

Campos - Práctica

Crossing symmetry. Vida media.

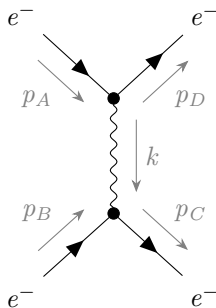
Crossing symmetry

Sabiendo que un proceso $A + B \rightarrow C + D$ tiene amplitud no nula para una elección de momentos k_1, k_2, k_3, k_4 asociados a A, B, C, D respectivamente, también es posible el proceso $A + \overline{C} \rightarrow \overline{B} + D$ (donde $\overline{(\cdot)}$ se usa para notar a la antipartícula). Para convencerse de esto:

- 1. Reconsidere los procesos de Møller y Bhabha. Vea cómo ambos se relacionan por el intercambio de partículas finales y cómo se obtienen los diagramas vistos en la guía anterior (de uno o otro proceso) mediante un pasaje de patas iniciales a finales.*

Crossing symmetry

Si en el proceso de scattering de Møller, $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ hacemos el cambio $B = e^- \rightarrow \bar{C} = e^- = e^+$ y $C = e^- \rightarrow \bar{B} = e^- = e^+$, obtenemos $e^-e^+ \rightarrow e^+e^-$, que es justamente el scattering de Bhabha. Si en el diagrama intercambiamos las patas B y C, y les damos vuelta el sentido (que corresponde a tomar la antipartícula) obtenemos uno de los diagramas para el scattering de Bhabha.



Crossing symmetry

1. *Vea qué regla de sustitución sencilla para los momentos iniciales y finales debe hacer a fin de obtener una sección eficaz a partir de la otra. Esa relación es un ejemplo de lo que se conoce como crossing symmetry.*

La clase pasada calculamos $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ para el caso del scattering de Bhabha en la ecuación, obteniendo

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \left(\frac{u^2 + t^2}{s^2} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{ts} \right). \quad (1)$$

Crossing symmetry

1. *Vea qué regla de sustitución sencilla para los momentos iniciales y finales debe hacer a fin de obtener una sección eficaz a partir de la otra. Esa relación es un ejemplo de lo que se conoce como crossing symmetry.*

La clase pasada calculamos $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ para el caso del scattering de Bhabha en la ecuación, obteniendo

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \left(\frac{u^2 + t^2}{s^2} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{ts} \right). \quad (1)$$

Cuando hagan la misma cuenta para el scattering de Møller, van a obtener

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \left(\frac{s^2 + t^2}{u^2} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2s^2}{tu} \right). \quad (2)$$

Crossing symmetry

1. *Vea qué regla de sustitución sencilla para los momentos iniciales y finales debe hacer a fin de obtener una sección eficaz a partir de la otra. Esa relación es un ejemplo de lo que se conoce como crossing symmetry.*

La clase pasada calculamos $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ para el caso del scattering de Bhabha en la ecuación, obteniendo

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \left(\frac{u^2 + t^2}{s^2} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{ts} \right). \quad (1)$$

Cuando hagan la misma cuenta para el scattering de Møller, van a obtener

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \left(\frac{s^2 + t^2}{u^2} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2s^2}{tu} \right). \quad (2)$$

Vemos que la segunda ecuación se obtiene a partir de la primera intercambiando $s \leftrightarrow u$, o sea, cambiando

$$(p_A, p_B, p_C, p_D) \rightarrow (p_A, -p_C, -p_B, p_D). \quad (3)$$

Crossing symmetry

Hay que entender que esto es solamente un truco (cuyo origen se puede rastrear en la fórmula LSZ) pero que no es físicamente posiblemente tener un momento cuya componente cero sea negativa; lo que estamos pensando más bien es en obtener una sección eficaz a partir de la otra haciendo una continuación analítica hacia momentos con componente cero negativa. Por último, les mencionamos que también es posible hallar relaciones como esta al estudiar secciones eficaces para las cuales las polarizaciones/espines no están promediados.

Crossing symmetry

Hay que entender que esto es solamente un truco (cuyo origen se puede rastrear en la fórmula LSZ) pero que no es físicamente posible tener un momento cuya componente cero sea negativa; lo que estamos pensando más bien es en obtener una sección eficaz a partir de la otra haciendo una continuación analítica hacia momentos con componente cero negativa. Por último, les mencionamos que también es posible hallar relaciones como esta al estudiar secciones eficaces para las cuales las polarizaciones/espines no están promediados.

Les dejamos de tarea que piensen qué proceso puede relacionarse usando la simetría de crossing con el scattering de Compton. ¿Qué valor tiene la amplitud para el proceso $\gamma + e^- \rightarrow e^-$ a orden uno en la constante de acoplamiento e ?

Vida media

La tasa de decaimiento se define para un proceso en el cual una partícula inicial decae o se transforma en N partículas. Esta tasa Γ es un número que dice cual es la probabilidad por unidad de tiempo de que la partícula inicial decaiga en otras. Matemáticamente la definimos como

$$\frac{dP}{dVdt} = (\text{densidad part. inicial}) \times \Gamma. \quad (4)$$

Vida media

La tasa de decaimiento se define para un proceso en el cual una partícula inicial decae o se transforma en N partículas. Esta tasa Γ es un número que dice cual es la probabilidad por unidad de tiempo de que la partícula inicial decaiga en otras. Matemáticamente la definimos como

$$\frac{dP}{dVdt} = (\text{densidad part. inicial}) \times \Gamma. \quad (4)$$

Notando que esta expresión es idéntica a aquella de la sección eficaz reemplazando (densidad de flujo) $\rightarrow 1$, obtenemos inmediatamente

$$d\Gamma = \frac{1}{2\omega_i} (2\pi)^4 \delta \left(\sum_j p'_j - p_i \right) |\mathcal{M}|^2 \left(\prod_{j=1}^N \frac{d^3 \mathbf{p}'_j}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}'_j}} \right), \quad (5)$$

siendo ω_i , p_i la energía y el momento de la partícula inicial y $\omega_{\mathbf{p}'_j}$, p'_j aquellos de las finales.

Definimos entonces el tiempo de vida media como

$$\tau := \frac{1}{\Gamma}. \quad (6)$$

Definimos entonces el tiempo de vida media como

$$\tau := \frac{1}{\Gamma}. \quad (6)$$

Habiendo presentado esta nueva magnitud, consideremos el siguiente problema.

(Práctica 7, Ejercicio 85) *Considere el caso de una teoría de dos campos escalares reales, ϕ_1 y ϕ_2 , de masa M y m respectivamente, acoplados con un término de la forma*

$$\mathcal{L}_{int.} = -\frac{\lambda}{2!} \phi_1 \phi_2^2.$$

Asumiendo que $M > 2m$, halle la vida media de las partículas asociadas al campo ϕ_1 al orden más bajo en potencias de λ . Diga qué ocurre en el límite $M \rightarrow 2m$ y considere el caso $M < 2m$.

Definimos entonces el tiempo de vida media como

$$\tau := \frac{1}{\Gamma}. \quad (6)$$

Habiendo presentado esta nueva magnitud, consideremos el siguiente problema.

(Práctica 7, Ejercicio 85) *Considere el caso de una teoría de dos campos escalares reales, ϕ_1 y ϕ_2 , de masa M y m respectivamente, acoplados con un término de la forma*

$$\mathcal{L}_{int.} = -\frac{\lambda}{2!} \phi_1 \phi_2^2.$$

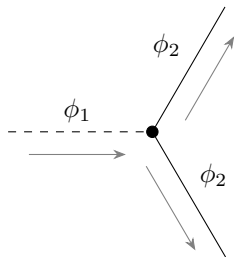
Asumiendo que $M > 2m$, halle la vida media de las partículas asociadas al campo ϕ_1 al orden más bajo en potencias de λ . Diga qué ocurre en el límite $M \rightarrow 2m$ y considere el caso $M < 2m$.

Vida media

Para empezar lo primero que debemos hacer es calcular la amplitud \mathcal{M} del proceso. Para ello notemos que el hamiltoniano de interacción viene dado por

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_{\text{int.}} = \frac{\lambda}{2!} \phi_1 \phi_2^2 \quad (7)$$

que corresponde al siguiente vértice de interacción de Feynman



(8)

ya que en cada vértice deben encontrarse dos bosones de ϕ_2 y uno de tipo ϕ_1 y la constante $2!$ compensa justo el hecho de que hay dos formas de contraer a dos bosones externos con los dos bosones de la interacción (asumiendo que $[\phi_1, \phi_2] = 0$).

Vida media

Se pueden aplicar entonces las reglas de feynman para bosones para obtener la amplitud de que un bosón ϕ_1 de momento p_i decaiga dos bosones ϕ_2 con momentos p'_1 y p'_2 a primer orden en λ como

$$i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta(p'_1 + p'_2 - p_i) = (2\pi)^4\delta(p'_1 + p'_2 - p_i)(-i\lambda) \quad (9)$$

$$\implies \mathcal{M} = -\lambda \quad (10)$$

Vida media

Se pueden aplicar entonces las reglas de feynman para bosones para obtener la amplitud de que un bosón ϕ_1 de momento p_i decaiga dos bosones ϕ_2 con momentos p'_1 y p'_2 a primer orden en λ como

$$i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta(p'_1 + p'_2 - p_i) = (2\pi)^4\delta(p'_1 + p'_2 - p_i)(-i\lambda) \quad (9)$$

$$\implies \mathcal{M} = -\lambda \quad (10)$$

Para simplificar el cálculo podemos pasar al centro de masa del sistema. Allí tenemos

$$p_i = (M, 0, 0, 0) \quad (11)$$

$$p'_1 = (\omega_{\mathbf{p}'_1}, \mathbf{p}) \quad (12)$$

$$p'_2 = (\omega_{\mathbf{p}'_2}, -\mathbf{p}) \quad (13)$$

y podemos copiar la cuenta que hicimos las clases anteriores para la sección eficaz,

Vida media

Se pueden aplicar entonces las reglas de feynman para bosones para obtener la amplitud de que un bosón ϕ_1 de momento p_i decaiga dos bosones ϕ_2 con momentos p'_1 y p'_2 a primer orden en λ como

$$i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta(p'_1 + p'_2 - p_i) = (2\pi)^4\delta(p'_1 + p'_2 - p_i)(-i\lambda) \quad (9)$$

$$\implies \mathcal{M} = -\lambda \quad (10)$$

Para simplificar el cálculo podemos pasar al centro de masa del sistema. Allí tenemos

$$p_i = (M, 0, 0, 0) \quad (11)$$

$$p'_1 = (\omega_{\mathbf{p}'_1}, \mathbf{p}) \quad (12)$$

$$p'_2 = (\omega_{\mathbf{p}'_2}, -\mathbf{p}) \quad (13)$$

y podemos copiar la cuenta que hicimos las clases anteriores para la sección eficaz,obteniendo

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = |\mathcal{M}|^2 \frac{|\mathbf{p}'_1|}{32\pi^2 E_{cm}^2}. \quad (14)$$

Vida media

Recordemos $|\mathbf{p}'_1|$ está fijado por la conservación de la energía

$$M = E_{cm} = \omega_{\mathbf{p}'_1} + \omega_{\mathbf{p}'_2} = 2\sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2} \geq 2m, \quad (15)$$

es decir que el proceso sólo se puede dar si $M \geq 2m$. Cuando $M \rightarrow 2m$ tenemos que la partícula decae en un par de partículas sin momento (en el centro de masa). Mientras que si $M < 2m$ el proceso no ocurre nunca.

Vida media

Recordemos $|\mathbf{p}'_1|$ está fijado por la conservación de la energía

$$M = E_{cm} = \omega_{\mathbf{p}'_1} + \omega_{\mathbf{p}'_2} = 2\sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2} \geq 2m, \quad (15)$$

es decir que el proceso sólo se puede dar si $M \geq 2m$. Cuando $M \rightarrow 2m$ tenemos que la partícula decae en un par de partículas sin momento (en el centro de masa). Mientras que si $M < 2m$ el proceso no ocurre nunca.

Finalmente, despejando de (15), reemplazando en (14) e integrando obtenemos la tasa de decaimiento

$$\Gamma = \int d\Omega \lambda^2 \frac{\sqrt{(M/2)^2 - m^2}}{32\pi^2 M^2} = 4\pi \lambda^2 \frac{\sqrt{(M/2)^2 - m^2}}{32\pi^2 M^2} = \lambda^2 \frac{\sqrt{(M/2)^2 - m^2}}{8\pi M^2}, \quad (16)$$

Vida media

Recordemos $|\mathbf{p}'_1|$ está fijado por la conservación de la energía

$$M = E_{cm} = \omega_{\mathbf{p}'_1} + \omega_{\mathbf{p}'_2} = 2\sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2} \geq 2m, \quad (15)$$

es decir que el proceso sólo se puede dar si $M \geq 2m$. Cuando $M \rightarrow 2m$ tenemos que la partícula decae en un par de partículas sin momento (en el centro de masa). Mientras que si $M < 2m$ el proceso no ocurre nunca.

Finalmente, despejando de (15), reemplazando en (14) e integrando obtenemos la tasa de decaimiento

$$\Gamma = \int d\Omega \lambda^2 \frac{\sqrt{(M/2)^2 - m^2}}{32\pi^2 M^2} = 4\pi \lambda^2 \frac{\sqrt{(M/2)^2 - m^2}}{32\pi^2 M^2} = \lambda^2 \frac{\sqrt{(M/2)^2 - m^2}}{8\pi M^2}, \quad (16)$$

de donde obtenemos que el tiempo de decaimiento es

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{16\pi}{\sqrt{1 - \left(\frac{2m}{M}\right)^2}} \frac{M}{\lambda^2}. \quad (17)$$

Paridad

Esta simetría está asociada al cambio $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (t, -\mathbf{x})$ pero, al igual que sucederá con las otras simetrías de esta clase, la forma exacta en que debemos implementarla dependerá del campo considerado.

Paridad

Esta simetría esta asociada al cambio $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (t, -\mathbf{x})$ pero, al igual que sucederá con las otras simetrías de esta clase, la forma exacta en que debemos implementarla dependerá del campo considerado. Como vimos en una de las primeras clases la ecuación de Klein-Gordon es simétrica ante la transformación

$$\phi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \phi(t, -\mathbf{x}), \quad (18)$$

mientras que la ecuación de Dirac es simétrica ante la transformación

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}). \quad (19)$$

Paridad

Esta simetría esta asociada al cambio $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (t, -\mathbf{x})$ pero, al igual que sucederá con las otras simetrías de esta clase, la forma exacta en que debemos implementarla dependerá del campo considerado. Como vimos en una de las primeras clases la ecuación de Klein-Gordon es simétrica ante la transformación

$$\phi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \phi(t, -\mathbf{x}), \quad (18)$$

mientras que la ecuación de Dirac es simétrica ante la transformación

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}). \quad (19)$$

Si bien estas son transformaciones al nivel de campos clásicos, dado que los Lagrangianos de estas teorías son simétricos ante estas transformaciones uno esperaría que la teoría cuántica mantenga estas simetrías.

Paridad

Esta simetría esta asociada al cambio $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (t, -\mathbf{x})$ pero, al igual que sucederá con las otras simetrías de esta clase, la forma exacta en que debemos implementarla dependerá del campo considerado. Como vimos en una de las primeras clases la ecuación de Klein-Gordon es simétrica ante la transformación

$$\phi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \phi(t, -\mathbf{x}), \quad (18)$$

mientras que la ecuación de Dirac es simétrica ante la transformacion

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}). \quad (19)$$

Si bien estas son transformaciones al nivel de campos clásicos, dado que los Lagrangianos de estas teorías son simétricos ante estas transformaciones uno esperaría que la teoría cuántica mantenga estas simetrías.

Como vimos previamente las simetrías en la teoría cuántica son usualmente implementadas por un operador unitario P de la siguiente manera

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) \rightarrow P^{-1} \hat{\phi}(t, \mathbf{x}) P = \hat{\phi}(t, -\mathbf{x}). \quad (20)$$

Simetrías discretas

En el caso del campo escalar complejo uno puede ver cómo debe actuar sobre los operadores de creación y destrucción de forma similar a lo que hicimos con las transformaciones de Lorentz

$$P^{-1} \hat{\phi}(t, \mathbf{x}) P = \hat{\phi}(t, -\mathbf{x}) \quad (21)$$

$$\implies \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[P^{-1} a_{\mathbf{p}} P e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} + P^{-1} b_{\mathbf{p}}^{\dagger} P e^{i(\omega_{\mathbf{p}} t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right] \quad (22)$$

$$= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[a_{\mathbf{p}} e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{i(\omega_{\mathbf{p}} t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right] \quad (23)$$

Simetrías discretas

En el caso del campo escalar complejo uno puede ver cómo debe actuar sobre los operadores de creación y destrucción de forma similar a lo que hicimos con las transformaciones de Lorentz

$$P^{-1} \hat{\phi}(t, \mathbf{x}) P = \hat{\phi}(t, -\mathbf{x}) \quad (21)$$

$$\implies \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[P^{-1} a_{\mathbf{p}} P e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} + P^{-1} b_{\mathbf{p}}^{\dagger} P e^{i(\omega_{\mathbf{p}} t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right] \quad (22)$$

$$= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[a_{\mathbf{p}} e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{i(\omega_{\mathbf{p}} t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right] \quad (23)$$

y haciendo el cambio de variable $\tilde{\mathbf{p}} = (p^0, -\mathbf{p})$ (seguiremos usando esta convención en adelante) en el lado derecho tenemos

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[P a_{\mathbf{p}} P^{-1} e^{-ipx} + P b_{\mathbf{p}}^{\dagger} P^{-1} e^{ipx} \right] = \int \frac{d^3 \tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\tilde{\mathbf{p}}}}} \left[a_{-\tilde{\mathbf{p}}} e^{-i\tilde{\mathbf{p}}x} + b_{-\tilde{\mathbf{p}}}^{\dagger} e^{i\tilde{\mathbf{p}}x} \right] \quad (24)$$

Simetrías discretas

En el caso del campo escalar complejo uno puede ver cómo debe actuar sobre los operadores de creación y destrucción de forma similar a lo que hicimos con las transformaciones de Lorentz

$$P^{-1} \hat{\phi}(t, \mathbf{x}) P = \hat{\phi}(t, -\mathbf{x}) \quad (21)$$

$$\implies \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[P^{-1} a_{\mathbf{p}} P e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} + P^{-1} b_{\mathbf{p}}^{\dagger} P e^{i(\omega_{\mathbf{p}} t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right] \quad (22)$$

$$= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[a_{\mathbf{p}} e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} + b_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{i(\omega_{\mathbf{p}} t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right] \quad (23)$$

y haciendo el cambio de variable $\tilde{\mathbf{p}} = (p^0, -\mathbf{p})$ (seguiremos usando esta convención en adelante) en el lado derecho tenemos

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[P a_{\mathbf{p}} P^{-1} e^{-ipx} + P b_{\mathbf{p}}^{\dagger} P^{-1} e^{ipx} \right] = \int \frac{d^3 \tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\tilde{\mathbf{p}}}}} \left[a_{-\tilde{\mathbf{p}}} e^{-i\tilde{\mathbf{p}}x} + b_{-\tilde{\mathbf{p}}}^{\dagger} e^{i\tilde{\mathbf{p}}x} \right] \quad (24)$$

y usando la ortogonalidad de las exponenciales tenemos que

$$P^{-1} a_{\mathbf{p}} P = a_{-\mathbf{p}} \quad (25)$$

$$P^{-1} b_{\mathbf{p}}^{\dagger} P = b_{-\mathbf{p}}^{\dagger} \implies P^{-1} b_{\mathbf{p}} P = b_{-\mathbf{p}}. \quad (26)$$

En el caso de un campo de Dirac la cuenta es similar

$$P^{-1}\hat{\psi}(t, \mathbf{x})P = \gamma^0\hat{\psi}(t, -\mathbf{x}) \quad (27)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_s [P^{-1}b_{\mathbf{p}}^s P u^s(p) e^{-ipx} + P^{-1}d_{\mathbf{p}}^{\dagger s} P v^s(p) e^{ipx}] \quad (28)$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_s [b_{\mathbf{p}}^s \gamma^0 u^s(p) e^{-i(\omega_{\mathbf{p}}t + \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} + d_{\mathbf{p}}^{\dagger s} \gamma^0 v^s(p) e^{i(\omega_{\mathbf{p}}t + \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}] \quad (29)$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_s [b_{\mathbf{p}}^s u^s(p_0, -\mathbf{p}) e^{-i(\omega_{\mathbf{p}}t + \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} - d_{\mathbf{p}}^{\dagger s} v^s(p_0, -\mathbf{p}) e^{i(\omega_{\mathbf{p}}t + \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}] \quad (30)$$

$$= \int \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\tilde{\mathbf{p}}}}} \sum_s [b_{-\tilde{\mathbf{p}}}^s u^s(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p}x} - d_{-\tilde{\mathbf{p}}}^{\dagger s} v^s(\tilde{p}) e^{i\tilde{p}x}], \quad (31)$$

donde usamos que $\gamma^0 u^s(p) = u^s(p_0, -\mathbf{p})$ y $\gamma^0 v^s(p) = -v^s(p_0, -\mathbf{p})$.

Esto se puede ver de la siguiente forma

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p} \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix} = \gamma^0 u(\tilde{p}) \implies \gamma^0 u^s(p) = u^s(\tilde{p}) \quad (32)$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p} \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ -\sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix} = \gamma^0 v(\tilde{p}) \implies \gamma^0 v^s(p) = -v^s(\tilde{p}), \quad (33)$$

donde usamos que en la representación quiral γ^0 intercambia las primeras dos componentes con las segundas dos y que $(\gamma^0)^2 = \text{Id}$.

Esto se puede ver de la siguiente forma

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p} \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix} = \gamma^0 u(\tilde{p}) \implies \gamma^0 u^s(p) = u^s(\tilde{p}) \quad (32)$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p} \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ -\sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix} = \gamma^0 v(\tilde{p}) \implies \gamma^0 v^s(p) = -v^s(\tilde{p}), \quad (33)$$

donde usamos que en la representación quirál γ^0 intercambia las primeras dos componentes con las segundas dos y que $(\gamma^0)^2 = \text{Id}$.

Entonces igualando las expresiones (28) y (31) anteriores tenemos

$$P^{-1} b_{\mathbf{p}}^s P = b_{-\mathbf{p}}^s \quad (34)$$

$$P^{-1} d_{\mathbf{p}}^{\dagger s} P = -d_{-\mathbf{p}}^{\dagger s} \implies P^{-1} d_{\mathbf{p}}^s P = -d_{-\mathbf{p}}^s, \quad (35)$$

es decir, que la operación de paridad al invertir las direcciones de los ejes hace parecer que las partículas se mueven en la dirección contraria.

Recordemos que esta simetría generaba las siguientes transformaciones sobre los bilineales

$$P^{-1}\bar{\psi}\psi(t, \mathbf{x})P = (P^{-1}\psi P)^\dagger \gamma^0 P\psi P^{-1} = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 \psi = \bar{\psi}\psi(t, -\mathbf{x}) \quad (36)$$

$$P^{-1}j^\mu(t, \mathbf{x})P = P^{-1}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi P = (P^{-1}\psi P)^\dagger \gamma^0 P^{-1}\psi P \quad (37)$$

$$= \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi = j_\mu(t, -\mathbf{x}). \quad (38)$$

Recordemos que esta simetría generaba las siguientes transformaciones sobre los bilineales

$$P^{-1}\bar{\psi}\psi(t, \mathbf{x})P = (P^{-1}\psi P)^\dagger \gamma^0 P\psi P^{-1} = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 \psi = \bar{\psi}\psi(t, -\mathbf{x}) \quad (36)$$

$$P^{-1}j^\mu(t, \mathbf{x})P = P^{-1}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi P = (P^{-1}\psi P)^\dagger \gamma^0 P^{-1}\psi P \quad (37)$$

$$= \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi = j_\mu(t, -\mathbf{x}). \quad (38)$$

Esperamos que una transformación de paridad tenga el mismo efecto sobre todos los cuadvectores por lo que para el campo electromagnético definimos

$$P^{-1}A^\mu(t, \mathbf{x})P = A_\mu(t, -\mathbf{x}). \quad (39)$$

Inversión temporal

La simetría de inversión temporal está relacionada con el cambio $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (-t, \mathbf{x})$ y surge de manera natural en la mecánica cuántica cuando uno va al laboratorio y se da cuenta de que todos los autoestados de un sistema de espín $1/2$ que es simétrico ante reversión temporal se encuentran doblemente degenerados.

Inversión temporal

La simetría de inversión temporal está relacionada con el cambio $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (-t, \mathbf{x})$ y surge de manera natural en la mecánica cuántica cuando uno va al laboratorio y se da cuenta de que todos los autoestados de un sistema de espín $1/2$ que es simétrico ante reversión temporal se encuentran doblemente degenerados. Esto se conoce como la degeneración de Kramer y se prueba notando que

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H(t) \psi(x, t) \quad (40)$$

$$* \implies \left(-i \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) (x, t) = H^*(t) \psi^*(x, t) \quad (41)$$

$$t \rightarrow -t \implies i \frac{\partial}{\partial t} (\psi^*(x, -t)) = H(-t) \psi^*(x, -t) = H(t) \psi^*(x, -t), \quad (42)$$

es decir que si $\psi(x, t)$ es solución de la ecuación de Schrödinger, $\psi^*(x, -t)$ también lo es y con el mismo autovalor.

Simetrías discretas

En el caso del campo escalar vimos que la transformación $\phi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \phi^*(-t, \mathbf{x})$ es una simetría de la ecuación de Klein-Gordon. Mientras que en el caso de la ecuación de Dirac debemos permitir que el campo cambie en a lo sumo una matriz constante

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow S_T \psi^*(-t, \mathbf{x}). \quad (43)$$

Simetrías discretas

En el caso del campo escalar vimos que la transformación $\phi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \phi^*(-t, \mathbf{x})$ es una simetría de la ecuación de Klein-Gordon. Mientras que en el caso de la ecuación de Dirac debemos permitir que el campo cambie en a lo sumo una matriz constante

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow S_T \psi^*(-t, \mathbf{x}). \quad (43)$$

Para hallarla podemos repetir el procedimiento hecho para el operador paridad, reemplazar este cambio en la ecuación de Dirac e imponer que preserve su forma

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(t, \mathbf{x}) = 0 \rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)S_T \psi^*(-t, \mathbf{x}) = 0 \quad (44)$$

$$\rightarrow [(-i\gamma^0 S_T \partial_0 + i\gamma^i S_T \partial_i - m S_T) \psi^*](-t, \mathbf{x}) = 0 \quad (45)$$

$$* \rightarrow [(i(\gamma^0)^* S_T^* \partial_0 - i(\gamma^i)^* S_T^* \partial_i - m S_T^*) \psi](-t, \mathbf{x}) = 0 \quad (46)$$

$$(S_T^{-1})^* \times \rightarrow [(i(S_T^{-1})^* \gamma^0 S_T^* \partial_0 + i(S_T^{-1})^* (\gamma^i)^* S_T^* \partial_i - m) \psi](-t, \mathbf{x}) = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(t, \mathbf{x}) \quad (47)$$

Así obtenemos las relaciones

$$S_T^{-1}(\gamma^0)S_T = (\gamma^0)^* \quad (48)$$

$$S_T^{-1}\gamma^i S_T = -(\gamma^i)^*, \quad (49)$$

Así obtenemos las relaciones

$$S_T^{-1}(\gamma^0)S_T = (\gamma^0)^* \quad (48)$$

$$S_T^{-1}\gamma^i S_T = -(\gamma^i)^*, \quad (49)$$

lo cual se logra tomando $S_T = -\gamma^1\gamma^3$ (con la representación quirral), con las siguientes propiedades

$$S_T = S_T^{-1} = S_T^\dagger = -S_T^* = -(S_T)^T. \quad (50)$$

Simetrías discretas

Esta transformación vale para la teoría clásica, sin embargo, para la teoría cuántica debemos encontrar un operador T que implemente la simetría tal que

$$\langle \mathbf{x} | \psi \rangle = \psi(0, \mathbf{x}) \rightarrow \psi^*(0, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \psi \rangle^*, \quad (51)$$

noten que como este operador no preserva el producto interno no puede ser unitario.

Simetrías discretas

Esta transformación vale para la teoría clásica, sin embargo, para la teoría cuántica debemos encontrar un operador T que implemente la simetría tal que

$$\langle \mathbf{x} | \psi \rangle = \psi(0, \mathbf{x}) \rightarrow \psi^*(0, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \psi \rangle^*, \quad (51)$$

noten que como este operador no preserva el producto interno no puede ser unitario. Más general, si $|\alpha'\rangle = T|\alpha\rangle$ y $|\beta'\rangle = T|\beta\rangle$ queremos que el operador satisfaga

$$\langle \beta | \alpha \rangle \rightarrow \langle \beta' | \alpha' \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^* = \langle \alpha | \beta \rangle, \quad (52)$$

para todo par de estados en el espacio de Hilbert.

Simetrías discretas

Esta transformación vale para la teoría clásica, sin embargo, para la teoría cuántica debemos encontrar un operador T que implemente la simetría tal que

$$\langle \mathbf{x} | \psi \rangle = \psi(0, \mathbf{x}) \rightarrow \psi^*(0, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \psi \rangle^*, \quad (51)$$

noten que como este operador no preserva el producto interno no puede ser unitario. Más general, si $|\alpha'\rangle = T|\alpha\rangle$ y $|\beta'\rangle = T|\beta\rangle$ queremos que el operador satisfaga

$$\langle \beta | \alpha \rangle \rightarrow \langle \beta' | \alpha' \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^* = \langle \alpha | \beta \rangle, \quad (52)$$

para todo par de estados en el espacio de Hilbert. Esto se logra tomando a T como un operador anti-unitario con las siguientes propiedades

$$T(c_1|\alpha_1\rangle + c_2|\alpha_2\rangle) = (c_1^* T|\alpha_1\rangle + c_2^* T|\alpha_2\rangle) \quad (53)$$

$$\langle \beta | T^\dagger | \alpha \rangle := \langle \alpha | T | \beta \rangle \quad (54)$$

$$TT^\dagger = T^\dagger T = 1. \quad (55)$$

Efectivamente podemos usar estas propiedades para probar

$$\langle \beta' | \alpha' \rangle = \langle \beta' | T | \alpha \rangle = \langle \alpha | T^\dagger | \beta' \rangle = \langle \alpha | T^\dagger T | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^* \quad (56)$$

como buscábamos.

Efectivamente podemos usar estas propiedades para probar

$$\langle \beta' | \alpha' \rangle = \langle \beta' | T | \alpha \rangle = \langle \alpha | T^\dagger | \beta' \rangle = \langle \alpha | T^\dagger T | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^* \quad (56)$$

como buscábamos. Además vale que

$$\langle \beta' | A | \alpha' \rangle = \langle \beta' | A T | \alpha \rangle = \langle \alpha | T^\dagger A^\dagger | \beta' \rangle = \langle \alpha | T^\dagger A^\dagger T | \beta \rangle \quad (57)$$

$$= \langle \alpha | (T^{-1} A T)^\dagger | \beta \rangle. \quad (58)$$

Efectivamente podemos usar estas propiedades para probar

$$\langle \beta' | \alpha' \rangle = \langle \beta' | T | \alpha \rangle = \langle \alpha | T^\dagger | \beta' \rangle = \langle \alpha | T^\dagger T | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^* \quad (56)$$

como buscábamos. Además vale que

$$\langle \beta' | A | \alpha' \rangle = \langle \beta' | A T | \alpha \rangle = \langle \alpha | T^\dagger A^\dagger | \beta' \rangle = \langle \alpha | T^\dagger A^\dagger T | \beta \rangle \quad (57)$$

$$= \langle \alpha | (T^{-1} A T)^\dagger | \beta \rangle. \quad (58)$$

Usemos esta última relación para ver cómo debe transformar el operador del campo de Dirac $\hat{\psi}$ en la teoría cuántica teniendo en cuenta que la relación que obtuvimos antes debe valer para los elementos de matriz, es decir,

$$\langle \alpha | \hat{\psi} | \beta \rangle(t, \mathbf{x}) \rightarrow \langle \alpha' | \hat{\psi} | \beta' \rangle(t, \mathbf{x}) = S_T \langle \alpha | \hat{\psi} | \beta \rangle^*(-t, \mathbf{x}) \quad (59)$$

$$\langle \alpha' | \hat{\psi}(t, \mathbf{x}) | \beta' \rangle = \langle \beta | S_T \hat{\psi}^\dagger(-t, \mathbf{x}) | \alpha \rangle \quad (60)$$

$$\langle \beta | (T^{-1} \hat{\psi}(t, \mathbf{x}) T)^\dagger | \alpha \rangle = \langle \beta | S_T \hat{\psi}^\dagger(-t, \mathbf{x}) | \alpha \rangle \implies T^{-1} \hat{\psi}(t, \mathbf{x}) T = S_T \hat{\psi}(-t, \mathbf{x}). \quad (61)$$

Simetrías discretas

Usemos esta relación para ver cómo transforman los operadores de creación y destrucción

$$T^{-1}\hat{\psi}(t, \mathbf{x})T = S_T\hat{\psi}(-t, \mathbf{x}) \quad (62)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_s [T^{-1}b_{\mathbf{p}}^s T u^{s*}(p)e^{ipx} + T^{-1}d_{\mathbf{p}}^{\dagger s} T v^{s*}(p)e^{-ipx}] \quad (63)$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left[b_{\mathbf{p}}^s (-\gamma^1 \gamma^3) u^{s*}(p) e^{i(\omega_{\mathbf{p}} t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} + d_{\mathbf{p}}^{\dagger s} (-\gamma^1 \gamma^3) v^{s*}(p) e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right] \quad (64)$$

$$= \int \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\tilde{\mathbf{p}}}}} \sum_s \left[b_{-\tilde{\mathbf{p}}}^s u^{-s}(\tilde{p}) e^{i\tilde{p}x} + d_{-\tilde{\mathbf{p}}}^{\dagger s} v^{-s}(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p}x} \right], \quad (65)$$

Simetrías discretas

Usemos esta relación para ver cómo transforman los operadores de creación y destrucción

$$T^{-1}\hat{\psi}(t, \mathbf{x})T = S_T\hat{\psi}(-t, \mathbf{x}) \quad (62)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_s [T^{-1}b_{\mathbf{p}}^s T u^{s*}(p)e^{ipx} + T^{-1}d_{\mathbf{p}}^{\dagger s} T v^{s*}(p)e^{-ipx}] \quad (63)$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_s [b_{\mathbf{p}}^s(-\gamma^1\gamma^3)u^{s*}(p)e^{i(\omega_{\mathbf{p}}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} + d_{\mathbf{p}}^{\dagger s}(-\gamma^1\gamma^3)v^{s*}(p)e^{-i(\omega_{\mathbf{p}}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}] \quad (64)$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\tilde{\mathbf{p}}}}} \sum_s [b_{-\tilde{\mathbf{p}}}^s u^{-s}(\tilde{p})e^{i\tilde{p}x} + d_{-\tilde{\mathbf{p}}}^{\dagger s} v^{-s}(\tilde{p})e^{-i\tilde{p}x}], \quad (65)$$

donde usamos que

$$(-\gamma^1\gamma^3)u^{s*}(p) = u^{-s}(\tilde{p}) \quad (66)$$

$$(-\gamma^1\gamma^3)v^{s*}(p) = v^{-s}(\tilde{p}), \quad (67)$$

siendo $-s$ flippear 180° los espinores.

Igualando (63) y (65), concluimos entonces que los operadores de creación y destrucción transforman como

$$T^{-1} b_{\mathbf{p}}^s T = b_{-\mathbf{p}}^{-s} \quad (68)$$

$$T^{-1} d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} T = d_{-\mathbf{p}}^{-s\dagger} \implies T^{-1} d_{\mathbf{p}}^s T = d_{-\mathbf{p}}^{-s}, \quad (69)$$

es decir que las partículas pasan a “girar” y desplazarse en el sentido opuesto, lo cual es compatible con la idea de que se invirtió la dirección temporal.

Esta operación hace que la cuadraticorrente transforme como

$$T^{-1}\bar{\psi}(t, \mathbf{x})\gamma^\mu\psi(t, \mathbf{x})T = \bar{\psi}(-t, \mathbf{x})(S_T^{-1})\gamma^{\mu*}(S_T)\psi(-t, \mathbf{x}) \quad (70)$$

$$= \bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\gamma_\mu\psi(-t, \mathbf{x}). \quad (71)$$

Esta operación hace que la cuatricorrente transforme como

$$T^{-1}\bar{\psi}(t, \mathbf{x})\gamma^\mu\psi(t, \mathbf{x})T = \bar{\psi}(-t, \mathbf{x})(S_T^{-1})\gamma^{\mu*}(S_T)\psi(-t, \mathbf{x}) \quad (70)$$

$$= \bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\gamma_\mu\psi(-t, \mathbf{x}). \quad (71)$$

Nuevamente pedimos que todos los cuadvectores transformen de la misma manera ante esta operación

$$T^{-1}A^\mu(t, \mathbf{x})T = A_\mu(-t, \mathbf{x}), \quad (72)$$

pero entonces como la operación intercambia los índices de arriba con los de abajo, las contracciones de cuadvectores resultan invariantes. En particular eso quiere decir que el Lagrangiano de Maxwell es invariante ante inversión temporal.

Conjugación de carga

La simetría de conjugación de carga está relacionada con la idea de que si reemplazamos todas las cargas positivas en una teoría por cargas negativas el sistema se comportará de la misma manera.

Conjugación de carga

La simetría de conjugación de carga está relacionada con la idea de que si reemplazamos todas las cargas positivas en una teoría por cargas negativas el sistema se comportará de la misma manera. A nivel clásico el mejor ejemplo de esto es el campo de Klein-Gordon complejo. Su Lagrangiano es invariante ante el intercambio $\phi \rightarrow \phi^*$ lo cual daba lugar a una corriente cargada j^μ , que a su vez cambia de signo ante dicho intercambio

$$j^\mu = -\frac{i}{2} (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi^*) \rightarrow -j^\mu. \quad (73)$$

Decimos entonces que el cambio $\phi \rightarrow \phi^*$ genera una conjugación de carga.

Simetrías discretas

Análogamente, para el campo de Dirac esperamos que haya una simetría al intercambiar $\psi \rightarrow S_C \bar{\psi}^T$, donde trasponemos para que el intercambio tenga sentido y permitimos como antes la libertad de una matriz constante.

Simetrías discretas

Análogamente, para el campo de Dirac esperamos que haya una simetría al intercambiar $\psi \rightarrow S_C \bar{\psi}^T$, donde trasponemos para que el intercambio tenga sentido y permitimos como antes la libertad de una matriz constante. Podemos encontrar la matriz S_C reemplazando en la ecuación para ψ

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)S_C \bar{\psi}^T = 0 \rightarrow (iS_C^{-1} \gamma^\mu S_C \partial_\mu - m)\bar{\psi}^T = 0 \quad (74)$$

Simetrías discretas

Análogamente, para el campo de Dirac esperamos que haya una simetría al intercambiar $\psi \rightarrow S_C \bar{\psi}^T$, donde trasponemos para que el intercambio tenga sentido y permitimos como antes la libertad de una matriz constante. Podemos encontrar la matriz S_C reemplazando en la ecuación para ψ

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)S_C \bar{\psi}^T = 0 \rightarrow (iS_C^{-1} \gamma^\mu S_C \partial_\mu - m)\bar{\psi}^T = 0 \quad (74)$$

e igualando a la ecuación para $\bar{\psi}^T$

$$(i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m\bar{\psi}) = 0 \quad (75)$$

$${}^T \rightarrow 0 = (-i\gamma^{\mu T} \partial_\mu - m)\bar{\psi}^T = (iS_C^{-1} \gamma^{\mu T} S_C \partial_\mu - m)\bar{\psi}^T \quad (76)$$

Simetrías discretas

Análogamente, para el campo de Dirac esperamos que haya una simetría al intercambiar $\psi \rightarrow S_C \bar{\psi}^T$, donde trasponemos para que el intercambio tenga sentido y permitimos como antes la libertad de una matriz constante. Podemos encontrar la matriz S_C reemplazando en la ecuación para ψ

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)S_C \bar{\psi}^T = 0 \rightarrow (iS_C^{-1} \gamma^\mu S_C \partial_\mu - m)\bar{\psi}^T = 0 \quad (74)$$

e igualando a la ecuación para $\bar{\psi}^T$

$$(i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m\bar{\psi}) = 0 \quad (75)$$

$${}^T \rightarrow 0 = (-i\gamma^{\mu T} \partial_\mu - m)\bar{\psi}^T = (iS_C^{-1} \gamma^{\mu T} S_C \partial_\mu - m)\bar{\psi}^T \quad (76)$$

lo que nos da las relaciones

$$S_C^{-1} \gamma^\mu S_C = -(\gamma^\mu)^T, \quad (77)$$

Simetrías discretas

Análogamente, para el campo de Dirac esperamos que haya una simetría al intercambiar $\psi \rightarrow S_C \bar{\psi}^T$, donde trasponemos para que el intercambio tenga sentido y permitimos como antes la libertad de una matriz constante. Podemos encontrar la matriz S_C reemplazando en la ecuación para ψ

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)S_C \bar{\psi}^T = 0 \rightarrow (iS_C^{-1} \gamma^\mu S_C \partial_\mu - m)\bar{\psi}^T = 0 \quad (74)$$

e igualando a la ecuación para $\bar{\psi}^T$

$$(i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m\bar{\psi}) = 0 \quad (75)$$

$${}^T \rightarrow 0 = (-i\gamma^{\mu T} \partial_\mu - m)\bar{\psi}^T = (iS_C^{-1} \gamma^{\mu T} S_C \partial_\mu - m)\bar{\psi}^T \quad (76)$$

lo que nos da las relaciones

$$S_C^{-1} \gamma^\mu S_C = -(\gamma^\mu)^T, \quad (77)$$

que podemos satisfacer tomando $S_C = -i(\gamma^0 \gamma^2)^T$ (con la representación quiral). Esta matriz satisface entonces la siguiente propiedad

$$S_C^{-1} = S_C^\dagger = S_C^T = -S_C. \quad (78)$$

Simetrías discretas

A nivel cuántico esta transformación de simetría se puede implementar con el un operador unitario C tal que

$$C^{-1}\psi C = S_C \bar{\psi}^T \quad (79)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_s [C^{-1} b_{\mathbf{p}}^s C u^s(p) e^{-ipx} + C^{-1} d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} C v^s(p) e^{ipx}] = \quad (80)$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left[-b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} i (\gamma^0 \gamma^2)^T (\bar{u}^s)^T(p) e^{ipx} - i (\gamma^0 \gamma^2)^T d_{\mathbf{p}}^s (\bar{v}^s)^T(p) e^{-ipx} \right] \quad (81)$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_s [b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} (-iu^{s\dagger} \gamma^2)^T(p) e^{ipx} + d_{\mathbf{p}}^s (-iv^{s\dagger} \gamma^2)^T(p) e^{-ipx}] \quad (82)$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_s [b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ipx} + d_{\mathbf{p}}^s u^s(p) e^{-ipx}], \quad (83)$$

donde en la última igualdad usamos que

$$-i\gamma^2 u^{s*} = v^s \iff -i\gamma^2 v^{s*} = u^s. \quad (84)$$

Simetrías discretas

Igualando las ecuaciones (80) y (83) tenemos que

$$C^{-1} b_{\mathbf{p}}^s C = d_{\mathbf{p}}^s \quad (85)$$

$$C^{-1} d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} C = b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \implies C^{-1} d_{\mathbf{p}}^s C = b_{\mathbf{p}}^s, \quad (86)$$

es decir, que esta operación intercambia partículas con antipartículas, lo que es compatible con un cambio en el signo de la carga.

Simetrías discretas

Igualando las ecuaciones (80) y (83) tenemos que

$$C^{-1} b_{\mathbf{p}}^s C = d_{\mathbf{p}}^s \quad (85)$$

$$C^{-1} d_{\mathbf{p}}^{\dagger s} C = b_{\mathbf{p}}^{\dagger s} \implies C^{-1} d_{\mathbf{p}}^s C = b_{\mathbf{p}}^s, \quad (86)$$

es decir, que esta operación intercambia partículas con antipartículas, lo que es compatible con un cambio en el signo de la carga.

Podemos entonces ver que la cuadricorriente transforma según

$$C^{-1} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi C = -\psi^T S_C^{-1} \gamma^\mu S_C \bar{\psi}^T = \psi^T (\gamma^\mu)^T \bar{\psi}^T = -(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^T \quad (87)$$

$$= -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (88)$$

Simetrías discretas

Igualando las ecuaciones (80) y (83) tenemos que

$$C^{-1} b_{\mathbf{p}}^s C = d_{\mathbf{p}}^s \quad (85)$$

$$C^{-1} d_{\mathbf{p}}^{\dagger s} C = b_{\mathbf{p}}^{\dagger s} \implies C^{-1} d_{\mathbf{p}}^s C = b_{\mathbf{p}}^s, \quad (86)$$

es decir, que esta operación intercambia partículas con antipartículas, lo que es compatible con un cambio en el signo de la carga.

Podemos entonces ver que la cuadricorriente transforma según

$$C^{-1} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi C = -\psi^T S_C^{-1} \gamma^\mu S_C \bar{\psi}^T = \psi^T (\gamma^\mu)^T \bar{\psi}^T = -(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^T \quad (87)$$

$$= -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (88)$$

De nuevo si pedimos que todos los cuadvectores transformen ante conjugación de esta forma

$$C^{-1} A^\mu C = -A^\mu, \quad (89)$$

como las contracciones de cuadvectores contienen pares los signos se cancelan y resultan invariantes. En particular el Lagrangiano de Maxwell resulta invariante ante conjugación de carga.

Simetrías en las interacciones

Con todo lo que dijimos ya deberían estar convencidos de que el Lagrangiano de QED es invariante ante las 3 operaciones anteriores, pero veamos explícitamente que es invariante ante paridad

$$-eA_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \xrightarrow{P} -eA^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi), \quad (90)$$

Simetrías en las interacciones

Con todo lo que dijimos ya deberían estar convencidos de que el Lagrangiano de QED es invariante ante las 3 operaciones anteriores, pero veamos explícitamente que es invariante ante paridad

$$-eA_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \rightarrow_P -eA^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi), \quad (90)$$

ante inversión temporal

$$-eA_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \rightarrow_T -eA^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) \quad (91)$$

Simetrías en las interacciones

Con todo lo que dijimos ya deberían estar convencidos de que el Lagrangiano de QED es invariante ante las 3 operaciones anteriores, pero veamos explícitamente que es invariante ante paridad

$$-eA_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \rightarrow_P -eA^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi), \quad (90)$$

ante inversión temporal

$$-eA_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \rightarrow_T -eA^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) \quad (91)$$

y ante conjugación de carga

$$-eA_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \rightarrow_C -e(-A_\mu)(-\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = -eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (92)$$

Teorema CPT: Para cualquier teoría cuántica de campos local (que cumpla con los axiomas de Wightman), que esté descrita por un Lagrangiano hermítico e invariante de Lorentz $\mathcal{L}(x)$, se satisface la siguiente relación

$$(CPT)^{-1}\mathcal{L}(x)(CPT) = \mathcal{L}(-x), \quad (93)$$

es decir, resulta invariante ante la transformación conjunta de inversión temporal, paridad y conjugación de carga.