Campos - Práctica

Condición de Gupta-Bleuler.

Repaso

- El campo de Maxwell (masa nula, helicidad 1) es invariante de gauge y como consecuencia de esto tiene dos grados de libertad. A nivel cuántico describe el fotón (partícula mediadora de la electrodinámica cuántica).

Repaso

- El campo de Maxwell (masa nula, helicidad 1) es invariante de gauge y como consecuencia de esto tiene dos grados de libertad. A nivel cuántico describe el fotón (partícula mediadora de la electrodinámica cuántica).
- Expresión del campo de Maxwell cuantizado:

$$\hat{A}_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left[\hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})^* e^{ikx} \right] ,$$

Repaso

- El campo de Maxwell (masa nula, helicidad 1) es invariante de gauge y como consecuencia de esto tiene dos grados de libertad. A nivel cuántico describe el fotón (partícula mediadora de la electrodinámica cuántica).

- Expresión del campo de Maxwell cuantizado:

$$\hat{A}_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left[\hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})^* e^{ikx} \right] ,$$

  donde $k^2 = 0$, $\left[\hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}\right] = -\eta^{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ y todos los otros se anulan.

Repaso

- El campo de Maxwell (masa nula, helicidad 1) es invariante de gauge y como consecuencia de esto tiene dos grados de libertad. A nivel cuántico describe el fotón (partícula mediadora de la electrodinámica cuántica).

- Expresión del campo de Maxwell cuantizado:

$$\hat{A}_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left[\hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})^* e^{ikx} \right] ,$$

  donde $k^2 = 0$, $\left[\hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}\right] = -\eta^{\lambda\lambda'}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ y todos los otros se anulan.Los vectores de polarización son ortonormales entre sí. $\epsilon^{(0)}$ es temporal, mientras que los otros son espaciales. $\epsilon^{(1)}$ y $\epsilon^{(2)}$ son ortogonales a k, mientras que $\epsilon^{(0)} + \epsilon^{(3)}$ es proporcional a k.

Repaso

- El campo de Maxwell (masa nula, helicidad 1) es invariante de gauge y como consecuencia de esto tiene dos grados de libertad. A nivel cuántico describe el fotón (partícula mediadora de la electrodinámica cuántica).

- Expresión del campo de Maxwell cuantizado:

$$\hat{A}_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left[\hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})^* e^{ikx} \right] \,,$$

  donde $k^2 = 0$, $\left[\hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger} \right] = -\eta^{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ y todos los otros se anulan.Los vectores de polarización son ortonormales entre sí. $\epsilon^{(0)}$ es temporal, mientras que los otros son espaciales. $\epsilon^{(1)}$ y $\epsilon^{(2)}$ son ortogonales a k, mientras que $\epsilon^{(0)} + \epsilon^{(3)}$ es proporcional a k.

- Aparecen estados de norma negativa

$$\langle 1_{\mathbf{k},\lambda} | \, 1_{\mathbf{k},\lambda} \rangle = \langle 0 | \, \hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)} \hat{a}_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger} \, | 0 \rangle = -\eta^{\lambda\lambda} \delta^3(\mathbf{0}) \,, \tag{1}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Tenemos estados de norma negativa debido a los fotones escalares, es decir, no tenemos un espacio de Hilbert y por otro lado ya no podemos fijar el gauge de Lorenz pues $\hat{A}^\mu$ es un operador y no vale que $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$.

Condición de Gupta-Bleuler

Tenemos estados de norma negativa debido a los fotones escalares, es decir, no tenemos un espacio de Hilbert y por otro lado ya no podemos fijar el gauge de Lorenz pues $\hat{A}^\mu$ es un operador y no vale que $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$.Pero podríamos pensar que lo único que observa en el laboratorio al final del día son valores medios (es la razón por la que el picture de Heisenberg y Schrodinger son equivalentes) con lo cual quizás baste pedir que

$$\langle \psi | \partial_\mu \hat{A}^\mu | \psi \rangle = 0 \tag{2}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Tenemos estados de norma negativa debido a los fotones escalares, es decir, no tenemos un espacio de Hilbert y por otro lado ya no podemos fijar el gauge de Lorenz pues $\hat{A}^\mu$ es un operador y no vale que $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$.Pero podríamos pensar que lo único que observa en el laboratorio al final del día son valores medios (es la razón por la que el picture de Heisenberg y Schrodinger son equivalentes) con lo cual quizás baste pedir que

$$\langle \psi | \partial_\mu \hat{A}^\mu | \psi \rangle = 0 \tag{2}$$

y ya que no podemos hacer nada sobre $\partial_\mu \hat{A}^\mu$, podemos restringir nuestro espacio de estados a aquellos que verifiquen esta condición.

Condición de Gupta-Bleuler

Pero hay un problema porque esta condición no nos garantiza que los estados que la satisfacen formen un espacio vectorial como quisiéramos.

Condición de Gupta-Bleuler

Pero hay un problema porque esta condición no nos garantiza que los estados que la satisfacen formen un espacio vectorial como quisiéramos.

Veamos por qué no. Supongamos que $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ satisfacen ec.(2) y tratemos de probar que $|\psi\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle$ también la cumple

Condición de Gupta-Bleuler

Pero hay un problema porque esta condición no nos garantiza que los estados que la satisfacen formen un espacio vectorial como quisiéramos.

Veamos por qué no. Supongamos que $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ satisfacen ec.(2) y tratemos de probar que $|\psi\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle$ también la cumple

$$\langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\psi\rangle = \cancel{\langle\alpha|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle} + \langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle + \langle\alpha|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\beta\rangle + \cancel{\langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\beta\rangle} \tag{3}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Pero hay un problema porque esta condición no nos garantiza que los estados que la satisfacen formen un espacio vectorial como quisiéramos.

Veamos por qué no. Supongamos que $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ satisfacen ec.(2) y tratemos de probar que $|\psi\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle$ también la cumple

$$\langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\psi\rangle = \cancel{\langle\alpha|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle} + \langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle + \langle\alpha|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\beta\rangle + \cancel{\langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\beta\rangle} \tag{3}$$

$$= \langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle + \langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle^* \tag{4}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Pero hay un problema porque esta condición no nos garantiza que los estados que la satisfacen formen un espacio vectorial como quisiéramos.

Veamos por qué no. Supongamos que $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ satisfacen ec.(2) y tratemos de probar que $|\psi\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle$ también la cumple

$$\langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\psi\rangle = \cancel{\langle\alpha|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle} + \langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle + \langle\alpha|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\beta\rangle + \cancel{\langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\beta\rangle} \tag{3}$$

$$= \langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle + \langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle^* \tag{4}$$

$$= \Re\langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle \neq 0, \tag{5}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Pero hay un problema porque esta condición no nos garantiza que los estados que la satisfacen formen un espacio vectorial como quisiéramos.

Veamos por qué no. Supongamos que $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ satisfacen ec.(2) y tratemos de probar que $|\psi\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle$ también la cumple

$$\langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\psi\rangle = \cancel{\langle\alpha|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle} + \langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle + \langle\alpha|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\beta\rangle + \cancel{\langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\beta\rangle} \tag{3}$$

$$= \langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle + \langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle^* \tag{4}$$

$$= \Re\langle\beta|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\alpha\rangle \neq 0, \tag{5}$$

vemos que esto no es posible. Entonces la condición del valor medio no nos permite obtener un espacio vectorial.

Condición de Gupta-Bleuler

La estrategia es entonces buscar una condición que implique esto y además dé como resultado un espacio vectorial.

Condición de Gupta-Bleuler

La estrategia es entonces buscar una condición que implique esto y además dé como resultado un espacio vectorial.Para eso podemos descomponer al campo como

$$A^{\mu} = A^{\mu}_{+} + A^{\mu}_{-} \tag{6}$$

siendo

$$A^{\mu}_{+} = \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon^{(\lambda)}_{\mu}(\mathbf{k}') a^{(\lambda)}_{\mathbf{k}'} \tag{7}$$

y $A^{\mu}_{-} = A^{\mu\dagger}_{+}$.

Condición de Gupta-Bleuler

La estrategia es entonces buscar una condición que implique esto y además dé como resultado un espacio vectorial.Para eso podemos descomponer al campo como

$$A^{\mu} = A^{\mu}_{+} + A^{\mu}_{-} \tag{6}$$

siendo

$$A^{\mu}_{+} = \int \frac{d^3\mathbf{k'}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon^{(\lambda)}_{\mu}(\mathbf{k'}) a^{(\lambda)}_{\mathbf{k'}} \tag{7}$$

y $A^{\mu}_{-} = A^{\mu\dagger}_{+}$.Escribimos entonces

$$0 = \langle\psi|\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu}|\psi\rangle = \langle\psi|\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu}_{+}|\psi\rangle + \langle\psi|\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu}_{-}|\psi\rangle \tag{8}$$

Condición de Gupta-Bleuler

La estrategia es entonces buscar una condición que implique esto y además dé como resultado un espacio vectorial.Para eso podemos descomponer al campo como

$$A^\mu = A^\mu_+ + A^\mu_- \tag{6}$$

siendo

$$A^\mu_+ = \int \frac{d^3\mathbf{k'}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k'}) a^{(\lambda)}_{\mathbf{k'}} \tag{7}$$

y $A^\mu_- = A^{\mu\dagger}_+$.Escribimos entonces

$$0 = \langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\psi\rangle = \langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu_+|\psi\rangle + \langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu_-|\psi\rangle \tag{8}$$

$$= \Big(|\psi\rangle, \partial_\mu \hat{A}^\mu_+|\psi\rangle\Big) + \Big(|\psi\rangle, \partial_\mu \hat{A}^\mu_-|\psi\rangle\Big) \tag{9}$$

Condición de Gupta-Bleuler

La estrategia es entonces buscar una condición que implique esto y además dé como resultado un espacio vectorial.Para eso podemos descomponer al campo como

$$A^\mu = A^\mu_+ + A^\mu_- \tag{6}$$

siendo

$$A^\mu_+ = \int \frac{d^3\mathbf{k'}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k'}) a^{(\lambda)}_{\mathbf{k'}} \tag{7}$$

y $A^\mu_- = A^{\mu\dagger}_+$.Escribimos entonces

$$0 = \langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\psi\rangle = \langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu_+|\psi\rangle + \langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu_-|\psi\rangle \tag{8}$$

$$= \Big(|\psi\rangle, \partial_\mu \hat{A}^\mu_+|\psi\rangle\Big) + \Big(|\psi\rangle, \partial_\mu \hat{A}^\mu_-|\psi\rangle\Big) \tag{9}$$

$$= \Big(|\psi\rangle, \partial_\mu \hat{A}^\mu_+|\psi\rangle\Big) + \Big(|\psi\rangle, \partial_\mu \hat{A}^\mu_+|\psi\rangle\Big)^*. \tag{10}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Basta entonces quedarnos con los estados $|\psi\rangle$ que satisfacen la condición

$$\boxed{\partial_\mu \hat{A}^\mu_+ |\psi\rangle = 0}, \tag{11}$$

los cuales, además, es fácil ver que forman un espacio vectorial.

Condición de Gupta-Bleuler

Basta entonces quedarnos con los estados $|\psi\rangle$ que satisfacen la condición

$$\boxed{\partial_\mu \hat{A}^\mu_+ |\psi\rangle = 0}, \tag{11}$$

los cuales, además, es fácil ver que forman un espacio vectorial.

Supongamos que $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ satisfacen ec.(11) y tratemos de probar que $|\psi\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle$ también la cumple

Condición de Gupta-Bleuler

Basta entonces quedarnos con los estados $|\psi\rangle$ que satisfacen la condición

$$\boxed{\partial_\mu \hat{A}^\mu_+ |\psi\rangle = 0}, \tag{11}$$

los cuales, además, es fácil ver que forman un espacio vectorial.

Supongamos que $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ satisfacen ec.(11) y tratemos de probar que $|\psi\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle$ también la cumple

$$\partial_\mu \hat{A}^\mu_+ |\psi\rangle = \partial_\mu \hat{A}^\mu_+ |\alpha\rangle + \partial_\mu \hat{A}^\mu_+ |\beta\rangle = 0 + 0. \tag{12}$$

Condición de Gupta-Bleuler

(Práctica 5, Ejercicio 58) *El problema que mencionamos en el ejercicio anterior se resuelve parcialmente imponiendo la condición II) sobre ciertos estados (condición de estado físico), lo cual deja aún estados con norma 0. Estos últimos representan estados que son "puro gauge" (y por lo tanto, uno hace un cociente y los identifica como equivalentes al cero). La versión precisa de esta condición (Gupta-Bleuler) es:*

$$\partial_\mu \hat{A}^\mu_+ \left|\Psi\right\rangle = 0$$

siendo $\hat{A}^\mu_+$ la parte de aniquilación (frecuencia positiva) de $\hat{A}^\mu$.

Condición de Gupta-Bleuler

1. *Verifique la condición de Gupta-Bleuler se cumple para para estados* $|\Psi\rangle$ *que provengan de actuar sobre el vacío con la combinación* $\hat{a}^{(3)\dagger} - \hat{a}^{(0)\dagger}$*, los cuales contienen pares de modos longitudinal (*$\lambda = 3$*) y temporal (o escalar) (*$\lambda = 0$*).*

Condición de Gupta-Bleuler

1. *Verifique la condición de Gupta-Bleuler se cumple para para estados $|\Psi\rangle$ que provengan de actuar sobre el vacío con la combinación $\hat{a}^{(3)\dagger} - \hat{a}^{(0)\dagger}$, los cuales contienen pares de modos longitudinal ($\lambda = 3$) y temporal (o escalar) ($\lambda = 0$).*

Reemplazando la expresión explícita de A_+^μ podemos reescribir la condición anterior como

$$\partial_\mu \hat{A}_+^\mu |\Psi\rangle = 0 \tag{13}$$

Condición de Gupta-Bleuler

1. *Verifique la condición de Gupta-Bleuler se cumple para para estados $|\Psi\rangle$ que provengan de actuar sobre el vacío con la combinación $\hat{a}^{(3)\dagger} - \hat{a}^{(0)\dagger}$, los cuales contienen pares de modos longitudinal ($\lambda = 3$) y temporal (o escalar) ($\lambda = 0$).*

Reemplazando la expresión explícita de A_+^μ podemos reescribir la condición anterior como

$$\partial_\mu \hat{A}_+^\mu |\Psi\rangle = 0 \tag{13}$$

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx} \sum_{\lambda=0}^{3} k\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} |\psi\rangle = 0 \tag{14}$$

Condición de Gupta-Bleuler

1. *Verifique la condición de Gupta-Bleuler se cumple para para estados $|\Psi\rangle$ que provengan de actuar sobre el vacío con la combinación $\hat{a}^{(3)\dagger} - \hat{a}^{(0)\dagger}$, los cuales contienen pares de modos longitudinal ($\lambda = 3$) y temporal (o escalar) ($\lambda = 0$).*

Reemplazando la expresión explícita de A_+^μ podemos reescribir la condición anterior como

$$\partial_\mu \hat{A}_+^\mu |\Psi\rangle = 0 \tag{13}$$

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx} \sum_{\lambda=0}^{3} k\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} |\psi\rangle = 0 \tag{14}$$

Si usamos que $k \cdot \epsilon^{(1)}(\mathbf{k}) = k \cdot \epsilon^{(2)}(\mathbf{k}) = 0$ y $k \cdot \epsilon^{(0)}(\mathbf{k}) = -k \cdot \epsilon^{(3)}(\mathbf{k})$,

Condición de Gupta-Bleuler

1. *Verifique la condición de Gupta-Bleuler se cumple para para estados $|\Psi\rangle$ que provengan de actuar sobre el vacío con la combinación $\hat{a}^{(3)\dagger} - \hat{a}^{(0)\dagger}$, los cuales contienen pares de modos longitudinal ($\lambda = 3$) y temporal (o escalar) ($\lambda = 0$).*

Reemplazando la expresión explícita de A_+^μ podemos reescribir la condición anterior como

$$\partial_\mu \hat{A}_+^\mu |\Psi\rangle = 0 \tag{13}$$

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx} \sum_{\lambda=0}^{3} k\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} |\psi\rangle = 0 \tag{14}$$

Si usamos que $k \cdot \epsilon^{(1)}(\mathbf{k}) = k \cdot \epsilon^{(2)}(\mathbf{k}) = 0$ y $k \cdot \epsilon^{(0)}(\mathbf{k}) = -k \cdot \epsilon^{(3)}(\mathbf{k})$,tenemos

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx} \sum_{\lambda=0}^{3} k\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \left[a_{\mathbf{k}}^{(3)} - a_{\mathbf{k}}^{(0)}\right] |\psi\rangle = 0. \tag{15}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Entonces, usando que las exponenciales complejas son linealmente independientes, tenemos que los *estados físicos* son aquellos que satisfacen

$$\boxed{L_{\mathbf{k}}|\psi\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k}}, \tag{16}$$

siendo

$$\boxed{L_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^{(3)} - a_{\mathbf{k}}^{(0)}}. \tag{17}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Antes de seguir notemos algunas propiedades de este operador que serán útiles más adelante:

1. $L_{\mathbf{k}}|0\rangle = \langle 0|L_{\mathbf{k}}^{\dagger} = 0$

Condición de Gupta-Bleuler

Antes de seguir notemos algunas propiedades de este operador que serán útiles más adelante:

1. $L_{\mathbf{k}}|0\rangle = \langle 0|L^{\dagger}_{\mathbf{k}} = 0$

2. $\boxed{[L_{\mathbf{k}}, L_{\mathbf{k}'}]} = \left[a^{(3)}_{\mathbf{k}}, a^{(3)}_{\mathbf{k}'}\right] - \left[a^{(3)}_{\mathbf{k}}, a^{(0)}_{\mathbf{k}'}\right] - \left[a^{(0)}_{\mathbf{k}}, a^{(3)}_{\mathbf{k}'}\right] + \left[a^{(0)}_{\mathbf{k}}, a^{(0)}_{\mathbf{k}'}\right] \boxed{= 0}$

Condición de Gupta-Bleuler

Antes de seguir notemos algunas propiedades de este operador que serán útiles más adelante:

1. $L_{\mathbf{k}}|0\rangle = \langle 0|L_{\mathbf{k}}^{\dagger} = 0$

2. $\boxed{[L_{\mathbf{k}}, L_{\mathbf{k}'}]} = \left[a_{\mathbf{k}}^{(3)}, a_{\mathbf{k}'}^{(3)}\right] - \left[a_{\mathbf{k}}^{(3)}, a_{\mathbf{k}'}^{(0)}\right] - \left[a_{\mathbf{k}}^{(0)}, a_{\mathbf{k}'}^{(3)}\right] + \left[a_{\mathbf{k}}^{(0)}, a_{\mathbf{k}'}^{(0)}\right] \boxed{= 0}$

3. $\boxed{\left[L_{\mathbf{k}}, L_{\mathbf{k}'}^{\dagger}\right]} = \left[a_{\mathbf{k}}^{(3)}, a_{\mathbf{k}'}^{(3)\dagger}\right] - \cancel{\left[a_{\mathbf{k}}^{(3)}, a_{\mathbf{k}'}^{(0)\dagger}\right]} - \cancel{\left[a_{\mathbf{k}}^{(0)}, a_{\mathbf{k}'}^{(3)\dagger}\right]} + \left[a_{\mathbf{k}}^{(0)}, a_{\mathbf{k}'}^{(0)\dagger}\right] = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') - \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \boxed{= 0}$

Condición de Gupta-Bleuler

Antes de seguir notemos algunas propiedades de este operador que serán útiles más adelante:

1. $L_{\mathbf{k}}|0\rangle = \langle 0|L_{\mathbf{k}}^{\dagger} = 0$

2. $\boxed{[L_{\mathbf{k}}, L_{\mathbf{k}'}]} = \left[a_{\mathbf{k}}^{(3)}, a_{\mathbf{k}'}^{(3)}\right] - \left[a_{\mathbf{k}}^{(3)}, a_{\mathbf{k}'}^{(0)}\right] - \left[a_{\mathbf{k}}^{(0)}, a_{\mathbf{k}'}^{(3)}\right] + \left[a_{\mathbf{k}}^{(0)}, a_{\mathbf{k}'}^{(0)}\right] \boxed{= 0}$

3. $\boxed{\left[L_{\mathbf{k}}, L_{\mathbf{k}'}^{\dagger}\right]} = \left[a_{\mathbf{k}}^{(3)}, a_{\mathbf{k}'}^{(3)\dagger}\right] - \cancel{\left[a_{\mathbf{k}}^{(3)}, a_{\mathbf{k}'}^{(0)\dagger}\right]} - \cancel{\left[a_{\mathbf{k}}^{(0)}, a_{\mathbf{k}'}^{(3)\dagger}\right]} + \left[a_{\mathbf{k}}^{(0)}, a_{\mathbf{k}'}^{(0)\dagger}\right] = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') - \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \boxed{= 0}$

4. $\boxed{\left[a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda)}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right]} = \left[a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda)}, a_{\mathbf{k}}^{(3)\dagger}\right] - \left[a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda)}, a_{\mathbf{k}}^{(0)\dagger}\right] \boxed{= -\eta^{\lambda 3}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') + \eta^{\lambda 0}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')}$

Condición de Gupta-Bleuler

5.

$$\left[A^{\mu}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right] = \left[A_{+}^{\mu}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right] = \int \frac{d^3\mathbf{k'}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{k'}) \left[a_{\mathbf{k'}}^{(\lambda)}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right]$$

Condición de Gupta-Bleuler

5.

$$\left[A^\mu, L_{\mathbf{k}}^\dagger\right] = \left[A_+^\mu, L_{\mathbf{k}}^\dagger\right] = \int \frac{d^3\mathbf{k'}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k'}) \left[a_{\mathbf{k'}}^{(\lambda)}, L_{\mathbf{k}}^\dagger\right]$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k'}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k'}) \left[a_{\mathbf{k'}}^{(\lambda)}, L_{\mathbf{k}}^\dagger\right]$$

5.

$$\left[A^{\mu}, L^{\dagger}_{\mathbf{k}}\right] = \left[A^{\mu}_{+}, L^{\dagger}_{\mathbf{k}}\right] = \int \frac{d^3\mathbf{k'}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon^{(\lambda)}_{\mu}(\mathbf{k'}) \left[a^{(\lambda)}_{\mathbf{k'}}, L^{\dagger}_{\mathbf{k}}\right]$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k'}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon^{(\lambda)}_{\mu}(\mathbf{k'}) \left[a^{(\lambda)}_{\mathbf{k'}}, L^{\dagger}_{\mathbf{k}}\right]$$

Usando 4 y que

$$\sum_{\lambda=0,3} \epsilon^{(\lambda)}_{\mu}(\mathbf{k}) = \epsilon^{(0)}_{\mu}(\mathbf{k}) + \epsilon^{(3)}_{\mu}(\mathbf{k}) = n_{\mu} + \frac{k_{\mu} - n_{\mu}(k \cdot n)}{k \cdot n} = \frac{k_{\mu}}{k \cdot n},$$

5.

$$\left[A^{\mu}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right] = \left[A_{+}^{\mu}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right] = \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{k}') \left[a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda)}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right]$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{k}') \left[a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda)}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right]$$

Usando 4 y que

$$\sum_{\lambda=0,3} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = \epsilon_{\mu}^{(0)}(\mathbf{k}) + \epsilon_{\mu}^{(3)}(\mathbf{k}) = n_{\mu} + \frac{k_{\mu} - n_{\mu}(k \cdot n)}{k \cdot n} = \frac{k_{\mu}}{k \cdot n},$$

tenemos

$$\boxed{\left[A^{\mu}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx} \frac{k_{\mu}}{k \cdot n}} \tag{18}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Veamos ahora cómo caracterizar los estados físicos. Un estado arbitrario del espacio completo será una combinación de elementos de la forma

$$|\psi\rangle = f(a_{\mathbf{k}}^{(0)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(3)\dagger})|0\rangle, \tag{19}$$

siendo f alguna función analítica en cada argumento (f podría ser función de todos los $\mathbf{k}$).

Condición de Gupta-Bleuler

Veamos ahora cómo caracterizar los estados físicos. Un estado arbitrario del espacio completo será una combinación de elementos de la forma

$$|\psi\rangle = f(a_{\mathbf{k}}^{(0)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(3)\dagger})|0\rangle, \tag{19}$$

siendo f alguna función analítica en cada argumento (f podría ser función de todos los $\mathbf{k}$).

Si definimos

$$\boxed{T_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^{(3)} + a_{\mathbf{k}}^{(0)}}, \tag{20}$$

Veamos ahora cómo caracterizar los estados físicos. Un estado arbitrario del espacio completo será una combinación de elementos de la forma

$$|\psi\rangle = f(a_{\mathbf{k}}^{(0)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(3)\dagger})|0\rangle, \tag{19}$$

siendo f alguna función analítica en cada argumento (f podría ser función de todos los $\mathbf{k}$).

Si definimos

$$\boxed{T_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^{(3)} + a_{\mathbf{k}}^{(0)}}, \tag{20}$$

podemos escribir

$$|\psi\rangle = g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger})|0\rangle, \tag{21}$$

Veamos ahora cómo caracterizar los estados físicos. Un estado arbitrario del espacio completo será una combinación de elementos de la forma

$$|\psi\rangle = f(a_{\mathbf{k}}^{(0)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(3)\dagger})|0\rangle, \tag{19}$$

siendo f alguna función analítica en cada argumento (f podría ser función de todos los $\mathbf{k}$).

Si definimos

$$\boxed{T_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^{(3)} + a_{\mathbf{k}}^{(0)}}, \tag{20}$$

podemos escribir

$$|\psi\rangle = g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger})|0\rangle, \tag{21}$$

siendo $g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}) = f\left(\left(T_{\mathbf{k}}^{\dagger} + L_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right)/2, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, \left(L_{\mathbf{k}}^{\dagger} - T_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right)/2\right)$.

Condición de Gupta-Bleuler

Podemos escribir entonces la condición de estado físico como

$$\begin{aligned} 0 =& L_{\mathbf{k}}|\psi\rangle = L_{\mathbf{k}} g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger})|0\rangle && (22) \\ =& \left[L_{\mathbf{k}}, g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger})\right]|0\rangle + \cancel{g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}) L_{\mathbf{k}}|0\rangle} && (23) \end{aligned}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Podemos escribir entonces la condición de estado físico como

$$0 = L_{\mathbf{k}}|\psi\rangle = L_{\mathbf{k}} g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger})|0\rangle \tag{22}$$

$$= \left[L_{\mathbf{k}}, g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger})\right]|0\rangle + \cancel{g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger})L_{\mathbf{k}}|0\rangle} \tag{23}$$

Ahora podemos usar la propiedad que vieron en teórica 2

$$[f(A), B] = \frac{df(A)}{dA}[A, B] \tag{24}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Podemos escribir entonces la condición de estado físico como

$$0 = L_{\mathbf{k}}|\psi\rangle = L_{\mathbf{k}} g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger})|0\rangle \tag{22}$$

$$= \left[L_{\mathbf{k}}, g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger})\right]|0\rangle + \cancel{g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}) L_{\mathbf{k}}|0\rangle} \tag{23}$$

Ahora podemos usar la propiedad que vieron en teórica 2

$$[f(A), B] = \frac{df(A)}{dA}[A, B] \tag{24}$$

Usando la propiedad 2 y que

$$\left[L_{\mathbf{k}}, T_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right] = \left[a_{\mathbf{k}}^{(3)} - a_{\mathbf{k}}^{(0)}, a_{\mathbf{k}}^{(3)\dagger} + a_{\mathbf{k}}^{(0)\dagger}\right] \tag{25}$$

$$= \left[a_{\mathbf{k}}^{(3)}, a_{\mathbf{k}}^{(3)\dagger}\right] + \left[a_{\mathbf{k}}^{(3)}, a_{\mathbf{k}}^{(0)\dagger}\right] + \left[-a_{\mathbf{k}}^{(0)}, a_{\mathbf{k}}^{(3)\dagger}\right] + \left[-a_{\mathbf{k}}^{(0)}, a_{\mathbf{k}}^{(0)\dagger}\right] \tag{26}$$

$$= \delta(\mathbf{0}) + 0 + 0 + \delta(\mathbf{0}) = 2\delta(\mathbf{0}), \tag{27}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Podemos escribir entonces la condición de estado físico como

$$\begin{aligned} 0 =& L_{\mathbf{k}}|\psi\rangle = L_{\mathbf{k}} g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger})|0\rangle && (22)\\ =& \left[L_{\mathbf{k}}, g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger})\right]|0\rangle + \cancel{g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}) L_{\mathbf{k}}|0\rangle} && (23) \end{aligned}$$

Ahora podemos usar la propiedad que vieron en teórica 2

$$[f(A), B] = \frac{df(A)}{dA}[A, B] \qquad (24)$$

Usando la propiedad 2 y que

$$\begin{aligned} \left[L_{\mathbf{k}}, T_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right] =& \left[a_{\mathbf{k}}^{(3)} - a_{\mathbf{k}}^{(0)}, a_{\mathbf{k}}^{(3)\dagger} + a_{\mathbf{k}}^{(0)\dagger}\right] && (25)\\ =& \left[a_{\mathbf{k}}^{(3)}, a_{\mathbf{k}}^{(3)\dagger}\right] + \left[a_{\mathbf{k}}^{(3)}, a_{\mathbf{k}}^{(0)\dagger}\right] + \left[-a_{\mathbf{k}}^{(0)}, a_{\mathbf{k}}^{(3)\dagger}\right] + \left[-a_{\mathbf{k}}^{(0)}, a_{\mathbf{k}}^{(0)\dagger}\right] && (26)\\ =& \delta(\mathbf{0}) + 0 + 0 + \delta(\mathbf{0}) = 2\delta(\mathbf{0}), && (27) \end{aligned}$$

obtenemos

$$0 = \frac{\partial}{\partial T_{\mathbf{k}}^{\dagger}} g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}) \left[L_{\mathbf{k}}, T_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right]|0\rangle = 2\delta(\mathbf{0}) \frac{\partial}{\partial T_{\mathbf{k}}^{\dagger}} g(T_{\mathbf{k}'}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}'}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}'}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger})|0\rangle \qquad (28)$$

La condición anterior implica que

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial T^\dagger_{\mathbf{k}}} g(T^\dagger_{\mathbf{k}}, a^{(1)\dagger}_{\mathbf{k}}, a^{(2)\dagger}_{\mathbf{k}}, L^\dagger_{\mathbf{k}}) = 0}, \tag{29}$$

La condición anterior implica que

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial T_{\mathbf{k}}^{\dagger}} g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}) = 0}, \tag{29}$$

es decir, que los estados físicos se forman actuando sobre el vacío solo con los operadores $a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}$.

Condición de Gupta-Bleuler

La condición anterior implica que

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial T_{\mathbf{k}}^{\dagger}} g(T_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}) = 0}, \tag{29}$$

es decir, que los estados físicos se forman actuando sobre el vacío solo con los operadores $a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}$.Así el estado físico más general serán c.l. de estados de la forma

$$|\psi\rangle = R_F|\psi_T\rangle, \tag{30}$$

siendo $|\psi_T\rangle = f\left(a_{\mathbf{k}}^{(1)\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{(2)\dagger}\right)|0\rangle$ un estado de fotones transversales y

$$R_F = 1 + \int d^3\mathbf{k} c_1(\mathbf{k}) L_{\mathbf{k}}^{\dagger} + \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' c_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') L_{\mathbf{k}}^{\dagger} L_{\mathbf{k}'}^{\dagger} + ... \tag{31}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Notemos que esto resuelve el primer ítem del ejercicio pues $L^\dagger_{\mathbf{k}}|0\rangle$ es en particular un estado físico y por la cuenta anterior verifica que

$$\partial_\mu A^\mu_+ \left(L^\dagger_{\mathbf{k}}|0\rangle \right) = 0. \tag{32}$$

Que llamemos a estos estados físicos debería incomodarlos bastante dado que contienen fotones escalares y longitudinales que no se han visto nunca.

2 *Muestre que el valor de espectación de* $\hat{A}$ *en* $|\Psi\rangle$ *y* $|\Psi'\rangle \equiv (1 + \int c(k)(\hat{a}_k^{(3)\dagger} - \hat{a}_k^{(1)\dagger}))d^3k\,|\Psi\rangle$ *(con* $c(k)$ *una función de los momentos) difieren en el gradiente de una función.*

Condición de Gupta-Bleuler

2 *Muestre que el valor de espectación de* $\hat{A}$ *en* $|\Psi\rangle$ *y* $|\Psi'\rangle \equiv (1 + \int c(k)(\hat{a}_k^{(3)\dagger} - \hat{a}_k^{(1)\dagger}))d^3k\,|\Psi\rangle$ *(con* $c(k)$ *una función de los momentos) difieren en el gradiente de una función. Observación: este último ítem ilustra que* $\int c(k)(\hat{a}_k^{(3)\dagger} - \hat{a}_k^{(1)\dagger})d^3k\,|\Psi\rangle$ *corresponde a una estado puro gauge, que en efecto es un estado de norma cero. El espacio de Hilbert (con producto interno definido positivo) se obtiene cuando se declaran equivalentes a estados que difieren en un estado nulo.*

Condición de Gupta-Bleuler

Podemos ver que estos fotones escalares y longitudinales no generan ningún efecto observable. Para ello consideremos un estado $|\Psi\rangle$ de la forma

$$|\Psi\rangle = |\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c(\mathbf{k}) L^{\dagger}_{\mathbf{k}} |\Psi_T\rangle, \tag{33}$$

Podemos ver que estos fotones escalares y longitudinales no generan ningún efecto observable. Para ello consideremos un estado $|\Psi\rangle$ de la forma

$$|\Psi\rangle = |\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} c(\mathbf{k}) L^\dagger_\mathbf{k} |\Psi_T\rangle, \tag{33}$$

y calculemos

$$\begin{aligned}\langle\Psi|A^\mu|\Psi\rangle =& \langle\Psi_T|A^\mu|\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} c^*(\mathbf{k}) \langle\Psi_T|L_\mathbf{k} A^\mu|\Psi_T\rangle \\ &+ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} c(\mathbf{k}) \langle\Psi_T|A^\mu L^\dagger_\mathbf{k}|\Psi_T\rangle + \int\int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \frac{c^*(\mathbf{k})c(\mathbf{k}')}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \langle\Psi_T|L_\mathbf{k} A^\mu L^\dagger_{\mathbf{k}'}|\Psi_T\rangle.\end{aligned} \tag{34}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Ahora podemos usar que

$$L_{\mathbf{k}}|\Psi_T\rangle = \langle\Psi_T|L_{\mathbf{k}}^{\dagger} = 0 \tag{35}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Ahora podemos usar que

$$L_{\mathbf{k}}|\Psi_T\rangle = \langle\Psi_T|L_{\mathbf{k}}^\dagger = 0 \tag{35}$$

para escribir

$$\begin{aligned}\langle\Psi|A^\mu|\Psi\rangle &= \langle\Psi_T|A^\mu|\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c^*(\mathbf{k})\langle\Psi_T|\left[L_{\mathbf{k}}, A^\mu\right]|\Psi_T\rangle \\ &+ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c(\mathbf{k})\langle\Psi_T|\left[A^\mu, L_{\mathbf{k}}^\dagger\right]|\Psi_T\rangle + \int\int \frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{c^{/}(\mathbf{k})c(\mathbf{k}')}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\langle\Psi_T|L_{\mathbf{k}}\left[A^\mu, L_{\mathbf{k}'}^\dagger\right]|\Psi_T\rangle.\end{aligned} \tag{36}$$

Condición de Gupta-Bleuler

El último término de esta expresión se anula porque como $\left[A^{\mu}, L_{\mathbf{k}'}^{\dagger}\right] \in \mathbb{C}$ conmuta con $L_{\mathbf{k}}$ y tenemos

$$\langle\Psi_T|A^{\mu}|\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c^*(\mathbf{k})\langle\Psi_T|\left[A^{\mu}, L_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right]^{\dagger}|\Psi_T\rangle$$
$$+\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c(\mathbf{k})\langle\Psi_T|\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx}\frac{k_{\mu}}{k\cdot n}|\Psi_T\rangle \tag{37}$$

Condición de Gupta-Bleuler

El último término de esta expresión se anula porque como $\left[A^\mu, L^\dagger_{\mathbf{k}'}\right] \in \mathbb{C}$ conmuta con $L_{\mathbf{k}}$ y tenemos

$$\begin{aligned}\langle\Psi_T|A^\mu|\Psi_T\rangle &+ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c^*(\mathbf{k})\langle\Psi_T|\left[A^\mu, L^\dagger_{\mathbf{k}}\right]^\dagger|\Psi_T\rangle \\ &+ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c(\mathbf{k})\langle\Psi_T|\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx}\frac{k_\mu}{k\cdot n}|\Psi_T\rangle \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}=&\langle\Psi_T|A^\mu|\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c^*(\mathbf{k})\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{ikx}\frac{k_\mu}{k\cdot n} \\ &+ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c(\mathbf{k})\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx}\frac{k_\mu}{k\cdot n} \end{aligned} \tag{38}$$

Condición de Gupta-Bleuler

El último término de esta expresión se anula porque como $\left[A^\mu, L^\dagger_{\mathbf{k}'}\right] \in \mathbb{C}$ conmuta con $L_{\mathbf{k}}$ y tenemos

$$\begin{aligned}\langle\Psi_T|A^\mu|\Psi_T\rangle &+ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c^*(\mathbf{k})\langle\Psi_T|\left[A^\mu, L^\dagger_{\mathbf{k}}\right]^\dagger|\Psi_T\rangle \\ &+ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c(\mathbf{k})\langle\Psi_T|\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx}\frac{k_\mu}{k\cdot n}|\Psi_T\rangle\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}=&\langle\Psi_T|A^\mu|\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c^*(\mathbf{k})\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{ikx}\frac{k_\mu}{k\cdot n} \\ &+ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c(\mathbf{k})\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx}\frac{k_\mu}{k\cdot n}\end{aligned} \tag{38}$$

$$=\langle\Psi_T|A^\mu|\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{k_\mu}{k\cdot n}\left[c^*(\mathbf{k})e^{ikx} + c(\mathbf{k})e^{-ikx}\right]$$

$$\implies \boxed{\langle\Psi|A^\mu|\Psi\rangle = \langle\Psi_T|A^\mu|\Psi_T\rangle + \partial_\mu\Lambda} \tag{39}$$

siendo

$$\Lambda = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\frac{i}{k\cdot n}\left[c(\mathbf{k})e^{-ikx} - c^*(\mathbf{k})e^{ikx}\right]. \tag{40}$$

Condición de Gupta-Bleuler

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\langle\Psi|A^{\mu}|\Psi\rangle = \langle\Psi_T|A^{\mu}|\Psi_T\rangle + \partial_{\mu}\Lambda} \tag{39}$$

siendo

$$\Lambda = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{i}{k\cdot n}\left[c(\mathbf{k})e^{-ikx} - c^*(\mathbf{k})e^{ikx}\right]. \tag{40}$$

Esto no solo resuelve el ejercicio sino que además prueba que solo los fotones transversales tienen un efecto observable, dado que los escalares y longitudinales solo generan una transformación de gauge sobre el valor medio del campo (el resultado es el mismo si hubiesemos considerado los estado físicos más generales $|\psi_F\rangle = R_F|\psi_T\rangle$).

Condición de Gupta-Bleuler

Nos queda todavía el problema de los estados de norma negativa que mencionamos al comienzo.

Condición de Gupta-Bleuler

Nos queda todavía el problema de los estados de norma negativa que mencionamos al comienzo.Para ello podemos notar que hasta la ecuación (36) no usamos ninguna propiedad sobre A^{μ}, es decir, que puede ser cualquier operador.

Condición de Gupta-Bleuler

Nos queda todavía el problema de los estados de norma negativa que mencionamos al comienzo.Para ello podemos notar que hasta la ecuación (36) no usamos ninguna propiedad sobre A^μ, es decir, que puede ser cualquier operador.En particular, tomando $A^\mu = \mathsf{Id}$ esa ecuación nos dice que

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\Psi\rangle =& \langle\Psi_T|\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} c^*(\mathbf{k})\langle\Psi_T|\left[L_\mathbf{k}, \mathsf{Id}\right]|\Psi_T\rangle \\ &+ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} c(\mathbf{k})\langle\Psi_T|\left[\mathsf{Id}, L^\dagger_\mathbf{k}\right]|\Psi_T\rangle + \int\int \frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \frac{c^{/}(\mathbf{k})c(\mathbf{k}')}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \langle\Psi_T|L_\mathbf{k}\left[\mathsf{Id}, L^\dagger_{\mathbf{k}'}\right]|\Psi_T\rangle\end{aligned} \tag{41}$$

Condición de Gupta-Bleuler

Nos queda todavía el problema de los estados de norma negativa que mencionamos al comienzo.Para ello podemos notar que hasta la ecuación (36) no usamos ninguna propiedad sobre A^μ, es decir, que puede ser cualquier operador.En particular, tomando $A^\mu = \mathsf{Id}$ esa ecuación nos dice que

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\Psi\rangle =& \langle\Psi_T|\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c^*(\mathbf{k})\langle\Psi_T| \left[L_{\mathbf{k}}, \mathsf{Id}\right] |\Psi_T\rangle \\ &+ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} c(\mathbf{k})\langle\Psi_T| \left[\mathsf{Id}, L^\dagger_{\mathbf{k}}\right] |\Psi_T\rangle + \int\int \frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{c^{/}(\mathbf{k})c(\mathbf{k}')}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \langle\Psi_T|L_{\mathbf{k}} \left[\mathsf{Id}, L^\dagger_{\mathbf{k}'}\right] |\Psi_T\rangle\end{aligned} \tag{41}$$

y como todo operador conmuta con la identidad tenemos

$$\boxed{\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\Psi_T|\Psi_T\rangle}, \tag{42}$$

es decir que la norma de los estados físicos es simplemente la norma de los estados de fotones transversales la cual sí es definida positiva.

Condición de Gupta-Bleuler

Nos queda todavía el problema de los estados de norma negativa que mencionamos al comienzo.Para ello podemos notar que hasta la ecuación (36) no usamos ninguna propiedad sobre A^μ, es decir, que puede ser cualquier operador.En particular, tomando $A^\mu = \text{Id}$ esa ecuación nos dice que

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\Psi\rangle =&\langle\Psi_T|\Psi_T\rangle + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} c^*(\mathbf{k})\langle\Psi_T|\left[L_\mathbf{k}, \text{Id}\right]|\Psi_T\rangle \\ &+ \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} c(\mathbf{k})\langle\Psi_T|\left[\text{Id}, L^\dagger_\mathbf{k}\right]|\Psi_T\rangle + \int\int \frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \frac{c^{/}(\mathbf{k})c(\mathbf{k}')}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\langle\Psi_T|L_\mathbf{k}\left[\text{Id}, L^\dagger_{\mathbf{k}'}\right]|\Psi_T\rangle\end{aligned} \tag{41}$$

y como todo operador conmuta con la identidad tenemos

$$\boxed{\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\Psi_T|\Psi_T\rangle}, \tag{42}$$

es decir que la norma de los estados físicos es simplemente la norma de los estados de fotones transversales la cual sí es definida positiva.Recordemos

$$\langle 1_{\mathbf{k},\lambda}|\, 1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle = \langle 0|\, \hat{a}^{(\lambda)}_\mathbf{k}\hat{a}^{(\lambda)\dagger}_\mathbf{k}\,|0\rangle = -\eta^{\lambda\lambda}\delta^3(\mathbf{0}) = \delta^3(\mathbf{0})\,, \quad \lambda = 1, 2, \tag{43}$$

Condición de Gupta-Bleuler

La conclusión es que el **espacio de Hilbert físico** de nuestra teoría se obtiene quedándonos con los estados que cumplen la **condición de Gupta-Bleuler** e identificando como iguales a los estados que tienen la **misma componente transversal** $|\psi_T\rangle$.

Condición de Gupta-Bleuler

La conclusión es que el **espacio de Hilbert físico** de nuestra teoría se obtiene quedándonos con los estados que cumplen la **condición de Gupta-Bleuler** e identificando como iguales a los estados que tienen la **misma componente transversal** $|\psi_T\rangle$.

Por las cuentas anteriores esto da como resultado un espacio de Hilbert con estados de norma definida positiva en el cual los observables son invariantes de gauge.

Función de dos puntos y propagador

(Práctica 5, Ejercicio 59) *Hallar la función de dos puntos y el propagador del campo de Maxwell en el gauge de Lorentz (notar que la cuenta es muy similar a la del campo escalar complejo).*

$$\begin{aligned}\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle =& \langle 0|\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\sum_{\lambda,\lambda'=0}^{3}\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda')}(\mathbf{k}')[a_\mathbf{k}^{(\lambda)}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')}e^{-i(kx+ky)} \\ &+ a_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')}e^{i(kx-k'y)} + a_\mathbf{k}^{(\lambda)}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}e^{-i(kx-k'y)} + a_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}e^{i(kx+k'y)}]|0\rangle\end{aligned}$$

Función de dos puntos y propagador

(Práctica 5, Ejercicio 59) *Hallar la función de dos puntos y el propagador del campo de Maxwell en el gauge de Lorentz (notar que la cuenta es muy similar a la del campo escalar complejo).*

$$\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \langle 0| \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \sum_{\lambda,\lambda'=0}^{3} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda')}(\mathbf{k}')[a_\mathbf{k}^{(\lambda)} a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')} e^{-i(kx+ky)}$$

$$+ a_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger} a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')} e^{i(kx-k'y)} + a_\mathbf{k}^{(\lambda)} a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger} e^{-i(kx-k'y)} + a_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger} a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger} e^{i(kx+k'y)}]|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \sum_{\lambda,\lambda'=0}^{3} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda')}(\mathbf{k}')\langle 0|a_\mathbf{k}^{(\lambda)} a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}|0\rangle e^{-i(kx-k'y)}$$

Función de dos puntos y propagador

(Práctica 5, Ejercicio 59) *Hallar la función de dos puntos y el propagador del campo de Maxwell en el gauge de Lorentz (notar que la cuenta es muy similar a la del campo escalar complejo).*

$$\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \langle 0|\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\sum_{\lambda,\lambda'=0}^{3}\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda')}(\mathbf{k}')[a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')}e^{-i(kx+ky)}$$

$$+ a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)\dagger}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')}e^{i(kx-k'y)} + a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}e^{-i(kx-k'y)} + a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)\dagger}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}e^{i(kx+k'y)}]|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\sum_{\lambda,\lambda'=0}^{3}\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda')}(\mathbf{k}')\langle 0|a_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}|0\rangle e^{-i(kx-k'y)}$$

$$= -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\sum_{\lambda,\lambda'=0}^{3}\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda')}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\eta_{\lambda\lambda'}e^{-i(kx-k'y)}$$

Función de dos puntos y propagador

(Práctica 5, Ejercicio 59) *Hallar la función de dos puntos y el propagador del campo de Maxwell en el gauge de Lorentz (notar que la cuenta es muy similar a la del campo escalar complejo).*

$$\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \langle 0|\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\sum_{\lambda,\lambda'=0}^{3}\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda')}(\mathbf{k}')[a_\mathbf{k}^{(\lambda)}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')}e^{-i(kx+ky)}$$

$$+ a_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')}e^{i(kx-k'y)} + a_\mathbf{k}^{(\lambda)}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}e^{-i(kx-k'y)} + a_\mathbf{k}^{(\lambda)\dagger}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}e^{i(kx+k'y)}]|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\sum_{\lambda,\lambda'=0}^{3}\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda')}(\mathbf{k}')\langle 0|a_\mathbf{k}^{(\lambda)}a_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')\dagger}|0\rangle e^{-i(kx-k'y)}$$

$$= -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\sum_{\lambda,\lambda'=0}^{3}\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda')}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\eta_{\lambda\lambda'}e^{-i(kx-k'y)}$$

$$= -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\eta_{\lambda\lambda}e^{-ik(x-y)} \qquad (44)$$

Función de dos puntos y propagador

Y usando la relación de completitud de los vectores de polarización

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_{\nu}^{(\lambda)}(\mathbf{k})\eta_{\lambda\lambda} = \eta_{\mu\nu}, \tag{45}$$

Función de dos puntos y propagador

Y usando la relación de completitud de los vectores de polarización

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\eta_{\lambda\lambda} = \eta_{\mu\nu}, \tag{45}$$

obtenemos

$$\boxed{\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}\eta_{\mu\nu}e^{-ik(x-y)}}. \tag{46}$$

Función de dos puntos y propagador

Y usando la relación de completitud de los vectores de polarización

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_{\nu}^{(\lambda)}(\mathbf{k})\eta_{\lambda\lambda} = \eta_{\mu\nu}, \tag{45}$$

obtenemos

$$\boxed{\langle 0|A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)|0\rangle = -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}\eta_{\mu\nu}e^{-ik(x-y)}}. \tag{46}$$

El propagor de Feynman resulta entonces inmediato

$$\langle 0|TA_{\mu}(x)A_{\nu}(y)|0\rangle = \langle 0|A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)|0\rangle\theta(x_0 - y_0) + \langle 0|A_{\nu}(y)A_{\mu}(x)|0\rangle\theta(y_0 - x_0) \tag{47}$$

Función de dos puntos y propagador

Y usando la relación de completitud de los vectores de polarización

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_\nu^{(\lambda)}(\mathbf{k})\eta_{\lambda\lambda} = \eta_{\mu\nu}, \tag{45}$$

obtenemos

$$\boxed{\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}\eta_{\mu\nu}e^{-ik(x-y)}}. \tag{46}$$

El propagor de Feynman resulta entonces inmediato

$$\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle\theta(x_0 - y_0) + \langle 0|A_\nu(y)A_\mu(x)|0\rangle\theta(y_0 - x_0) \tag{47}$$

$$= -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}\eta_{\mu\nu}[e^{-ik(x-y)}\theta(x_0 - y_0) + e^{ik(x-y)}\theta(y_0 - x_0)] \tag{48}$$

Y usando la relación de completitud de los vectores de polarización

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{k})\epsilon_{\nu}^{(\lambda)}(\mathbf{k})\eta_{\lambda\lambda} = \eta_{\mu\nu}, \tag{45}$$

obtenemos

$$\boxed{\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}\eta_{\mu\nu}e^{-ik(x-y)}}. \tag{46}$$

El propagor de Feynman resulta entonces inmediato

$$\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle\theta(x_0-y_0) + \langle 0|A_\nu(y)A_\mu(x)|0\rangle\theta(y_0-x_0) \tag{47}$$

$$= -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}\eta_{\mu\nu}[e^{-ik(x-y)}\theta(x_0-y_0) + e^{ik(x-y)}\theta(y_0-x_0)] \tag{48}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(-i\eta_{\mu\nu})}{k^2+i\epsilon}e^{-ik(x-y)}}. \tag{49}$$

Función de dos puntos y propagador

También podemos usar el resultado de la función de dos puntos para calcular el conmutador

$$\langle 0|[A_\mu(x), A_\nu(y)]|0\rangle = \langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle - \langle 0|A_\nu(y)A_\mu(x)|0\rangle \tag{50}$$

Función de dos puntos y propagador

También podemos usar el resultado de la función de dos puntos para calcular el conmutador

$$\langle 0|[A_\mu(x), A_\nu(y)]|0\rangle = \langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle - \langle 0|A_\nu(y)A_\mu(x)|0\rangle \tag{50}$$

$$= -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}\eta_{\mu\nu}e^{-ik(x-y)} + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}\eta_{\nu\mu}e^{ik(x-y)} \tag{51}$$

Función de dos puntos y propagador

También podemos usar el resultado de la función de dos puntos para calcular el conmutador

$$\langle 0|[A_\mu(x), A_\nu(y)]|0\rangle = \langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle - \langle 0|A_\nu(y)A_\mu(x)|0\rangle \tag{50}$$

$$= -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}} \eta_{\mu\nu} e^{-ik(x-y)} + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}} \eta_{\nu\mu} e^{ik(x-y)} \tag{51}$$

$$= -\eta_{\mu\nu} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}} \left[e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}\right] \tag{52}$$

Función de dos puntos y propagador

También podemos usar el resultado de la función de dos puntos para calcular el conmutador

$$\langle 0|[A_\mu(x), A_\nu(y)]|0\rangle = \langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle - \langle 0|A_\nu(y)A_\mu(x)|0\rangle \tag{50}$$

$$= -\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}} \eta_{\mu\nu} e^{-ik(x-y)} + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}} \eta_{\nu\mu} e^{ik(x-y)} \tag{51}$$

$$= -\eta_{\mu\nu} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}} \left[e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}\right] \tag{52}$$

$$\implies \boxed{\langle 0|\left[A_\mu(x), A_\nu(y)\right]|0\rangle = -\eta_{\mu\nu} i\Delta(x-y)} \tag{53}$$

Microcausalidad

(Práctica 5, Ejercicio 62) *Comprobar la validez de la microcausalidad para los campos eléctrico y magnético.*

Aprovechando que conocemos el conmutador para el campo A_μ podemos escribir el conmutador entre los campos eléctricos usando que $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

Microcausalidad

(Práctica 5, Ejercicio 62) *Comprobar la validez de la microcausalidad para los campos eléctrico y magnético.*

Aprovechando que conocemos el conmutador para el campo A_μ podemos escribir el conmutador entre los campos eléctricos usando que $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

$$\boxed{[E_i(x), E_j(y)]} = [\partial_i A_0(x) - \partial_0 A_i(x), \partial_j A_0(y) - \partial_0 A_j(y)]$$

Microcausalidad

(Práctica 5, Ejercicio 62) *Comprobar la validez de la microcausalidad para los campos eléctrico y magnético.*

Aprovechando que conocemos el conmutador para el campo A_μ podemos escribir el conmutador entre los campos eléctricos usando que $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

$$\boxed{[E_i(x), E_j(y)]} = [\partial_i A_0(x) - \partial_0 A_i(x), \partial_j A_0(y) - \partial_0 A_j(y)]$$

$$= [\partial_i A_0(x), \partial_j A_0(y)] - [\partial_i A_0(x), \partial_0 A_j(y)] - [\partial_0 A_i(x), \partial_j A_0(y)] + [\partial_0 A_i(x), \partial_0 A_j(y)]$$

Microcausalidad

(Práctica 5, Ejercicio 62) *Comprobar la validez de la microcausalidad para los campos eléctrico y magnético.*

Aprovechando que conocemos el conmutador para el campo A_μ podemos escribir el conmutador entre los campos eléctricos usando que $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

$$\boxed{[E_i(x), E_j(y)]} = [\partial_i A_0(x) - \partial_0 A_i(x), \partial_j A_0(y) - \partial_0 A_j(y)]$$

$$= [\partial_i A_0(x), \partial_j A_0(y)] - [\partial_i A_0(x), \partial_0 A_j(y)] - [\partial_0 A_i(x), \partial_j A_0(y)] + [\partial_0 A_i(x), \partial_0 A_j(y)]$$

$$= \partial_i^x \partial_j^y \, [A_0(x), A_0(y)] - \partial_i^x \partial_0^y \cancel{[A_0(x), A_j(y)]} - \partial_0^x \partial_j^y \cancel{[A_i(x), A_0(y)]} + \partial_0^x \partial_0^y \, [A_i(x), A_j(y)]$$

Microcausalidad

(Práctica 5, Ejercicio 62) *Comprobar la validez de la microcausalidad para los campos eléctrico y magnético.*

Aprovechando que conocemos el conmutador para el campo A_μ podemos escribir el conmutador entre los campos eléctricos usando que $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

$$\boxed{[E_i(x), E_j(y)]} = [\partial_i A_0(x) - \partial_0 A_i(x), \partial_j A_0(y) - \partial_0 A_j(y)]$$

$$= [\partial_i A_0(x), \partial_j A_0(y)] - [\partial_i A_0(x), \partial_0 A_j(y)] - [\partial_0 A_i(x), \partial_j A_0(y)] + [\partial_0 A_i(x), \partial_0 A_j(y)]$$

$$= \partial_i^x \partial_j^y \,[A_0(x), A_0(y)] - \partial_i^x \partial_0^y \cancel{[A_0(x), A_j(y)]} - \partial_0^x \partial_j^y \cancel{[A_i(x), A_0(y)]} + \partial_0^x \partial_0^y \,[A_i(x), A_j(y)]$$

$$= \partial_0^x \partial_0^y \,[A_i(x), A_j(y)] + \partial_i^x \partial_j^y \,[A_0(x), A_0(y)]$$

Microcausalidad

(Práctica 5, Ejercicio 62) *Comprobar la validez de la microcausalidad para los campos eléctrico y magnético.*

Aprovechando que conocemos el conmutador para el campo A_μ podemos escribir el conmutador entre los campos eléctricos usando que $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

$$\boxed{[E_i(x), E_j(y)]} = [\partial_i A_0(x) - \partial_0 A_i(x), \partial_j A_0(y) - \partial_0 A_j(y)]$$

$$= [\partial_i A_0(x), \partial_j A_0(y)] - [\partial_i A_0(x), \partial_0 A_j(y)] - [\partial_0 A_i(x), \partial_j A_0(y)] + [\partial_0 A_i(x), \partial_0 A_j(y)]$$

$$= \partial_i^x \partial_j^y \left[A_0(x), A_0(y)\right] - \partial_i^x \partial_0^y \cancel{[A_0(x), A_j(y)]} - \partial_0^x \partial_j^y \cancel{[A_i(x), A_0(y)]} + \partial_0^x \partial_0^y \left[A_i(x), A_j(y)\right]$$

$$= \partial_0^x \partial_0^y \left[A_i(x), A_j(y)\right] + \partial_i^x \partial_j^y \left[A_0(x), A_0(y)\right]$$

$$= -\partial_0^x \partial_0^y \eta_{ij} i\Delta(x-y) - \partial_i^x \partial_j^y \eta_{00} i\Delta(x-y)$$

Microcausalidad

(Práctica 5, Ejercicio 62) *Comprobar la validez de la microcausalidad para los campos eléctrico y magnético.*

Aprovechando que conocemos el conmutador para el campo A_μ podemos escribir el conmutador entre los campos eléctricos usando que $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

$$\boxed{[E_i(x), E_j(y)]} = [\partial_i A_0(x) - \partial_0 A_i(x), \partial_j A_0(y) - \partial_0 A_j(y)]$$

$$= [\partial_i A_0(x), \partial_j A_0(y)] - [\partial_i A_0(x), \partial_0 A_j(y)] - [\partial_0 A_i(x), \partial_j A_0(y)] + [\partial_0 A_i(x), \partial_0 A_j(y)]$$

$$= \partial_i^x \partial_j^y \left[A_0(x), A_0(y)\right] - \partial_i^x \partial_0^y \cancel{[A_0(x), A_j(y)]} - \partial_0^x \partial_j^y \cancel{[A_i(x), A_0(y)]} + \partial_0^x \partial_0^y \left[A_i(x), A_j(y)\right]$$

$$= \partial_0^x \partial_0^y \left[A_i(x), A_j(y)\right] + \partial_i^x \partial_j^y \left[A_0(x), A_0(y)\right]$$

$$= -\partial_0^x \partial_0^y \eta_{ij} i\Delta(x-y) - \partial_i^x \partial_j^y \eta_{00} i\Delta(x-y)$$

$$= \boxed{\left[-\partial_0^2 \delta_{ij} + \partial_i \partial_j\right] \left[i\Delta(x-y)\right]}$$

Microcausalidad

De la misma forma usando que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\boxed{\left[B^i(x), B^j(y)\right]} = \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}\left[\partial_k A_l(x), \partial_m A_n(y)\right]$$

Microcausalidad

De la misma forma usando que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\boxed{\left[B^i(x), B^j(y)\right]} = \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}\left[\partial_k A_l(x), \partial_m A_n(y)\right]$$

$$= \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}\partial_k^x \partial_m^y \left[A_l(x), A_n(y)\right]$$

Microcausalidad

De la misma forma usando que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\boxed{\left[B^i(x), B^j(y)\right]} = \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}\left[\partial_k A_l(x), \partial_m A_n(y)\right]$$

$$= \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}\partial_k^x\partial_m^y\left[A_l(x), A_n(y)\right]$$

$$= \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}\partial_k^x\partial_m^y\left[-\eta_{ln} i\Delta(x-y)\right]$$

Microcausalidad

De la misma forma usando que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\boxed{\left[B^i(x), B^j(y)\right]} = \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}\left[\partial_k A_l(x), \partial_m A_n(y)\right]$$

$$= \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}\partial_k^x \partial_m^y \left[A_l(x), A_n(y)\right]$$

$$= \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}\partial_k^x \partial_m^y \left[-\eta_{ln} i\Delta(x-y)\right]$$

$$= i\left[\delta^{ij}\delta^{km} - \delta^{im}\delta^{jk}\right]\partial_k^x \partial_m^y \Delta(x-y)$$

Microcausalidad

De la misma forma usando que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\boxed{\left[B^i(x), B^j(y)\right]} = \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}\left[\partial_k A_l(x), \partial_m A_n(y)\right]$$

$$= \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}\partial_k^x\partial_m^y\left[A_l(x), A_n(y)\right]$$

$$= \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}\partial_k^x\partial_m^y\left[-\eta_{ln} i\Delta(x-y)\right]$$

$$= i\left[\delta^{ij}\delta^{km} - \delta^{im}\delta^{jk}\right]\partial_k^x\partial_m^y\Delta(x-y)$$

$$\boxed{= -i\left(\delta^{ij}\nabla^2 - \partial^i\partial^j\right)\Delta(x-y)}$$

Microcausalidad

Finalmente podemos calcular también el conmutador cruzado

$$\boxed{\left[E^i(x), B^j(y)\right]} = \left[\partial^i A^0(x) - \partial^0 A^i(x), \epsilon^{jkl}\partial_k A_l(y)\right]$$

Microcausalidad

Finalmente podemos calcular también el conmutador cruzado

$$\boxed{\left[E^i(x), B^j(y)\right]} = \left[\partial^i A^0(x) - \partial^0 A^i(x), \epsilon^{jkl}\partial_k A_l(y)\right]$$

$$= \left[\partial^i A^0(x), \epsilon^{jkl}\partial_k A_l(y)\right] - \left[\partial^0 A^i(x), \epsilon^{jkl}\partial_k A_l(y)\right]$$

Microcausalidad

Finalmente podemos calcular también el conmutador cruzado

$$\boxed{\left[E^i(x), B^j(y)\right]} = \left[\partial^i A^0(x) - \partial^0 A^i(x), \epsilon^{jkl}\partial_k A_l(y)\right]$$

$$= \left[\partial^i A^0(x), \epsilon^{jkl}\partial_k A_l(y)\right] - \left[\partial^0 A^i(x), \epsilon^{jkl}\partial_k A_l(y)\right]$$

$$= \epsilon^{jkl}\partial^{ix}\partial_k^y \cancel{\left[A^0(x), A_l(y)\right]} - \epsilon^{jkl}\partial^0\partial_k^y \left[A^i(x), A_l(y)\right]$$

Microcausalidad

Finalmente podemos calcular también el conmutador cruzado

$$\boxed{\left[E^i(x), B^j(y)\right]} = \left[\partial^i A^0(x) - \partial^0 A^i(x), \epsilon^{jkl}\partial_k A_l(y)\right]$$

$$= \left[\partial^i A^0(x), \epsilon^{jkl}\partial_k A_l(y)\right] - \left[\partial^0 A^i(x), \epsilon^{jkl}\partial_k A_l(y)\right]$$

$$= \epsilon^{jkl}\partial^{ix}\partial_k^y \cancel{\left[A^0(x), A_l(y)\right]} - \epsilon^{jkl}\partial^0\partial_k^y \left[A^i(x), A_l(y)\right]$$

$$= \epsilon^{jkl}\left(-\partial_0^x\partial_k^y\right)\left[-i\eta_l^i\Delta(x-y)\right]$$

Microcausalidad

Finalmente podemos calcular también el conmutador cruzado

$$\boxed{\left[E^i(x), B^j(y)\right]} = \left[\partial^i A^0(x) - \partial^0 A^i(x), \epsilon^{jkl}\partial_k A_l(y)\right]$$

$$= \left[\partial^i A^0(x), \epsilon^{jkl}\partial_k A_l(y)\right] - \left[\partial^0 A^i(x), \epsilon^{jkl}\partial_k A_l(y)\right]$$

$$= \epsilon^{jkl}\partial^{ix}\partial^y_k \cancel{\left[A^0(x), A_l(y)\right]} - \epsilon^{jkl}\partial^0\partial^y_k \left[A^i(x), A_l(y)\right]$$

$$= \epsilon^{jkl}\left(-\partial^x_0\partial^y_k\right)\left[-i\eta^i_l\Delta(x-y)\right]$$

$$= \boxed{i\epsilon^{ijk}\partial_0\partial_k\Delta(x-y)}$$

Como vemos en todos los casos los conmutadores de los campos (que son observables de la teoría) se anulan para puntos separados espacialmente ya que $\Delta(x-y)$ es idénticamente nula para $x-y$ fuera del cono de luz.

Condición de Gupta-Bleuler

- La **condición de Gupta-Bleuler**

$$\partial_\mu \hat{A}^\mu_+ |\Psi\rangle = 0$$

  determina los estados físicos de la teoría. Esta condición implica el gauge de Lorenz en valor medio $\langle \partial_\mu \hat{A}^\mu \rangle = 0$ y elimina los estados de norma negativa. Además identificamos como iguales a los estados que tienen la misma componente transversal para eliminar a los estados de norma nula. Esto nos deja solo dos componentes observables del campo electromagnético.

Condición de Gupta-Bleuler

- La **condición de Gupta-Bleuler**

$$\partial_\mu \hat{A}^\mu_+ \left|\Psi\right\rangle = 0$$

  determina los estados físicos de la teoría. Esta condición implica el gauge de Lorenz en valor medio $\langle \partial_\mu \hat{A}^\mu \rangle = 0$ y elimina los estados de norma negativa. Además identificamos como iguales a los estados que tienen la misma componente transversal para eliminar a los estados de norma nula. Esto nos deja solo dos componentes observables del campo electromagnético.

- El **propagor de Feynman** para el campo electromagnético es

$$\langle 0|T A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-\eta_{\mu\nu})}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}.$$

Condición de Gupta-Bleuler

- La **condición de Gupta-Bleuler**

$$\partial_\mu \hat{A}^\mu_+ |\Psi\rangle = 0$$

  determina los estados físicos de la teoría. Esta condición implica el gauge de Lorenz en valor medio $\langle \partial_\mu \hat{A}^\mu \rangle = 0$ y elimina los estados de norma negativa. Además identificamos como iguales a los estados que tienen la misma componente transversal para eliminar a los estados de norma nula. Esto nos deja solo dos componentes observables del campo electromagnético.

- El **propagor de Feynman** para el campo electromagnético es

$$\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-\eta_{\mu\nu})}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}.$$

- Se verifica la condición de **microcausalidad** para los campos eléctrico y magnético.