_1 \approx p_1$ y $k_2, q_2 \approx p_2$ y las funciones con moño son las transformadas de Fourier.

## Sección eficaz

Podemos usar la primera delta para escribir a la segunda como $\delta(k_1 + k_2 - q_1 - q_2)$ y luego reemplazar

$$(2\pi)^4\delta(k_1 + k_2 - q_1 - q_2) = \int e^{i(k_1+k_2-q_1-q_2)x} d^4x \tag{6}$$

en la probabilidad para obtener

$$\begin{aligned} P = &\int d^4x|\tilde{f}(x)|^2|\tilde{g}(x)|^2(2\pi)^4\delta(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)|\mathcal{M}(p_1', p_2', p_1, p_2)|^2 \\ &\times \left(\frac{1}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{k}_1})^2}\frac{1}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{k}_2})^2}\right)\left(\Pi_{j=1}^2\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_j}}\right), \end{aligned} \tag{7}$$

donde además aproximamos $k_1, q_1 \approx p_1$ y $k_2, q_2 \approx p_2$ y las funciones con moño son las transformadas de Fourier.Obtenemos entonces la probabilidad de transición por unidad de volumen y tiempo a partir de

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dV dt} =& |\tilde{f}(x)|^2|\tilde{g}(x)|^2\left(\frac{1}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}_1})^2}\frac{1}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}_2})^2}\right)(2\pi)^4\delta(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) \\ &\times |\mathcal{M}(p_1', p_2', p_1, p_2)|^2\left(\Pi_{j=1}^2\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_j}}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

# Sección eficaz

Definiendo entonces la sección eficaz $d\sigma$ como

$$\frac{dP}{dV\,dt} = (\text{flujo incidente}) \times (\text{densidad del objetivo}) \times d\sigma \tag{9}$$

# Sección eficaz

Definiendo entonces la sección eficaz $d\sigma$ como

$$\frac{dP}{dV\,dt} = (\text{flujo incidente}) \times (\text{densidad del objetivo}) \times d\sigma \tag{9}$$

y calculando en el centro de masa

$$(\text{flujo incidente}) = (\text{densidad de partículas}) \times (\text{velocidad relativa}) \tag{10}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}_1}} |\tilde{f}(x)|^2 \times |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \tag{11}$$

## Sección eficaz

Definiendo entonces la sección eficaz $d\sigma$ como

$$\frac{dP}{dV\,dt} = (\text{flujo incidente}) \times (\text{densidad del objetivo}) \times d\sigma \tag{9}$$

y calculando en el centro de masa

$$\begin{aligned}(\text{flujo incidente}) &= (\text{densidad de partículas}) \times (\text{velocidad relativa}) && (10)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}_1}} |\tilde{f}(x)|^2 \times |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| && (11)\end{aligned}$$

$$(\text{densidad del objetivo}) = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}_2}} |\tilde{g}(x)|^2 \tag{12}$$

Pueden comprobar que la densidad de partículas para los estados (1) viene dada por ese factor calculando el valor medio de la energía en estos estados y dividiendo por la energía media de las partículas.

# Sección eficaz

Entonces reemplazando esto y despejando $d\sigma$ obtenemos

$$d\sigma = \left(\frac{1}{4\omega_{\mathbf{p}_1}\omega_{\mathbf{p}_2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}\right)(2\pi)^4\delta(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)|\mathcal{M}(p_1', p_2', p_1, p_2)|^2\left(\Pi_{j=1}^{2}\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_j}}\right). \tag{13}$$

# Sección eficaz

Entonces reemplazando esto y despejando $d\sigma$ obtenemos

$$d\sigma = \left(\frac{1}{4\omega_{\mathbf{p}_1}\omega_{\mathbf{p}_2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}\right)(2\pi)^4\delta(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)|\mathcal{M}(p_1', p_2', p_1, p_2)|^2 \left(\Pi_{j=1}^2 \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_j}}\right). \tag{13}$$

Si el sistema es colineal podemos reescribir

$$\omega_{\mathbf{p}_1}\omega_{\mathbf{p}_2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = \omega_{\mathbf{p}_1}\omega_{\mathbf{p}_2}|\frac{\mathbf{p}_1}{\omega_{\mathbf{p}_1}} - \frac{\mathbf{p}_2}{\omega_{\mathbf{p}_2}}| = |\omega_{\mathbf{p}_2}\mathbf{p}_1 - \omega_{\mathbf{p}_1}\mathbf{p}_2| = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \tag{14}$$

(usamos $\mathbf{v} = \gamma m \mathbf{v}/\gamma m = \mathbf{p}/E_{\mathbf{p}}$)

# Sección eficaz

Entonces reemplazando esto y despejando $d\sigma$ obtenemos

$$d\sigma = \left(\frac{1}{4\omega_{\mathbf{p}_1}\omega_{\mathbf{p}_2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}\right)(2\pi)^4\delta(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)|\mathcal{M}(p_1', p_2', p_1, p_2)|^2 \left(\Pi_{j=1}^2 \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_j}}\right). \tag{13}$$

Si el sistema es colineal podemos reescribir

$$\omega_{\mathbf{p}_1}\omega_{\mathbf{p}_2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = \omega_{\mathbf{p}_1}\omega_{\mathbf{p}_2}|\frac{\mathbf{p}_1}{\omega_{\mathbf{p}_1}} - \frac{\mathbf{p}_2}{\omega_{\mathbf{p}_2}}| = |\omega_{\mathbf{p}_2}\mathbf{p}_1 - \omega_{\mathbf{p}_1}\mathbf{p}_2| = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \tag{14}$$

(usamos $\mathbf{v} = \gamma m \mathbf{v}/\gamma m = \mathbf{p}/E_{\mathbf{p}}$)obtenemos finalmente

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}(2\pi)^4\delta(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)|\mathcal{M}(p_1', p_2', p_1, p_2)|^2 \left(\Pi_{j=1}^2 \frac{d^3\mathbf{p'}_j}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_j}}\right). \tag{15}$$

En caso de que tengamos partículas con espín debemos reemplazar

$$|\mathcal{M}|^2 \longrightarrow \frac{1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{s_i,s_f} |\mathcal{M}|^2, \tag{16}$$

es decir, promediamos sobre los spines iniciales y sumamos sobre los finales.

(Práctica 7, Ejercicio 76)

1. *Muestre que para el caso de un proceso elastico (no hay cambio en las masas de las particulas finales) la expresión de la sección* $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ *en el sistema centro de masa es:*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 {(E_1 + E_2)}^2} \mid M_{fi} \mid^2$$

   *siendo* $E_1$ *y* $E_2$ *las enegias de las partículas en el sistema centro de masa y* $\Omega$ *el ángulo solido asociado al momento de una de las particulas elegidas para parametrizar el estado final.*

2. *Repita el cálculo para el caso general de un proceso inelastico. Puede considerar para simplificar que se trata de un proceso en que tanto las particulas inciales como las finales tienen la misma masa.*

# Sección eficaz

Partiendo de (15) tenemos solo tenemos $2$ partículas finales, en el centro de masa podemos integrar la delta sobre el momento y reemplazar $\mathbf{p'}_2 = -\mathbf{p'}_1$ para dar

$$\int\int (2\pi)^4 \delta(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \frac{d^3\mathbf{p'}_1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_1}} \frac{d^3\mathbf{p'}_2}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_2}} \tag{17}$$

$$= \int\int (2\pi)\delta(\omega_{\mathbf{p'}_1} + \omega_{\mathbf{p'}_2} - \omega_{\mathbf{p}_1} - \omega_{\mathbf{p}_2}) \frac{|\mathbf{p'}_1|^2 d\Omega d|\mathbf{p'}_1|}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_1}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p'}_2}} \tag{18}$$

# Sección eficaz

Partiendo de (15) tenemos solo tenemos $2$ partículas finales, en el centro de masa podemos integrar la delta sobre el momento y reemplazar $\mathbf{p'}_2 = -\mathbf{p'}_1$ para dar

$$\int\int (2\pi)^4 \delta(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) \frac{d^3\mathbf{p'}_1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_1}} \frac{d^3\mathbf{p'}_2}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_2}} \tag{17}$$

$$= \int\int (2\pi)\delta(\omega_{\mathbf{p'}_1} + \omega_{\mathbf{p'}_2} - \omega_{\mathbf{p}_1} - \omega_{\mathbf{p}_2}) \frac{|\mathbf{p'}_1|^2 d\Omega d|\mathbf{p'}_1|}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_1}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p'}_2}} \tag{18}$$

Integrando sobre el momento tenemos

$$= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p'}_1|^2}{16\pi^2 \omega_{\mathbf{p'}_1}\omega_{\mathbf{p'}_2}} \left( \frac{|\mathbf{p'}_1|}{\omega_{\mathbf{p'}_1}} + \frac{|\mathbf{p'}_1|}{\omega_{\mathbf{p'}_2}} \right)^{-1} \tag{19}$$

$$= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p'}_1|}{16\pi^2 E_{cm}} \tag{20}$$

# Sección eficaz

Partiendo de (15) tenemos solo tenemos $2$ partículas finales, en el centro de masa podemos integrar la delta sobre el momento y reemplazar $\mathbf{p'}_2 = -\mathbf{p'}_1$ para dar

$$\int\int(2\pi)^4\delta(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)\frac{d^3\mathbf{p'}_1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_1}}\frac{d^3\mathbf{p'}_2}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_2}} \tag{17}$$

$$= \int\int(2\pi)\delta(\omega_{\mathbf{p'}_1} + \omega_{\mathbf{p'}_2} - \omega_{\mathbf{p}_1} - \omega_{\mathbf{p}_2})\frac{|\mathbf{p'}_1|^2 d\Omega d|\mathbf{p'}_1|}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}_1}}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p'}_2}} \tag{18}$$

Integrando sobre el momento tenemos

$$= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p'}_1|^2}{16\pi^2\omega_{\mathbf{p'}_1}\omega_{\mathbf{p'}_2}}\left(\frac{|\mathbf{p'}_1|}{\omega_{\mathbf{p'}_1}} + \frac{|\mathbf{p'}_1|}{\omega_{\mathbf{p'}_2}}\right)^{-1} \tag{19}$$

$$= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p'}_1|}{16\pi^2 E_{cm}} \tag{20}$$

donde usamos que $\delta(f(x)) = [f'(x_0)]^{-1}\delta(x - x_0)$ siendo $f(x_0) = 0$ y $E_{cm} = \omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2}$ es la energía total en el centro de masa. En nuestro caso
$f(x) = \omega_{\mathbf{p}_1'} + \omega_{\mathbf{p}_2'} - E_{cm} = \sqrt{x^2 + m_1^2} + \sqrt{x^2 + m_2^2} - E_{cm}$.

# Sección eficaz

Reemplazando esto en (15) obtenemos

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}|^2 d\Omega \frac{|\mathbf{p'}_1|}{16\pi^2 E_{cm}} \tag{21}$$

# Sección eficaz

Reemplazando esto en (15) obtenemos

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}|^2 d\Omega \frac{|\mathbf{p'}_1|}{16\pi^2 E_{cm}} \tag{21}$$

También podemos simplificar

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2) - m_1^2 m_2^2} = |\mathbf{p}_2 \omega_1 - \mathbf{p}_1 \omega_2| \tag{22}$$

Reemplazando esto en (15) obtenemos

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}|^2 d\Omega \frac{|\mathbf{p'}_1|}{16\pi^2 E_{cm}} \tag{21}$$

También podemos simplificar

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2) - m_1^2 m_2^2} = |\mathbf{p}_2 \omega_1 - \mathbf{p}_1 \omega_2| \tag{22}$$

usando que estamos en el cm tenemos $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$

$$= |\mathbf{p}_1|(\omega_1 + \omega_2) = |\mathbf{p}_1| E_{cm}. \tag{23}$$

# Sección eficaz

Reemplazando esto en (15) obtenemos

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}|^2 d\Omega \frac{|\mathbf{p'}_1|}{16\pi^2 E_{cm}} \tag{21}$$

También podemos simplificar

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2) - m_1^2 m_2^2} = |\mathbf{p}_2 \omega_1 - \mathbf{p}_1 \omega_2| \tag{22}$$

usando que estamos en el cm tenemos $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$

$$= |\mathbf{p}_1|(\omega_1 + \omega_2) = |\mathbf{p}_1| E_{cm}. \tag{23}$$

Finalmente reemplazando obtenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\mathcal{M}|^2 \frac{|\mathbf{p'}_1|}{64\pi^2 |\mathbf{p}_1| E_{cm}^2} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2}, \tag{24}$$

donde usamos que en el cm y con todas masas iguales $|\mathbf{p'}_1| = |\mathbf{p}_1|$.

# Sección eficaz

(Práctica 7, Ejercicio 77) *Considere algunos de los siguientes procesos y halle la seccón eficaz diferencial para el orden más bajo en los procesos:*

1. *Scattering de Bhabha*

*Considere en todos los casos que las polarizaciones de los estados finales e iniciales estan sumadas y promediadas, respectivamente.*

(Práctica 7, Ejercicio 77) *Considere algunos de los siguientes procesos y halle la seccón eficaz diferencial para el orden más bajo en los procesos:*

1. *Scattering de Bhabha*

*Considere en todos los casos que las polarizaciones de los estados finales e iniciales estan sumadas y promediadas, respectivamente.*

Para el scattering de Bahabha habíamos obtenido el siguiente resultado para la amplitud

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_t, \tag{25}$$

(Práctica 7, Ejercicio 77) *Considere algunos de los siguientes procesos y halle la seccón eficaz diferencial para el orden más bajo en los procesos:*

1. *Scattering de Bhabha*

*Considere en todos los casos que las polarizaciones de los estados finales e iniciales estan sumadas y promediadas, respectivamente.*

Para el scattering de Bahabha habíamos obtenido el siguiente resultado para la amplitud

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_t, \tag{25}$$

siendo

$$\mathcal{M}_s = e^2 \frac{\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)\right]}{(p_1+p_2)^2} \tag{26}$$

$$\mathcal{M}_t = -e^2 \frac{\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)\right]}{(p_1-p_3)^2} \tag{27}$$

que ahora podemos identificar como contribuciones de los canales s y t.

# Sección eficaz

Para obtener la sección eficaz es necesario calcular

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{(2s_{e^-}+1)(2s_{e^+}+1)} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_1=1}^{2} \sum_{s_2=1}^{2} \sum_{s_3=1}^{2} \sum_{s_4=1}^{2} \left[ |\mathcal{M}_s|^2 + |\mathcal{M}_t|^2 + \mathcal{M}_s^* \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_s \right] \tag{28}$$

# Sección eficaz

Para obtener la sección eficaz es necesario calcular

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{(2s_{e^-}+1)(2s_{e^+}+1)}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4}\sum_{s_1=1}^{2}\sum_{s_2=1}^{2}\sum_{s_3=1}^{2}\sum_{s_4=1}^{2}\left[|\mathcal{M}_s|^2 + |\mathcal{M}_t|^2 + \mathcal{M}_s^*\mathcal{M}_t + \mathcal{M}_t^*\mathcal{M}_s\right] \tag{28}$$

Comencemos por $\mathcal{M}_s$ tenemos

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^{\mu}u^{s_1}(p_1)\right]^*\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_{\mu}v^{s_4}(p_4)\right]^*\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^{\nu}u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_{\nu}v^{s_4}(p_4)\right] \tag{29}$$

# Sección eficaz

Para obtener la sección eficaz es necesario calcular

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{(2s_{e^-}+1)(2s_{e^+}+1)} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_1=1}^{2} \sum_{s_2=1}^{2} \sum_{s_3=1}^{2} \sum_{s_4=1}^{2} \left[ |\mathcal{M}_s|^2 + |\mathcal{M}_t|^2 + \mathcal{M}_s^* \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_s \right. \tag{28}$$

Comencemos por $\mathcal{M}_s$ tenemos

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4} \left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)\right]^* \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)\right]^* \left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\nu u^{s_1}(p_1)\right] \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\nu v^{s_4}(p_4)\right] \tag{29}$$

ahora podemos usar la siguiente propiedad

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = u^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger (\gamma^0)^\dagger v = u^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 v = u^\dagger \gamma^0 \gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 v \tag{30}$$

$$= u^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v = \text{(conjugar da vuelta el orden)}, \tag{31}$$

# Sección eficaz

Para obtener la sección eficaz es necesario calcular

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{(2s_{e^-}+1)(2s_{e^+}+1)} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_1=1}^{2} \sum_{s_2=1}^{2} \sum_{s_3=1}^{2} \sum_{s_4=1}^{2} \left[ |\mathcal{M}_s|^2 + |\mathcal{M}_t|^2 + \mathcal{M}_s^* \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_s \right] \tag{28}$$

Comencemos por $\mathcal{M}_s$ tenemos

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4} \left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)\right]^* \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)\right]^* \left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\nu u^{s_1}(p_1)\right] \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\nu v^{s_4}(p_4)\right] \tag{29}$$

ahora podemos usar la siguiente propiedad

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = u^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger (\gamma^0)^\dagger v = u^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 v = u^\dagger \gamma^0 \gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 v \tag{30}$$

$$= u^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v = \text{(conjugar da vuelta el orden)}, \tag{31}$$

donde usamos la propiedad que enunciamos en el segundo video de que $\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu$.

# Sección eficaz

Obtenemos entonces

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\left[\bar{u}^{s_1}(p_1)\gamma^\mu v^{s_2}(p_2)\right]\left[\bar{v}^{s_4}(p_4)\gamma_\mu u^{s_3}(p_3)\right]\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\nu u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\nu v^{s_4}(p_4)\right] \tag{32}$$

# Sección eficaz

Obtenemos entonces

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4} \left[\bar{u}^{s_1}(p_1)\gamma^\mu v^{s_2}(p_2)\right] \left[\bar{v}^{s_4}(p_4)\gamma_\mu u^{s_3}(p_3)\right] \left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\nu u^{s_1}(p_1)\right] \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\nu v^{s_4}(p_4)\right] \tag{32}$$

$$= \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4} \left[\bar{u}^{s_1}(p_1)\gamma^\mu v^{s_2}(p_2)\right] \left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\nu u^{s_1}(p_1)\right] \left[\bar{v}^{s_4}(p_4)\gamma_\mu u^{s_3}(p_3)\right] \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\nu v^{s_4}(p_4)\right]. \tag{33}$$

Obtenemos entonces

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\left[\bar{u}^{s_1}(p_1)\gamma^\mu v^{s_2}(p_2)\right]\left[\bar{v}^{s_4}(p_4)\gamma_\mu u^{s_3}(p_3)\right]\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\nu u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\nu v^{s_4}(p_4)\right] \tag{32}$$

$$= \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\left[\bar{u}^{s_1}(p_1)\gamma^\mu v^{s_2}(p_2)\right]\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\nu u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{v}^{s_4}(p_4)\gamma_\mu u^{s_3}(p_3)\right]\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\nu v^{s_4}(p_4)\right]. \tag{33}$$

Ahora hacemos las sumas sobre espines

$$\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_s|^2 = \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\sum_{s_1}\left[\bar{u}^{s_1}(p_1)\gamma^\mu\left(\sum_{s_2} v^{s_2}(p_2)\bar{v}^{s_2}(p_2)\right)\gamma^\nu u^{s_1}(p_1)\right] \tag{34}$$

$$\times\sum_{s_4}\left[\bar{v}^{s_4}(p_4)\gamma_\mu\sum_{s_3}\left(u^{s_3}(p_3)\bar{u}^{s_3}(p_3)\right)\gamma_\nu v^{s_4}(p_4)\right] \tag{35}$$

# Sección eficaz

Escribiendo en componentes tenemos

$$\sum_{s_1}\left[\bar{u}_a^{s_1}(p_1)\gamma^\mu_{ab}\left(\sum_{s_2} v_b^{s_2}(p_2)\bar{v}_c^{s_2}(p_2)\right)\gamma^\nu_{cd}u_d^{s_1}(p_1)\right] \tag{36}$$

$$=\sum_{s_1}\left(\bar{u}_a^{s_1}(p_1)u_d^{s_1}(p_1)\right)\gamma^\mu_{ab}\left(\sum_{s_2} v_b^{s_2}(p_2)\bar{v}_c^{s_2}(p_2)\right)\gamma^\nu_{cd} \tag{37}$$

# Sección eficaz

Escribiendo en componentes tenemos

$$\sum_{s_1}\left[\bar{u}_a^{s_1}(p_1)\gamma^\mu_{ab}\left(\sum_{s_2}v_b^{s_2}(p_2)\bar{v}_c^{s_2}(p_2)\right)\gamma^\nu_{cd}u_d^{s_1}(p_1)\right] \tag{36}$$

$$=\sum_{s_1}\left(\bar{u}_a^{s_1}(p_1)u_d^{s_1}(p_1)\right)\gamma^\mu_{ab}\left(\sum_{s_2}v_b^{s_2}(p_2)\bar{v}_c^{s_2}(p_2)\right)\gamma^\nu_{cd} \tag{37}$$

usando las relaciones de completitud llegamos a

$$=\left(\not{p}_1+m\right)_{da}\gamma^\mu_{ab}\left(\not{p}_2-m\right)_{bc}\gamma^\nu_{cd}=\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_1+m\right)\gamma_\mu\left(\not{p}_2-m\right)\gamma_\nu\right]. \tag{38}$$

# Sección eficaz

Escribiendo en componentes tenemos

$$\sum_{s_1}\left[\bar{u}_a^{s_1}(p_1)\gamma_{ab}^{\mu}\left(\sum_{s_2}v_b^{s_2}(p_2)\bar{v}_c^{s_2}(p_2)\right)\gamma_{cd}^{\nu}u_d^{s_1}(p_1)\right] \tag{36}$$

$$=\sum_{s_1}\left(\bar{u}_a^{s_1}(p_1)u_d^{s_1}(p_1)\right)\gamma_{ab}^{\mu}\left(\sum_{s_2}v_b^{s_2}(p_2)\bar{v}_c^{s_2}(p_2)\right)\gamma_{cd}^{\nu} \tag{37}$$

usando las relaciones de completitud llegamos a

$$=\left(\not{p}_1+m\right)_{da}\gamma_{ab}^{\mu}\left(\not{p}_2-m\right)_{bc}\gamma_{cd}^{\nu}=\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_1+m\right)\gamma_{\mu}\left(\not{p}_2-m\right)\gamma_{\nu}\right]. \tag{38}$$

Reemplazando esto tenemos

$$=\frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_1+m\right)\gamma^{\mu}\left(\not{p}_2-m\right)\gamma^{\nu}\right]\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_4-m\right)\gamma_{\mu}\left(\not{p}_3+m\right)\gamma_{\nu}\right] \tag{39}$$

## Sección eficaz

Para continuar simplificando será necesario conocer propiedades de la traza de matrices de Dirac.

# Sección eficaz

Para continuar simplificando será necesario conocer propiedades de la traza de matrices de Dirac.

1) La traza de cualquier producto de un número impar de $\gamma^\mu$ es cero.

## Sección eficaz

Para continuar simplificando será necesario conocer propiedades de la traza de matrices de Dirac.

1) La traza de cualquier producto de un número impar de $\gamma^\mu$ es cero.

2)$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right) = 4\eta^{\mu\nu}$.

# Sección eficaz

Para continuar simplificando será necesario conocer propiedades de la traza de matrices de Dirac.

1) La traza de cualquier producto de un número impar de $\gamma^\mu$ es cero.

2)$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right) = 4\eta^{\mu\nu}$.

3)$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) = 4\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\right)$.

Para continuar simplificando será necesario conocer propiedades de la traza de matrices de Dirac.

1) La traza de cualquier producto de un número impar de $\gamma^\mu$ es cero.

2)$\mathsf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right) = 4\eta^{\mu\nu}$.

3)$\mathsf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) = 4\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\right)$.

1. Veamos un caso sencillo pero ilustrativo

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Tr}\left(\gamma^\mu\right) &= \mathsf{Tr}\left(\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu\right) \qquad \left(\gamma^5\right)^2 = 1 && (40)\\
&= -\mathsf{Tr}\left(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5\right) \qquad \left\{\gamma^\mu,\gamma^5\right\} = 0 && (41)\\
&= -\mathsf{Tr}\left(\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu\right) \qquad \text{propiedad cíclica de la traza} && (42)\\
&= -\mathsf{Tr}\left(\gamma^\mu\right) && (43)\\
&\implies \mathsf{Tr}\left(\gamma^\mu\right) = 0. && (44)
\end{aligned}
$$

Para continuar simplificando será necesario conocer propiedades de la traza de matrices de Dirac.

1) La traza de cualquier producto de un número impar de $\gamma^\mu$ es cero.

2)$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right) = 4\eta^{\mu\nu}$.

3)$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) = 4\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\right)$.

1. Veamos un caso sencillo pero ilustrativo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\right) &= \mathrm{Tr}\left(\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu\right) \qquad (\gamma^5)^2 = 1 && (40)\\
&= -\mathrm{Tr}\left(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5\right) \qquad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 && (41)\\
&= -\mathrm{Tr}\left(\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu\right) \qquad \text{propiedad cíclica de la traza} && (42)\\
&= -\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\right) && (43)\\
&\implies \mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\right) = 0. && (44)
\end{aligned}
$$

Si tuviéramos $n$ matrices sacaría $n$ signos menos en el segundo paso (al mover la segunda $\gamma^5$ hasta el final), con lo cual para $n$ impar obtenemos que la traza es igual así misma y por lo tanto se anula.

2.

$$\begin{aligned}
\mathsf{Tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right) &= \mathsf{Tr}\left(2\eta^{\mu\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right) && \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} && (45)\\
&= 8\eta^{\mu\nu} - \mathsf{Tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right) && \text{propiedad cíclica de la traza} && (46)\\
&\implies \mathsf{Tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right) = 4\eta^{\mu\nu} && && (47)
\end{aligned}$$

2.

$$\text{Tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right) = \text{Tr}\left(2\eta^{\mu\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right) \qquad \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{45}$$

$$= 8\eta^{\mu\nu} - \text{Tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right) \qquad \text{propiedad cíclica de la traza} \tag{46}$$

$$\implies \text{Tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right) = 4\eta^{\mu\nu} \tag{47}$$

3. Para un producto de más matrices la idea es la misma vamos conmutando la primera hasta el final

$$\text{Tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\right) = \text{Tr}\left(2\eta^{\mu\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\right) \tag{48}$$

$$= \text{Tr}\left(2\eta^{\mu\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} - \gamma^{\nu}2\eta^{\mu\rho}\gamma^{\sigma} + \gamma^{\nu}\gamma^{\rho}2\eta^{\mu\sigma} - \gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\right) \tag{49}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathsf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right) &= \mathsf{Tr}\left(2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu\right) && \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} && (45)\\
&= 8\eta^{\mu\nu} - \mathsf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right) && \text{propiedad cíclica de la traza} && (46)\\
&\implies \mathsf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right) = 4\eta^{\mu\nu} && && (47)
\end{aligned}$$

3. Para un producto de más matrices la idea es la misma vamos conmutando la primera hasta el final

$$\begin{aligned}
\mathsf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) &= \mathsf{Tr}\left(2\eta^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) && (48)\\
&= \mathsf{Tr}\left(2\eta^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu 2\eta^{\mu\rho}\gamma^\sigma + \gamma^\nu\gamma^\rho 2\eta^{\mu\sigma} - \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\right) && (49)
\end{aligned}$$

y luego usamos la propiedad cíclica de la traza que nos permite despejar

$$\begin{aligned}
\mathsf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) &= \eta^{\mu\nu}\mathsf{Tr}(\gamma^\rho\gamma^\sigma) - \eta^{\mu\rho}\mathsf{Tr}(\gamma^\nu\gamma^\sigma) + \eta^{\mu\sigma}\mathsf{Tr}(\gamma^\nu\gamma^\rho) && (50)\\
&= 4\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\right). && (51)
\end{aligned}$$

# Sección eficaz

Volvamos a donde nos quedamos con la sección de scattering y calculemos

$$\text{Tr}\left[\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma^\mu \left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\nu\right] = \text{Tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu) + \text{Tr}(m\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu) \tag{52}$$

$$- \text{Tr}(\not{p}_1\gamma^\mu m\gamma^\nu) - m^2\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) \tag{53}$$

# Sección eficaz

Volvamos a donde nos quedamos con la sección de scattering y calculemos

$$\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_1+m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2-m\right)\gamma^\nu\right]=\mathsf{Tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu)+\mathsf{Tr}(m\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu) \quad (52)$$

$$-\mathsf{Tr}(\not{p}_1\gamma^\mu m\gamma^\nu)-m^2\mathsf{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) \quad (53)$$

los dos términos del medio se anulan porque tienen 3 matrices gama y nos queda

$$\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_1+m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2-m\right)\gamma^\nu\right]=p_{1\rho}p_{2\sigma}\mathsf{Tr}(\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu)-m^2 4\eta^{\mu\nu} \quad (54)$$

$$=p_{1\rho}p_{2\sigma}4\left(\eta^{\rho\mu}\eta^{\sigma\nu}-\eta^{\rho\sigma}\eta^{\mu\nu}+\eta^{\rho\nu}\eta^{\mu\sigma}\right)-m^2 4\eta^{\mu\nu} \quad (55)$$

$$=4\left(p_1^\mu p_2^\nu-(p_1\cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu}+p_1^\nu p_2^\mu\right)-m^2 4\eta^{\mu\nu} \quad (56)$$

# Sección eficaz

Volvamos a donde nos quedamos con la sección de scattering y calculemos

$$\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\nu\right] = \mathsf{Tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu) + \mathsf{Tr}(m\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu) \tag{52}$$

$$- \mathsf{Tr}(\not{p}_1\gamma^\mu m\gamma^\nu) - m^2\mathsf{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) \tag{53}$$

los dos términos del medio se anulan porque tienen 3 matrices gama y nos queda

$$\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\nu\right] = p_{1\rho}p_{2\sigma}\mathsf{Tr}(\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu) - m^2 4\eta^{\mu\nu} \tag{54}$$

$$= p_{1\rho}p_{2\sigma}4\left(\eta^{\rho\mu}\eta^{\sigma\nu} - \eta^{\rho\sigma}\eta^{\mu\nu} + \eta^{\rho\nu}\eta^{\mu\sigma}\right) - m^2 4\eta^{\mu\nu} \tag{55}$$

$$= 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - \left(p_1 \cdot p_2\right)\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) - m^2 4\eta^{\mu\nu} \tag{56}$$

De la misma forma tenemos

$$\text{Tr}\left[\left(\not{p}_1 - m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2 + m\right)\gamma^\nu\right] = 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - (p_1\cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) - m^2 4\eta^{\mu\nu} \tag{57}$$

$$\text{Tr}\left[\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2 + m\right)\gamma^\nu\right] = 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - (p_1\cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) + m^2 4\eta^{\mu\nu} \tag{58}$$

$$\text{Tr}\left[\left(\not{p}_1 - m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\nu\right] = 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - (p_1\cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) + m^2 4\eta^{\mu\nu}. \tag{59}$$

De la misma forma tenemos

$$\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_1 - m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2 + m\right)\gamma^\nu\right] = 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - (p_1\cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) - m^2 4\eta^{\mu\nu} \tag{57}$$

$$\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2 + m\right)\gamma^\nu\right] = 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - (p_1\cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) + m^2 4\eta^{\mu\nu} \tag{58}$$

$$\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_1 - m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\nu\right] = 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - (p_1\cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) + m^2 4\eta^{\mu\nu}. \tag{59}$$

Esto nos permite calcular

$$\sum_{\mathsf{spins}} |\mathcal{M}_s|^2 = \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\nu\right]\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_4 - m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_3 + m\right)\gamma^\nu\right] \tag{60}$$

De la misma forma tenemos

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_1 - m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2 + m\right)\gamma^\nu\right] = 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - (p_1\cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) - m^2 4\eta^{\mu\nu} \tag{57}$$

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2 + m\right)\gamma^\nu\right] = 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - (p_1\cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) + m^2 4\eta^{\mu\nu} \tag{58}$$

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_1 - m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\nu\right] = 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - (p_1\cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) + m^2 4\eta^{\mu\nu}. \tag{59}$$

Esto nos permite calcular

$$\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_s|^2 = \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\nu\right]\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_4 - m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_3 + m\right)\gamma^\nu\right] \tag{60}$$

$$= \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\left[4\left(p_1^\mu p_2^\nu - (p_1\cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) - m^2 4\eta^{\mu\nu}\right]\left[4\left(p_{4\mu}p_{3\nu} - (p_4\cdot p_3)\,\eta_{\mu\nu} + p_{4\nu}p_{3\mu}\right) - m^2 4\right. \tag{61}$$

De la misma forma tenemos

$$\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_1 - m\right)\gamma^\mu \left(\not{p}_2 + m\right)\gamma^\nu\right] = 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - (p_1 \cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) - m^2 4\eta^{\mu\nu} \tag{57}$$

$$\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma^\mu \left(\not{p}_2 + m\right)\gamma^\nu\right] = 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - (p_1 \cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) + m^2 4\eta^{\mu\nu} \tag{58}$$

$$\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_1 - m\right)\gamma^\mu \left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\nu\right] = 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - (p_1 \cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) + m^2 4\eta^{\mu\nu}. \tag{59}$$

Esto nos permite calcular

$$\sum_{\mathsf{spins}} |\mathcal{M}_s|^2 = \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma^\mu \left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\nu\right]\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_4 - m\right)\gamma^\mu \left(\not{p}_3 + m\right)\gamma^\nu\right] \tag{60}$$

$$= \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\left[4\left(p_1^\mu p_2^\nu - (p_1 \cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) - m^2 4\eta^{\mu\nu}\right]\left[4\left(p_{4\mu} p_{3\nu} - (p_4 \cdot p_3)\,\eta_{\mu\nu} + p_{4\nu} p_{3\mu}\right) - m^2 4 \right. \tag{61}$$

$$= \frac{16e^4}{(p_1+p_2)^4}\left[\left(p_1^\mu p_2^\nu - (p_1 \cdot p_2)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) - m^2\eta^{\mu\nu}\right]\left[\left(p_{4\mu} p_{3\nu} - (p_4 \cdot p_3)\,\eta_{\mu\nu} + p_{4\nu} p_{3\mu}\right) - m^2\eta_{\mu\nu}\right] \tag{62}$$

## Sección eficaz

De la misma forma tenemos

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_1 - m\right)\gamma^\mu \left(\not{p}_2 + m\right)\gamma^\nu\right] = 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - \left(p_1 \cdot p_2\right)\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) - m^2 4\eta^{\mu\nu} \tag{57}$$

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma^\mu \left(\not{p}_2 + m\right)\gamma^\nu\right] = 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - \left(p_1 \cdot p_2\right)\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) + m^2 4\eta^{\mu\nu} \tag{58}$$

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_1 - m\right)\gamma^\mu \left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\nu\right] = 4\left(p_1^\mu p_2^\nu - \left(p_1 \cdot p_2\right)\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) + m^2 4\eta^{\mu\nu}. \tag{59}$$

Esto nos permite calcular

$$\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_s|^2 = \frac{e^4}{\left(p_1 + p_2\right)^4}\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma^\mu \left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\nu\right]\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_4 - m\right)\gamma^\mu \left(\not{p}_3 + m\right)\gamma^\nu\right] \tag{60}$$

$$= \frac{e^4}{\left(p_1 + p_2\right)^4}\left[4\left(p_1^\mu p_2^\nu - \left(p_1 \cdot p_2\right)\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) - m^2 4\eta^{\mu\nu}\right]\left[4\left(p_{4\mu} p_{3\nu} - \left(p_4 \cdot p_3\right)\eta_{\mu\nu} + p_{4\nu} p_{3\mu}\right) - m^2 4\eta \tag{61}$$

$$= \frac{16e^4}{\left(p_1 + p_2\right)^4}\left[\left(p_1^\mu p_2^\nu - \left(p_1 \cdot p_2\right)\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu\right) - m^2 \eta^{\mu\nu}\right]\left[\left(p_{4\mu} p_{3\nu} - \left(p_4 \cdot p_3\right)\eta_{\mu\nu} + p_{4\nu} p_{3\mu}\right) - m^2 \eta_{\mu\nu}\right] \tag{62}$$

## Sección eficaz

En el límite relativista las variables de Mandelstam se pueden expresar como

$$s \approx 2k_1 k_2 \approx 2p_1 p_2 \tag{64}$$

$$t \approx -2k_1 p_1 \approx -2k_2 p_2 \tag{65}$$

$$u \approx -2k_1 p_2 \approx -2k_2 p_1 \tag{66}$$

puesto que en ese límite $p^2 = m^2$ se vuelve despreciable frente al momento.

En el límite relativista las variables de Mandelstam se pueden expresar como

$$s \approx 2k_1k_2 \approx 2p_1p_2 \tag{64}$$

$$t \approx -2k_1p_1 \approx -2k_2p_2 \tag{65}$$

$$u \approx -2k_1p_2 \approx -2k_2p_1 \tag{66}$$

puesto que en ese límite $p^2 = m^2$ se vuelve despreciable frente al momento.

Si ahora consideramos el límite relativista podemos despreciar la masa del electrón y reemplazar las variables de mandelstam para obtener

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_s|^2 = \frac{32e^4}{4(p_1+p_2)^4}\left[\frac{1}{2}t\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}u\frac{1}{2}u\right] \tag{67}$$

$$= 2e^4\frac{t^2+u^2}{s^2} \tag{68}$$

## Sección eficaz

De la misma manera podemos calcular el canal t como

$$|\mathcal{M}_t|^2 = -\frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} \left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^{\mu} v^{s_4}(p_4)\right]^* \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_{\mu} u^{s_1}(p_1)\right]^* \left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^{\mu} v^{s_4}(p_4)\right]^* \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_{\mu} u^{s_1}(p_1)\right] \tag{69}$$

De la misma manera podemos calcular el canal t como

$$|\mathcal{M}_t|^2 = -\frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} \left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^{\mu} v^{s_4}(p_4)\right]^* \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_{\mu} u^{s_1}(p_1)\right]^* \left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^{\mu} v^{s_4}(p_4)\right]^* \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_{\mu} u^{s_1}(p_1)\right] \tag{69}$$

$$= \frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} \mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_3 - m\right)\gamma^{\mu}\left(\not{p}_1 - m\right)\gamma^{\nu}\right] \mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_4 + m\right)\gamma_{\mu}\left(\not{p}_2 + m\right)\gamma_{\nu}\right] \tag{70}$$

De la misma manera podemos calcular el canal t como

$$|\mathcal{M}_t|^2 = -\frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} \left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\mu v^{s_4}(p_4)\right]^* \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu u^{s_1}(p_1)\right]^* \left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\mu v^{s_4}(p_4)\right]^* \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu u^{s_1}(p_1)\right] \tag{69}$$

$$= \frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} \mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_3 - m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_1 - m\right)\gamma^\nu\right] \mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_4 + m\right)\gamma_\mu\left(\not{p}_2 + m\right)\gamma_\nu\right] \tag{70}$$

$$= \frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} \left[4\left(p_1^\mu p_3^\nu - (p_1 \cdot p_3)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_3^\mu\right) + m^2 4\eta^{\mu\nu}\right] \left[4\left(p_{2\mu}p_{4\nu} - (p_2 \cdot p_4)\,\eta_{\mu\nu} + p_{2\nu}p_{4\mu}\right) + m^2 4 \tag{71}$$

# Sección eficaz

De la misma manera podemos calcular el canal t como

$$|\mathcal{M}_t|^2 = -\frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} \left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\mu v^{s_4}(p_4)\right]^* \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu u^{s_1}(p_1)\right]^* \left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\mu v^{s_4}(p_4)\right]^* \left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu u^{s_1}(p_1)\right] \tag{69}$$

$$= \frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} \mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_3 - m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_1 - m\right)\gamma^\nu\right] \mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_4 + m\right)\gamma_\mu\left(\not{p}_2 + m\right)\gamma_\nu\right] \tag{70}$$

$$= \frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} \left[4\left(p_1^\mu p_3^\nu - (p_1 \cdot p_3)\,\eta^{\mu\nu} + p_1^\nu p_3^\mu\right) + m^2 4\eta^{\mu\nu}\right] \left[4\left(p_{2\mu}p_{4\nu} - (p_2 \cdot p_4)\,\eta_{\mu\nu} + p_{2\nu}p_{4\mu}\right) + m^2 4 \tag{71}$$

$$= \frac{32e^4}{(p_1 - p_3)^4} \left[(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - m^2 (p_4 \cdot p_2) - m^2 (p_1 \cdot p_3) + 2m^4\right] \tag{72}$$

# Sección eficaz

En el límite relativista resulta

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_t|^2 \approx \frac{32e^4}{4(p_1-p_3)^4}\left[\frac{1}{2}s\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}u\frac{1}{2}u\right] \tag{73}$$

$$= 2e^4\frac{s^2+u^2}{t^2}. \tag{74}$$

# Sección eficaz

En el límite relativista resulta

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_t|^2 \approx \frac{32e^4}{4(p_1-p_3)^4}\left[\frac{1}{2}s\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}u\frac{1}{2}u\right] \tag{73}$$

$$= 2e^4\frac{s^2+u^2}{t^2}. \tag{74}$$

Mientras que los términos de interferencia dan

$$\sum_{\text{spins}}\mathcal{M}_s\mathcal{M}_t^* = -\frac{e^4}{(p_1+p_2)^2(p_1-p_3)^2}\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)\right]$$

$$\times\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\nu u^{s_1}(p_1)\right]^*\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\nu v^{s_4}(p_4)\right]^* \tag{75}$$

En el límite relativista resulta

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_t|^2 \approx \frac{32e^4}{4(p_1-p_3)^4}\left[\frac{1}{2}s\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}u\frac{1}{2}u\right] \tag{73}$$

$$= 2e^4\frac{s^2+u^2}{t^2}. \tag{74}$$

Mientras que los términos de interferencia dan

$$\sum_{\text{spins}}\mathcal{M}_s\mathcal{M}_t^* = -\frac{e^4}{(p_1+p_2)^2(p_1-p_3)^2}\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)\right]$$
$$\times\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\nu u^{s_1}(p_1)\right]^*\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\nu v^{s_4}(p_4)\right]^* \tag{75}$$

$$= -\sum_{\text{spins}}\frac{e^4}{st}\left[\bar{v}_a^{s_2}(p_2)\gamma^\mu_{ab}u_b^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{u}_c^{s_3}(p_3)\gamma_{\mu cd}v_d^{s_4}(p_4)\right]\left[\bar{u}_e^{s_1}(p_1)\gamma_{\nu ef}u_f^{s_3}(p_3)\right]\left[\bar{v}_g^{s_4}(p_4)\gamma^\nu_{gh}v_h^{s_2}(p_2)\right]$$

## Sección eficaz

En el límite relativista resulta

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_t|^2 \approx \frac{32e^4}{4(p_1-p_3)^4}\left[\frac{1}{2}s\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}u\frac{1}{2}u\right] \tag{73}$$

$$= 2e^4\frac{s^2+u^2}{t^2}. \tag{74}$$

Mientras que los términos de interferencia dan

$$\sum_{\text{spins}}\mathcal{M}_s\mathcal{M}_t^* = -\frac{e^4}{(p_1+p_2)^2(p_1-p_3)^2}\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\mu u^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\mu v^{s_4}(p_4)\right]$$

$$\times\left[\bar{u}^{s_3}(p_3)\gamma_\nu u^{s_1}(p_1)\right]^*\left[\bar{v}^{s_2}(p_2)\gamma^\nu v^{s_4}(p_4)\right]^* \tag{75}$$

$$= -\sum_{\text{spins}}\frac{e^4}{st}\left[\bar{v}_a^{s_2}(p_2)\gamma_{ab}^\mu u_b^{s_1}(p_1)\right]\left[\bar{u}_c^{s_3}(p_3)\gamma_{\mu cd}v_d^{s_4}(p_4)\right]\left[\bar{u}_e^{s_1}(p_1)\gamma_{\nu ef}u_f^{s_3}(p_3)\right]\left[\bar{v}_g^{s_4}(p_4)\gamma_{gh}^\nu v_h^{s_2}(p_2)\right]$$

$$= -\sum_{\text{spins}}\frac{e^4}{st}\left[v_h^{s_2}(p_2)\bar{v}_a^{s_2}(p_2)\gamma_{ab}^\mu u_b^{s_1}(p_1)\bar{u}_e^{s_1}(p_1)\right]\gamma_{\nu ef}\left[u_f^{s_3}(p_3)\bar{u}_c^{s_3}(p_3)\gamma_{\mu cd}\right]\left[v_d^{s_4}(p_4)\bar{v}_g^{s_4}(p_4)\gamma_{gh}^\nu\right]$$

# Sección eficaz

$$= -\frac{e^4}{st}\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma_\nu\left(\not{p}_3 + m\right)\gamma_\mu\left(\not{p}_4 - m\right)\gamma^\nu\right] \tag{76}$$

# Sección eficaz

$$= -\frac{e^4}{st}\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma_\nu\left(\not{p}_3 + m\right)\gamma_\mu\left(\not{p}_4 - m\right)\gamma^\nu\right] \tag{76}$$

Será necesario entonces calcular la traza de 6 y hasta 8 matrices gama. La cuenta es larga pero sin mayor dificultad que iterar una ver máz lo que hicimos para 2 y 4 matrices.

$$= -\frac{e^4}{st}\mathsf{Tr}\left[\left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma_\nu\left(\not{p}_3 + m\right)\gamma_\mu\left(\not{p}_4 - m\right)\gamma^\nu\right] \tag{76}$$

Será necesario entonces calcular la traza de 6 y hasta 8 matrices gama. La cuenta es larga pero sin mayor dificultad que iterar una ver máz lo que hicimos para 2 y 4 matrices.Para el otro término de interferencia la cuenta es análoga. Damos entonces el resultado luego de hacer la aproximación relativista

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4\frac{s^2+u^2}{t^2} + 2e^4\frac{t^2+u^2}{s^2} + 4e^4\frac{u^2}{st} = 2e^4\left[u^2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{t}{s}\right)^2\right] \tag{77}$$

$$= -\frac{e^4}{st}\mathrm{Tr}\left[\left(\not{p}_2 - m\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_1 + m\right)\gamma_\nu\left(\not{p}_3 + m\right)\gamma_\mu\left(\not{p}_4 - m\right)\gamma^\nu\right] \tag{76}$$

Será necesario entonces calcular la traza de 6 y hasta 8 matrices gama. La cuenta es larga pero sin mayor dificultad que iterar una ver máz lo que hicimos para 2 y 4 matrices.Para el otro término de interferencia la cuenta es análoga. Damos entonces el resultado luego de hacer la aproximación relativista

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4\frac{s^2+u^2}{t^2} + 2e^4\frac{t^2+u^2}{s^2} + 4e^4\frac{u^2}{st} = 2e^4\left[u^2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{t}{s}\right)^2\right] \tag{77}$$

Usando este resultado encontramos que la sección eficaz es

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = 2\pi\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{64\pi^2E_{cm}^2} = \frac{1}{16\pi s}e^4\left[u^2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{t}{s}\right)^2\right] \tag{78}$$

$$= \pi\alpha^2\frac{1}{s}\left[u^2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{t}{s}\right)^2\right] \tag{79}$$



donde usamos la ecuación (24) y la constante de estructura fina $\alpha = e^2/(4\pi)$.