Campos - Práctica

Cuantización del campo escalar complejo.

Cuantización del campo escalar complejo

Recordemos que el lagrangiano del campo escalar complejo viene dado por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

Cuantización del campo escalar complejo

Recordemos que el lagrangiano del campo escalar complejo viene dado por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

que tiene dos grados de libertad que podemos tomar como ϕ y ϕ^*que satisfacen las ecuaciones de movimiento

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^* = 0$$

Cuantización del campo escalar complejo

Recordemos que el lagrangiano del campo escalar complejo viene dado por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

que tiene dos grados de libertad que podemos tomar como ϕ y ϕ^*que satisfacen las ecuaciones de movimiento

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^* = 0$$

cuyas soluciones cuánticas podemos expandir en ondas planas como

$$\hat{\phi}(x) = \int \left[\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} \right] \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}$$

Cuantización del campo escalar complejo

Recordemos que el lagrangiano del campo escalar complejo viene dado por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

que tiene dos grados de libertad que podemos tomar como ϕ y ϕ^*que satisfacen las ecuaciones de movimiento

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^* = 0$$

cuyas soluciones cuánticas podemos expandir en ondas planas como

$$\hat{\phi}(x) = \int \left[\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} \right] \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x) = \int \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} + \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} \right] \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}$$

Cuantización del campo escalar complejo

Cuyos momentos canónico conjugados son

$$\hat{\pi}(x) = \partial_0 \hat{\phi}^\dagger(x) = \int \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} - \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-ipx}\right] i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}$$

$$\hat{\pi}^\dagger(x) = \int \left[\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{-ipx}\right] i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}.$$

Cuantización del campo escalar complejo

Cuyos momentos canónico conjugados son

$$\hat{\pi}(x) = \partial_0 \hat{\phi}^\dagger(x) = \int \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} - \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-ipx}\right] i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}$$

$$\hat{\pi}^\dagger(x) = \int \left[\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{-ipx}\right] i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}.$$

Imponiendo las siguientes relaciones de conmutación (a tiempos iguales) sobre los campos y los momentos

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta(x - y)$$

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\pi(x), \pi(y)] = 0$$

Cuantización del campo escalar complejo

Cuyos momentos canónico conjugados son

$$\hat{\pi}(x) = \partial_0 \hat{\phi}^\dagger(x) = \int \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} - \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-ipx}\right] i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}$$

$$\hat{\pi}^\dagger(x) = \int \left[\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{-ipx}\right] i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}.$$

Imponiendo las siguientes relaciones de conmutación (a tiempos iguales) sobre los campos y los momentos

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta(x-y)$$

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\pi(x), \pi(y)] = 0$$

podemos deducir las siguientes relaciones de conmutación para los operadores de creación y destrucción

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] = \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}] = \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] = 0.$$

Cuantización del campo escalar complejo

Cuyos momentos canónico conjugados son

$$\hat{\pi}(x) = \partial_0 \hat{\phi}^\dagger(x) = \int \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} - \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-ipx}\right] i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}$$

$$\hat{\pi}^\dagger(x) = \int \left[\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{-ipx}\right] i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}.$$

Imponiendo las siguientes relaciones de conmutación (a tiempos iguales) sobre los campos y los momentos

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta(x-y)$$

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\pi(x), \pi(y)] = 0$$

podemos deducir las siguientes relaciones de conmutación para los operadores de creación y destrucción

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] = \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}] = \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] = 0.$$

Con estas relaciones asociamos entonces a $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}$ y $\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}$ con operadores que crean dos tipos distintos de partículas.

Cuantización del campo escalar complejo

Como dijimos antes el campo escalar complejo tiene una simetría global continua ante U(1). Dicha simetría está asociada a través del teorema de Noether con la corriente

$$\hat{j}^{\mu} = -i\left[\left(\partial^{\mu}\hat{\phi}^{\dagger}\right)\hat{\phi} - \hat{\phi}^{\dagger}\left(\partial^{\mu}\hat{\phi}\right)\right]$$

Cuantización del campo escalar complejo

Como dijimos antes el campo escalar complejo tiene una simetría global continua ante U(1). Dicha simetría está asociada a través del teorema de Noether con la corriente

$$\hat{j}^\mu = -i\left[\left(\partial^\mu \hat{\phi}^\dagger\right)\hat{\phi} - \hat{\phi}^\dagger\left(\partial^\mu \hat{\phi}\right)\right]$$

cuya carga conservada viene dada por

$$\hat{Q} = \int :\hat{j}^0: d^3\mathbf{x} = -\int i : \left[\hat{\phi}\hat{\pi} - \hat{\phi}^\dagger \hat{\pi}^\dagger\right] : d^3\mathbf{x}$$

donde tomamos orden normal para que su valor de expectación en el vacío sea nulo

Cuantización del campo escalar complejo

Como dijimos antes el campo escalar complejo tiene una simetría global continua ante U(1). Dicha simetría está asociada a través del teorema de Noether con la corriente

$$\hat{j}^{\mu} = -i\left[\left(\partial^{\mu}\hat{\phi}^{\dagger}\right)\hat{\phi} - \hat{\phi}^{\dagger}\left(\partial^{\mu}\hat{\phi}\right)\right]$$

cuya carga conservada viene dada por

$$\hat{Q} = \int :\hat{j}^{0}: d^3\mathbf{x} = -\int i : \left[\hat{\phi}\hat{\pi} - \hat{\phi}^{\dagger}\hat{\pi}^{\dagger}\right] : d^3\mathbf{x}$$

donde tomamos orden normal para que su valor de expectación en el vacío sea nulo. Noten que como adelantamos este operador es autoadjunto y por lo tanto estará asociado a un observable de la teoría. Calculemos entonces

$$\int :\hat{\phi}\hat{\pi}: d^3\mathbf{x} = \int\int\int : \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}e^{-ipx} + \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{p}}e^{ipx}\right]\left[\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}'}e^{ip'x} - \hat{b}_{\mathbf{p}'}e^{-ip'x}\right] : i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{2}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}$$

Cuantización del campo escalar complejo

$$= \frac{i}{2(2\pi)^3} \int \int \int : \left[\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}'} e^{i(p'-p)x} + \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}'} e^{i(p'+p)x} - \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}'} e^{-i(p'+p)x} - \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}'} e^{-i(p'-p)x} \right] :$$
$$\times \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}' d^3\mathbf{x}$$

Cuantización del campo escalar complejo

$$= \frac{i}{2(2\pi)^3} \int\int\int : \Big[\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'} e^{i(p'-p)x} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'} e^{i(p'+p)x} - \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}'} e^{-i(p'+p)x} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}'} e^{-i(p'-p)x}\Big] :$$

$$\times \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}' d^3\mathbf{x}$$

$$= \frac{i}{2} \int : \Big[\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} - \hat{a}_{-\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}\Big] : d^3\mathbf{p} \tag{1}$$

$$= \frac{i}{2(2\pi)^3} \int \int \int : \left[\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'} e^{i(p'-p)x} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'} e^{i(p'+p)x} - \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}'} e^{-i(p'+p)x} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}'} e^{-i(p'-p)x} \right] :$$
$$\times \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}' d^3\mathbf{x}$$

$$= \frac{i}{2} \int : \left[\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} - \hat{a}_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \right] : d^3\mathbf{p} \tag{1}$$

$$= \frac{i}{2} \int \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} - \hat{a}_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \right] d^3\mathbf{p} \tag{2}$$

$$= \frac{i}{2(2\pi)^3} \int\int\int : \left[\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'} e^{i(p'-p)x} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'} e^{i(p'+p)x} - \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}'} e^{-i(p'+p)x} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}'} e^{-i(p'-p)x} \right] :$$
$$\times \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}' d^3\mathbf{x}$$

$$= \frac{i}{2} \int : \left[\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} - \hat{a}_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \right] : d^3\mathbf{p} \tag{1}$$

$$= \frac{i}{2} \int \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} - \hat{a}_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} \right] d^3\mathbf{p} \tag{2}$$

para el siguiente término podemos usar que $\left(: \hat{\phi}\hat{\pi} : \right)^\dagger =: \hat{\pi}^\dagger \hat{\phi}^\dagger :=: \hat{\phi}^\dagger \hat{\pi}^\dagger :$ (todo lo que está adentro de un orden normal lo podemos conmutar como queramos dado que al final igualmente será reacomodador por el orden normal).

Cuantización del campo escalar complejo

Entonces

$$-\int :\hat{\phi}^\dagger \hat{\pi}^\dagger: d^3\mathbf{x} = -\left(\int :\hat{\phi}\hat{\pi}: d^3\mathbf{x}\right)^\dagger = \frac{i}{2}\int \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{-\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}\right] d^3\mathbf{p}$$

Entonces

$$-\int :\hat{\phi}^\dagger\hat{\pi}^\dagger : d^3\mathbf{x} = -\left(\int :\hat{\phi}\hat{\pi} : d^3\mathbf{x}\right)^\dagger = \frac{i}{2}\int \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{-\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}\right] d^3\mathbf{p}$$

Sumando esto a lo anterior tenemos

$$\hat{Q} = \int :\hat{j}^0 : d^3x = -\int \left[\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\right] d^3\mathbf{p}$$

Cuantización del campo escalar complejo

Entonces

$$-\int :\hat{\phi}^\dagger\hat{\pi}^\dagger: d^3\mathbf{x} = -\left(\int :\hat{\phi}\hat{\pi}: d^3\mathbf{x}\right)^\dagger = \frac{i}{2}\int \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{-\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}\right] d^3\mathbf{p}$$

Sumando esto a lo anterior tenemos

$$\hat{Q} = \int :\hat{j}^0: d^3x = -\int \left[\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\right] d^3\mathbf{p}$$

$$\hat{Q} = \hat{N}^a - \hat{N}^b$$

Entonces

$$-\int :\hat{\phi}^\dagger\hat{\pi}^\dagger : d^3\mathbf{x} = -\left(\int :\hat{\phi}\hat{\pi}: d^3\mathbf{x}\right)^\dagger = \frac{i}{2}\int\left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{-\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} - \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}\right] d^3\mathbf{p}$$

Sumando esto a lo anterior tenemos

$$\hat{Q} = \int :\hat{j}^0: d^3x = -\int\left[\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\right] d^3\mathbf{p}$$

$$\hat{Q} = \hat{N}^a - \hat{N}^b$$

es decir que la diferencia entre el número de partículas de tipo b y a debe conservarse. Si les asignamos carga positiva a las partículas de tipo a y negativa a las de tipo b esto es lo mismo que decir que la carga total se conserva. Vemos entonces que tenemos dos tipos de partículas de la misma masa y carga opuesta, decimos entonces que el operador $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}$ crea partículas con carga positiva y momento $\mathbf{p}$ mientras que $\hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}$ crea anti-partículas de carga opuesta y momento $\mathbf{p}$.

Propagador del campo escalar neutro o complejo (Práctica 3, Ejercicio 43)

Exprese

$$D(x-y) \equiv \langle 0|T(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y))|0\rangle$$

como una suma de dos funciones de dos puntos pesadas adecuadamente (en el caso del campo neutro, la expresión final es la misma).

Propagador del campo escalar neutro o complejo (Práctica 3, Ejercicio 43)

Exprese

$$D(x-y) \equiv \langle 0|T(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y))|0\rangle$$

como una suma de dos funciones de dos puntos pesadas adecuadamente (en el caso del campo neutro, la expresión final es la misma).

Por definición de T tenemos que

$$D(x-y) = \begin{cases} \left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) \right\rangle & \text{si } x^0 > y^0 \\ \left\langle \hat{\phi}^\dagger(y)\hat{\phi}(x) \right\rangle & \text{si } x^0 < y^0 \end{cases} .$$

Propagador del campo escalar neutro o complejo (Práctica 3, Ejercicio 43)

Exprese

$$D(x-y) \equiv \langle 0|T(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y))|0\rangle$$

como una suma de dos funciones de dos puntos pesadas adecuadamente (en el caso del campo neutro, la expresión final es la misma).

Por definición de T tenemos que

$$D(x-y) = \begin{cases} \left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) \right\rangle & \text{si } x^0 > y^0 \\ \left\langle \hat{\phi}^\dagger(y)\hat{\phi}(x) \right\rangle & \text{si } x^0 < y^0 \end{cases}.$$

Esta expresión se puede reescribir usando funciones de heaviside como

$$D(x-y) = \left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) \right\rangle \theta(x^0 - y^0) + \left\langle \hat{\phi}^\dagger(y)\hat{\phi}(x) \right\rangle \theta(y^0 - x^0)$$

que es una suma pesada de dos funciones de dos puntos.

Cuantización del campo escalar complejo

Exprese el resultado como la transformada de Fourier de

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\epsilon \to 0)$$

Muestre esto mediante integrales en el plano complejo, en caminos que esquiven los polos dados por ϵ, ubicados en distintos lugares segun sea ϵ positivo o negativo.

Cuantización del campo escalar complejo

Exprese el resultado como la transformada de Fourier de

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\epsilon \to 0)$$

Muestre esto mediante integrales en el plano complejo, en caminos que esquiven los polos dados por ϵ, ubicados en distintos lugares segun sea ϵ positivo o negativo. Comencemos calculando explícitamente

$$\left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) \right\rangle = \left\langle \int \int \left[\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx}\right] \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'} e^{ip'y} + \hat{b}_{\mathbf{p}'} e^{-ip'y}\right] \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \right\rangle$$

Exprese el resultado como la transformada de Fourier de

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\epsilon \to 0)$$

Muestre esto mediante integrales en el plano complejo, en caminos que esquiven los polos dados por ϵ, ubicados en distintos lugares segun sea ϵ positivo o negativo. Comencemos calculando explícitamente

$$\left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) \right\rangle = \left\langle \int\int \left[\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ipx}\right] \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'} e^{ip'y} + \hat{b}_{\mathbf{p}'} e^{-ip'y}\right] \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \right\rangle$$

Para hacer estas cuentas rápidamente recuerden siempre que

$$\langle 0|\hat{a}^n_{\mathbf{p}}|0\rangle = \langle 0|\hat{a}^n_{\mathbf{p}}\hat{b}^m_{\mathbf{p}'}|0\rangle = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^3$$

$$\langle 0|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}'}|0\rangle = \langle 0|(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}})^n\hat{a}^m_{\mathbf{p}'}|0\rangle = 0 \quad \forall n \neq m \in \mathbb{N} \quad \mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^3.$$

Cuantización del campo escalar complejo

Así obtenemos

$$\left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^{\dagger}(y)\right\rangle = \int\int \delta(p'-p)e^{-ipx}e^{ip'y}\frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}}\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}$$

Cuantización del campo escalar complejo

Así obtenemos

$$\left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^{\dagger}(y) \right\rangle = \int\int \delta(p'-p)e^{-ipx}e^{ip'y}\frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}}\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}$$

$$\left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^{\dagger}(y) \right\rangle = \int e^{-ip(x-y)}\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}.$$

Entonces, si $x^0 > y^0$ podemos escribir el propagador como

$$D(x-y) = \int e^{-ip(x-y)} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}.$$

Cuantización del campo escalar complejo

Entonces, si $x^0 > y^0$ podemos escribir el propagador como

$$D(x-y) = \int e^{-ip(x-y)} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}.$$

Por otro lado, la transformada de Fourier es

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} = \lim_{\epsilon \to 0} \int \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2 + i\epsilon} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4} dp_0\,;$$

Entonces, si $x^0 > y^0$ podemos escribir el propagador como

$$D(x-y) = \int e^{-ip(x-y)} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}.$$

Por otro lado, la transformada de Fourier es

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} = \lim_{\epsilon\to 0} \int\int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2 + i\epsilon} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4} dp_0\,;$$

viendo el integrando como función de p_0 tiene polos en $p_0^{\pm} = \pm\,(\omega_{\mathbf{p}} - i\epsilon)$.

Entonces, si $x^0 > y^0$ podemos escribir el propagador como

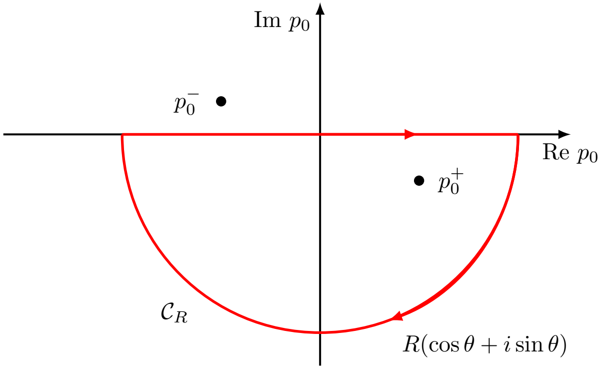
$$D(x-y) = \int e^{-ip(x-y)} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}.$$

Por otro lado, la transformada de Fourier es

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} = \lim_{\epsilon\to 0} \int\int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2 + i\epsilon} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4} dp_0\,;$$

viendo el integrando como función de p_0 tiene polos en $p_0^{\pm} = \pm\left(\omega_{\mathbf{p}} - i\epsilon\right)$.Si $x^0 - y^0 > 0$ uno puede calcular esto cerrando el contorno por debajo con la curva $\mathcal{C}_R$ de manera tal de que la integral sobre la semi-circunferencia tienda a cero ($e^{-iR(x^0-y^0)(\cos\theta + i\sin\theta)} \to 0$ cuando $R\to\infty$ si $\pi < \theta < 2\pi$).

Cuantización del campo escalar complejo



Circuito de integración $\mathcal{C}_R$ para $x^0 > y^0$. Dado que, por el teorema de la curva de Cauchy, no importa cómo deformemos la curva de integración siempre obtendremos como resultado el residuo en el polo encerrado, muchas veces lo que se hace es directamente eliminar el ϵ (con lo cual los polos quedan en el eje real) y definir la integral en el plano complejo de manera tal de evitar los polos, por abajo del p_0^- y por arriba del p_0^+.

Contorno para la D

Cuantización del campo escalar complejo

Así encerramos al polo p_0^+ y usando el teorema de residuos la integral resulta

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

Así encerramos al polo p_0^+ y usando el teorema de residuos la integral resulta

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int e^{-ip(x-y)}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{C}_R}\int e^{-ip(x-y)}\frac{i}{p_0^2-\mathbf{p}^2-m^2+i\epsilon}\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4}dp_0$$

Cuantización del campo escalar complejo

Así encerramos al polo p_0^+ y usando el teorema de residuos la integral resulta

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int e^{-ip(x-y)}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{C}_R}\int e^{-ip(x-y)}\frac{i}{p_0^2-\mathbf{p}^2-m^2+i\epsilon}\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4}dp_0$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{p_0\to p_0^+}-2\pi i(p_0-p_0^+)\int e^{-ip(x-y)}\frac{i}{p_0^2-\mathbf{p}^2-m^2+i\epsilon}\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4}$$

Así encerramos al polo p_0^+ y usando el teorema de residuos la integral resulta

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int e^{-ip(x-y)}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{C}_R}\int e^{-ip(x-y)}\frac{i}{p_0^2-\mathbf{p}^2-m^2+i\epsilon}\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4}dp_0$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{p_0\to p_0^+}-2\pi i(p_0-p_0^+)\int e^{-ip(x-y)}\frac{i}{p_0^2-\mathbf{p}^2-m^2+i\epsilon}\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4}$$

$$=\int e^{-ip(x-y)}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3},$$

donde usamos que $p_0^2-\mathbf{p}^2-m^2+i\epsilon=(p_0-p_0^+)(p_0-p_0^-)$.

Cuantización del campo escalar complejo

Análogamente si $x^0 < y^0$ podemos calcular

$$\left\langle \hat{\phi}^\dagger(y)\hat{\phi}(x) \right\rangle = \int e^{ip(x-y)} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} = \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

donde la última igualdad se obtiene haciendo un cuenta análoga cerrando el contorno por arriba.

Análogamente si $x^0 < y^0$ podemos calcular

$$\left\langle \hat{\phi}^\dagger(y)\hat{\phi}(x) \right\rangle = \int e^{ip(x-y)} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} = \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

donde la última igualdad se obtiene haciendo un cuenta análoga cerrando el contorno por arriba.

Así obtenemos entonces

$$D(x-y) = \lim_{\epsilon \to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}.$$

Cuantización del campo escalar complejo

Muestre que se cumple $(\Box_x + m^2)D(x-y) = -i\delta^4(x-y)$.

Cuantización del campo escalar complejo

Muestre que se cumple $(\Box_x + m^2)D(x-y) = -i\delta^4(x-y)$.

Finalmente podemos ver que el propagador es una función de Green de la ecuación de movimiento calculando

$$\left(\Box_x + m^2\right) D(x-y) = \lim_{\epsilon\to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

Cuantización del campo escalar complejo

Muestre que se cumple $(\Box_x + m^2)D(x-y) = -i\delta^4(x-y)$*.*

Finalmente podemos ver que el propagador es una función de Green de la ecuación de movimiento calculando

$$\left(\Box_x + m^2\right) D(x-y) = \lim_{\epsilon\to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int \left[(-p^2)e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + m^2 e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\right] \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

Muestre que se cumple $(\Box_x + m^2)D(x-y) = -i\delta^4(x-y)$.

Finalmente podemos ver que el propagador es una función de Green de la ecuación de movimiento calculando

$$\left(\Box_x + m^2\right) D(x-y) = \lim_{\epsilon\to 0}\int e^{-ip(x-y)}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int \left[(-p^2)e^{-ip(x-y)}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon} + m^2 e^{-ip(x-y)}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}\right]\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

$$= -i\int e^{-ip(x-y)}\frac{d^4p}{(2\pi)^4} = -i\delta^4(x-y).$$

Cuantización del campo escalar complejo

Veamos como se relaciona esto con la función de Pauli-Jordan

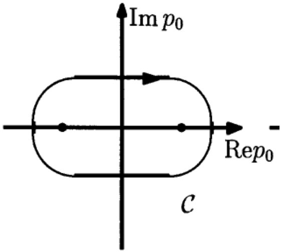
$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)] = i\Delta(x-y) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \left(e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}\right)$$

Cuantización del campo escalar complejo

Veamos como se relaciona esto con la función de Pauli-Jordan

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)] = i\Delta(x-y) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{p}} \left(e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}\right)$$

Si tomamos el contorno para la Δ



Tenemos

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2} = \int_{\mathcal{C}} \frac{dp_0}{(2\pi)} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ipx}}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} = \int_{\mathcal{C}} \frac{dp_0}{(2\pi)} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ipx}}{p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2}$$

Tenemos

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2} = \int_{\mathcal{C}} \frac{dp_0}{(2\pi)} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ipx}}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} = \int_{\mathcal{C}} \frac{dp_0}{(2\pi)} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ipx}}{p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4} (-2\pi i) \left[(p_0 - \omega_{\mathbf{p}}) \frac{e^{-ipx}}{p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2} \Big|_{p_0 = \omega_{\mathbf{p}}} + (p_0 + \omega_{\mathbf{p}}) \frac{e^{-ipx}}{p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2} \Big|_{p_0 = -\omega_{\mathbf{p}}} \right]$$

Tenemos

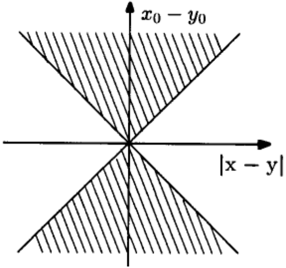
$$\int_{\mathcal{C}} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ipx}}{p^2-m^2} = \int_{\mathcal{C}} \frac{dp_0}{(2\pi)} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ipx}}{p_0^2-\mathbf{p}^2-m^2} = \int_{\mathcal{C}} \frac{dp_0}{(2\pi)} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ipx}}{p_0^2-\omega_{\mathbf{p}}^2}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4}(-2\pi i)\left[(p_0-\omega_{\mathbf{p}})\frac{e^{-ipx}}{p_0^2-\omega_{\mathbf{p}}^2}\Big|_{p_0=\omega_{\mathbf{p}}} + (p_0+\omega_{\mathbf{p}})\frac{e^{-ipx}}{p_0^2-\omega_{\mathbf{p}}^2}\Big|_{p_0=-\omega_{\mathbf{p}}}\right]$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4}(-2\pi i)\left[\frac{e^{-ipx}}{2\omega_{\mathbf{p}}} + \frac{e^{ipx}}{(-2\omega_{\mathbf{p}})}\right] = (-i)\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\frac{e^{-ipx}}{2\omega_{\mathbf{p}}} + \frac{e^{ipx}}{(-2\omega_{\mathbf{p}})}\right] = \Delta(x)$$

Cuantización del campo escalar complejo

Vimos que $\Delta(x) = 0$ si $(x-y)^2 < 0$



Si definimos

$$D_R(x-y) := \theta(x^0-y^0)\langle 0| \left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)\right] |0\rangle = \theta(x^0-y^0)\Delta(x-y)$$

Cuantización del campo escalar complejo

Si definimos

$$D_R(x-y) := \theta(x^0-y^0)\langle 0| \left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)\right] |0\rangle = \theta(x^0-y^0)\Delta(x-y)$$

Contorno para la D_R

Cuantización del campo escalar complejo

Tenemos que aplicando el operador de Klein gordon obtenemos

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right)_y D_R(x-y) = \left(\partial^\mu \partial_\mu \theta(x^0 - y^0)\right) \langle 0| \left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)\right] |0\rangle$$

Cuantización del campo escalar complejo

Tenemos que aplicando el operador de Klein gordon obtenemos

$$\left(\partial^\mu\partial_\mu + m^2\right)_y D_R(x-y) = \left(\partial^\mu\partial_\mu\theta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle$$

$$+2\left(\partial^\mu\theta(x^0-y^0)\right)\partial_\mu\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle + \theta(x^0-y^0)\left(\partial^\mu\partial_\mu + m^2\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle$$

Tenemos que aplicando el operador de Klein gordon obtenemos

$$\left(\partial^\mu\partial_\mu + m^2\right)_y D_R(x-y) = \left(\partial^\mu\partial_\mu\theta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle$$

$$+2\left(\partial^\mu\theta(x^0-y^0)\right)\partial_\mu\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle + \theta(x^0-y^0)\left(\partial^\mu\partial_\mu + m^2\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle$$

$$= \left(\partial^0\partial_0\theta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle + 2\left(\partial^0\theta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\partial_0\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle + 0$$

Cuantización del campo escalar complejo

Tenemos que aplicando el operador de Klein gordon obtenemos

$$\left(\partial^\mu\partial_\mu + m^2\right)_y D_R(x-y) = \left(\partial^\mu\partial_\mu\theta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle$$

$$+2\left(\partial^\mu\theta(x^0-y^0)\right)\partial_\mu\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle + \theta(x^0-y^0)\left(\partial^\mu\partial_\mu + m^2\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle$$

$$= \left(\partial^0\partial_0\theta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle + 2\left(\partial^0\theta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\partial_0\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle + 0$$

$$= \left(-\partial_0\delta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle + 2\left(-\delta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\pi}(y)\right]|0\rangle$$

$$= \delta(x^0-y^0)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\partial_0\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle + 2\left(-\delta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\pi}(y)\right]|0\rangle$$

Cuantización del campo escalar complejo

Tenemos que aplicando el operador de Klein gordon obtenemos

$$\left(\partial^\mu\partial_\mu + m^2\right)_y D_R(x-y) = \left(\partial^\mu\partial_\mu\theta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle$$

$$+2\left(\partial^\mu\theta(x^0-y^0)\right)\partial_\mu\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle + \theta(x^0-y^0)\left(\partial^\mu\partial_\mu + m^2\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle$$

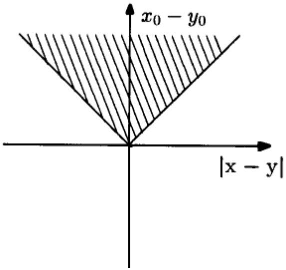
$$= \left(\partial^0\partial_0\theta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle + 2\left(\partial^0\theta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\partial_0\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle + 0$$

$$= \left(-\partial_0\delta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle + 2\left(-\delta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\pi}(y)\right]|0\rangle$$

$$= \delta(x^0-y^0)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\partial_0\hat{\phi}^\dagger(y)\right]|0\rangle + 2\left(-\delta(x^0-y^0)\right)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\pi}(y)\right]|0\rangle$$

$$= -\delta(x^0-y^0)\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\pi}(y)\right]|0\rangle = -i\delta^4(x-y)$$

Entonces $D_R(x-y)$ es una función de Green retardada.



De la misma manera $D_A(x-y) := \theta(y^0 - x^0)\langle 0| \left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)\right] |0\rangle$ es una función de Green retardada.

Cuantización del campo escalar complejo

El campo escalar complejo posee dos grados de libertad que dan lugar a dos tipos de partículas con la misma masa y cargas opuestas, partículas y anti-partículas.

Para el campo escalar real que vimos las clases pasadas las partículas coinciden con las antipartículas (el campo escalar real no tiene carga).

El propagador

$$D(x-y) \equiv \langle 0|T(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y))|0\rangle = \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

es una función de Green del campo escalar.

La función

$$D_R(x-y) = \theta(x^0 - y^0)\langle 0|[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)]|0\rangle$$

es una función de Green retardada del campo escalar.