Campos - Práctica

Ecuaciones de onda relativistas.

Ecuación de Klein-Gordon

Recordemos que la ecuación de Klein-Gordon surge originalmente con la intención de obtener una ecuación cuántica relativista. Para ese entonces se conocía la ecuación de Schrödinger que podemos escribir como

$$\hat{H}\psi = \left(\frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V} \right) \psi \tag{1}$$

donde $\hat{H} = i\partial_t$ y $\hat{P} = -i\nabla$, y que como notarán se basa en la expresión clásica de la energía $E = P^2/2m + V$.

Ecuación de Klein-Gordon

Recordemos que la ecuación de Klein-Gordon surge originalmente con la intención de obtener una ecuación cuántica relativista. Para ese entonces se conocía la ecuación de Schrödinger que podemos escribir como

$$\hat{H}\psi = \left(\frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}\right)\psi \tag{1}$$

donde $\hat{H} = i\partial_t$ y $\hat{P} = -i\nabla$, y que como notarán se basa en la expresión clásica de la energía $E = P^2/2m + V$. La idea entonces para generalizarla fue utilizar la expresión relativista $E^2 = P^2 + m^2$ promoviendo los escalares a operadores y aplicandola a una función para llegar a $(-\hat{H}^2 + \hat{P}^2 + m^2)\phi = 0$.

Ecuación de Klein-Gordon

Recordemos que la ecuación de Klein-Gordon surge originalmente con la intención de obtener una ecuación cuántica relativista. Para ese entonces se conocía la ecuación de Schrödinger que podemos escribir como

$$\hat{H}\psi = \left(\frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}\right)\psi \tag{1}$$

donde $\hat{H} = i\partial_t$ y $\hat{P} = -i\nabla$, y que como notarán se basa en la expresión clásica de la energía $E = P^2/2m + V$. La idea entonces para generalizarla fue utilizar la expresión relativista $E^2 = P^2 + m^2$ promoviendo los escalares a operadores y aplicandola a una función para llegar a $(-\hat{H}^2 + \hat{P}^2 + m^2)\phi = 0$.Si reemplazamos las relaciones anteriores para $\hat{H}$ y $\hat{P}$ obtenemos la ecuación de Klein-Gordon

$$\partial_t^2\phi - \nabla^2\phi + m^2\phi = 0, \quad \boxed{\left(\partial^\mu\partial_\nu + m^2\right)\phi = 0}, \quad \left(\Box + m^2\right)\phi = 0$$

Ecuación de Klein-Gordon

Recordemos que la ecuación de Klein-Gordon surge originalmente con la intención de obtener una ecuación cuántica relativista. Para ese entonces se conocía la ecuación de Schrödinger que podemos escribir como

$$\hat{H}\psi = \left(\frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}\right)\psi \tag{1}$$

donde $\hat{H} = i\partial_t$ y $\hat{P} = -i\nabla$, y que como notarán se basa en la expresión clásica de la energía $E = P^2/2m + V$. La idea entonces para generalizarla fue utilizar la expresión relativista $E^2 = P^2 + m^2$ promoviendo los escalares a operadores y aplicandola a una función para llegar a $(-\hat{H}^2 + \hat{P}^2 + m^2)\phi = 0$.Si reemplazamos las relaciones anteriores para $\hat{H}$ y $\hat{P}$ obtenemos la ecuación de Klein-Gordon

$$\partial_t^2\phi - \nabla^2\phi + m^2\phi = 0, \quad \boxed{\left(\partial^\mu\partial_\nu + m^2\right)\phi = 0}, \quad \left(\Box + m^2\right)\phi = 0$$

Datos $\phi(\mathbf{x}, t = 0) = \phi_0$ y $\dot{\phi}(\mathbf{x}, t = 0) = \dot{\phi}_0$

Invariancia de Poincaré de la ecuación

Invariancia de Poincaré de la ecuación

Notaremos a $\phi(t, x, y, z)$ como $\phi(x^\mu)$.

Veamos que si esta función satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + m^2\phi\right)(x^\sigma) = 0 \quad \forall x \tag{2}$$

entonces $\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)$ también lo hace.

Ecuación de Klein-Gordon

Tenemos que reemplazar en la ecuación y ver que se anula

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\left(\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)\right) \tag{3}$$

Ecuación de Klein-Gordon

Tenemos que reemplazar en la ecuación y ver que se anula

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\left(\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)\right) \tag{3}$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\left(\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{4}$$

Ecuación de Klein-Gordon

Tenemos que reemplazar en la ecuación y ver que se anula

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\left(\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)\right) \tag{3}$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\left(\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{4}$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\Lambda^\alpha_\sigma\left(\partial_\nu x^\sigma\right)\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma). \tag{5}$$

Ecuación de Klein-Gordon

Tenemos que reemplazar en la ecuación y ver que se anula

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\left(\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)\right) \tag{3}$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\left(\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{4}$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\Lambda^\alpha_\sigma\left(\partial_\nu x^\sigma\right)\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma). \tag{5}$$

Usando que $\partial_\nu x^\rho = \delta^\rho_\nu$ (esta es la delta de kronecker de siempre, mantenemos la posición de los índices para recordar cómo se contraen)

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\Lambda^\alpha_\sigma\delta^\sigma_\nu\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{6}$$

Ecuación de Klein-Gordon

Tenemos que reemplazar en la ecuación y ver que se anula

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\left(\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)\right) \tag{3}$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\left(\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{4}$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\Lambda^\alpha_\sigma\left(\partial_\nu x^\sigma\right)\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma). \tag{5}$$

Usando que $\partial_\nu x^\rho = \delta^\rho_\nu$ (esta es la delta de kronecker de siempre, mantenemos la posición de los índices para recordar cómo se contraen)

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\Lambda^\alpha_\sigma\delta^\sigma_\nu\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{6}$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\Lambda^\alpha_\nu\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{7}$$

Ecuación de Klein-Gordon

Tenemos que reemplazar en la ecuación y ver que se anula

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\left(\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)\right) \tag{3}$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\left(\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{4}$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\Lambda^\alpha_\sigma\left(\partial_\nu x^\sigma\right)\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma). \tag{5}$$

Usando que $\partial_\nu x^\rho = \delta^\rho_\nu$ (esta es la delta de kronecker de siempre, mantenemos la posición de los índices para recordar cómo se contraen)

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\Lambda^\alpha_\sigma\delta^\sigma_\nu\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{6}$$

$$= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\left(\Lambda^\alpha_\nu\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right)\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{7}$$

$$= \eta^{\mu\nu}\Lambda^\alpha_\nu\Lambda^\beta_\mu\left(\partial_\alpha\partial_\beta\phi\right)\left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right) + m^2\phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) \tag{8}$$

Ahora recordemos que

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \implies \Lambda^{\alpha}_{\mu} \eta^{\mu\nu} \Lambda^{\beta}_{\nu} = \eta^{\alpha\beta} \tag{9}$$

Ahora recordemos que

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \implies \Lambda^\alpha_\mu \eta^{\mu\nu} \Lambda^\beta_\nu = \eta^{\alpha\beta} \tag{9}$$

con lo cual tenemos

$$(8) = \eta^{\alpha\beta} \left(\partial_\alpha \partial_\beta \phi\right) \left(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma\right) + m^2 \phi(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma) = 0 \tag{10}$$

que es la ecuación de Klein-Gordon solo que evaluada en el punto $(\Lambda^\sigma_\rho x^\rho + a^\sigma)$, pero como la ecuación vale para todo punto tenemos que se anula.

Invariancia de Poincaré de la ecuación ante el grupo discreto de transformaciones C y P y T

Ecuación de Klein-Gordon

Invariancia de Poincaré de la ecuación ante el grupo discreto de transformaciones C y P y T

Recordemos la acción de estas operaciones para el caso del campo escalar

$$C\left(\phi(t,\mathbf{x})\right) = \phi^*(t,\mathbf{x}), \quad \text{Conjugación} \tag{11}$$

Invariancia de Poincaré de la ecuación ante el grupo discreto de transformaciones C y P y T

Recordemos la acción de estas operaciones para el caso del campo escalar

$$C\left(\phi(t,\mathbf{x})\right) = \phi^*(t,\mathbf{x}), \quad \text{Conjugación} \tag{11}$$

$$P\left(\phi(t,\mathbf{x})\right) = \phi(t,-\mathbf{x}), \quad \text{Paridad} \tag{12}$$

Invariancia de Poincaré de la ecuación ante el grupo discreto de transformaciones C y P y T

Recordemos la acción de estas operaciones para el caso del campo escalar

$$C\left(\phi(t, \mathbf{x})\right) = \phi^*(t, \mathbf{x}), \quad \text{Conjugación} \tag{11}$$

$$P\left(\phi(t, \mathbf{x})\right) = \phi(t, -\mathbf{x}), \quad \text{Paridad} \tag{12}$$

$$T\left(\phi(t, \mathbf{x})\right) = \phi(-t, \mathbf{x}), \quad \text{Inversión temporal} \tag{13}$$

Ecuación de Klein-Gordon

Invariancia de Poincaré de la ecuación ante el grupo discreto de transformaciones C y P y T

Recordemos la acción de estas operaciones para el caso del campo escalar

$$C\left(\phi(t,\mathbf{x})\right) = \phi^*(t,\mathbf{x}), \quad \text{Conjugación} \tag{11}$$

$$P\left(\phi(t,\mathbf{x})\right) = \phi(t,-\mathbf{x}), \quad \text{Paridad} \tag{12}$$

$$T\left(\phi(t,\mathbf{x})\right) = \phi(-t,\mathbf{x}), \quad \text{Inversión temporal} \tag{13}$$

Queremos ver que dada ϕ solución de la ecuación de Klein-Gordon

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + m^2\phi = 0 \tag{14}$$

ϕ^* también es solución.

Ecuación de Klein-Gordon

Invariancia de Poincaré de la ecuación ante el grupo discreto de transformaciones C y P y T

Recordemos la acción de estas operaciones para el caso del campo escalar

$$C\left(\phi(t,\mathbf{x})\right) = \phi^*(t,\mathbf{x}), \quad \text{Conjugación} \tag{11}$$

$$P\left(\phi(t,\mathbf{x})\right) = \phi(t,-\mathbf{x}), \quad \text{Paridad} \tag{12}$$

$$T\left(\phi(t,\mathbf{x})\right) = \phi(-t,\mathbf{x}), \quad \text{Inversión temporal} \tag{13}$$

Queremos ver que dada ϕ solución de la ecuación de Klein-Gordon

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + m^2\phi = 0 \tag{14}$$

ϕ^* también es solución.Conjugando la ecuación anterior tenemos

$$0 = \left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + m^2\phi\right)^* = \left(\eta^{\mu\nu}\right)^*\partial_\mu\partial_\nu\phi^* + \left(m^2\right)^*\phi^* = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi^* + m^2\phi^* \tag{15}$$

Derivando es fácil ver que al transformar $(t,x,y,z)\to(t,-x,y,z)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_x^2\left(\phi(t,-x,y,z)\right) &= -\partial_x\left(\left(\partial_x\phi\right)(t,-x,y,z)\right)=(-1)^2\left(\partial_x\partial_x\phi\right)(t,-x,y,z)= && (16)\\
&= \left(\partial_x^2\phi\right)(t,-x,y,z) && (17)
\end{aligned}$$

Ecuación de Klein-Gordon

Derivando es fácil ver que al transformar $(t,x,y,z) \to (t,-x,y,z)$ tenemos

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \left(\phi(t,-x,y,z)\right) &= -\partial_x \left(\left(\partial_x \phi\right)(t,-x,y,z)\right) = (-1)^2 \left(\partial_x \partial_x \phi\right)(t,-x,y,z) = \quad (16) \\ &= \left(\partial_x^2 \phi\right)(t,-x,y,z) \quad (17) \end{aligned}$$

y también

$$\partial_y^2 \left(\phi(t,-x,y,z)\right) = \left(\partial_y^2 \phi\right)(t,-x,y,z). \quad (18)$$

Ecuación de Klein-Gordon

Derivando es fácil ver que al transformar $(t, x, y, z) \to (t, -x, y, z)$ tenemos

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \left(\phi(t, -x, y, z)\right) &= -\partial_x \left(\left(\partial_x \phi\right)(t, -x, y, z)\right) = (-1)^2 \left(\partial_x \partial_x \phi\right)(t, -x, y, z) = & (16) \\ &= \left(\partial_x^2 \phi\right)(t, -x, y, z) & (17) \end{aligned}$$

y también

$$\partial_y^2 \left(\phi(t, -x, y, z)\right) = \left(\partial_y^2 \phi\right)(t, -x, y, z). \quad (18)$$

Luego usando que

$$\left(\Box + m^2\right) \phi = \partial_t \partial_t \phi - \partial_x^2 \phi - \partial_y^2 \phi - \partial_z^2 \phi + m^2 \phi = 0 \quad (19)$$

Ecuación de Klein-Gordon

Derivando es fácil ver que al transformar $(t, x, y, z) \to (t, -x, y, z)$ tenemos

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \left(\phi(t, -x, y, z)\right) &= -\partial_x \left(\left(\partial_x \phi\right)(t, -x, y, z)\right) = (-1)^2 \left(\partial_x \partial_x \phi\right)(t, -x, y, z) = & (16) \\ &= \left(\partial_x^2 \phi\right)(t, -x, y, z) & (17) \end{aligned}$$

y también

$$\partial_y^2 \left(\phi(t, -x, y, z)\right) = \left(\partial_y^2 \phi\right)(t, -x, y, z). \quad (18)$$

Luego usando que

$$\left(\Box + m^2\right) \phi = \partial_t \partial_t \phi - \partial_x^2 \phi - \partial_y^2 \phi - \partial_z^2 \phi + m^2 \phi = 0 \quad (19)$$

y como los términos con dos derivadas no cambian (y la constante tampoco) ante reflexiones de una coordenada es claro que la misma ecuación sigue valiendo para $\phi(t, -x, y, z)$

$$\left(\Box + m^2\right) \left(\phi(t, -x, y, z)\right) = \left(\left(\Box + m^2\right) \phi\right)(t, -x, y, z). \quad (20)$$

Ecuacion de Klein-Gordon para un campo complejo

Tratemos de entender qué es ϕ.

Ecuacion de Klein-Gordon para un campo complejo

Tratemos de entender qué es ϕ. ¿Es una función de onda?

Ecuacion de Klein-Gordon para un campo complejo

Tratemos de entender qué es ϕ. ¿Es una función de onda?Supongomos entonces que ϕ es complejo

Ecuacion de Klein-Gordon para un campo complejo

Tratemos de entender qué es ϕ. ¿Es una función de onda?Supongomos entonces que ϕ es complejo

Veamos que la corriente $j_\mu \equiv -\frac{i}{2}(\varphi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*)$ satisface la ecuación de continuidad $\partial_u j^u = 0$ si ϕ satisface la ecuación de Klein-Gordon.

Ecuacion de Klein-Gordon para un campo complejo

Tratemos de entender qué es ϕ. ¿Es una función de onda?Supongomos entonces que ϕ es complejo

Veamos que la corriente $j_\mu \equiv -\frac{i}{2}(\varphi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*)$ satisface la ecuación de continuidad $\partial_u j^u = 0$ si ϕ satisface la ecuación de Klein-Gordon.

$$\partial_\mu j^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu j_\nu = -\frac{i}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \left(\phi^* \partial_\nu \phi - \phi \partial_\nu \phi^*\right) = \tag{21}$$

Ecuacion de Klein-Gordon para un campo complejo

Tratemos de entender qué es ϕ. ¿Es una función de onda?Supongomos entonces que ϕ es complejo

Veamos que la corriente $j_\mu \equiv -\frac{i}{2}(\varphi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*)$ satisface la ecuación de continuidad $\partial_u j^u = 0$ si ϕ satisface la ecuación de Klein-Gordon.

$$\partial_\mu j^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu j_\nu = -\frac{i}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \left(\phi^* \partial_\nu \phi - \phi \partial_\nu \phi^*\right) = \tag{21}$$

$$= -\frac{i}{2} \eta^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \phi^* \partial_\mu \partial_\nu \phi - \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi^* - \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi^*\right) \tag{22}$$

Ecuacion de Klein-Gordon para un campo complejo

Tratemos de entender qué es ϕ. ¿Es una función de onda?Supongomos entonces que ϕ es complejo

Veamos que la corriente $j_\mu \equiv -\frac{i}{2}(\varphi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*)$ satisface la ecuación de continuidad $\partial_u j^u = 0$ si ϕ satisface la ecuación de Klein-Gordon.

$$\partial_\mu j^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu j_\nu = -\frac{i}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \left(\phi^* \partial_\nu \phi - \phi \partial_\nu \phi^*\right) = \tag{21}$$

$$= -\frac{i}{2} \eta^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \phi^* \partial_\mu \partial_\nu \phi - \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi^* - \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi^*\right) \tag{22}$$

el primer y el último término se cancelan al contraer con $\eta^{\mu\nu}$ y nos queda

$$\partial_\mu j^\mu = -\frac{i}{2} \left(\phi^* \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - \phi \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi^*\right) \tag{23}$$

Ecuacion de Klein-Gordon para un campo complejo

Usando que el campo satisface la ecuación de Klein-Gordon tenemos que

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = -m^2\phi \tag{24}$$

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi^* = -m^2\phi^* \tag{25}$$

Ecuacion de Klein-Gordon para un campo complejo

Usando que el campo satisface la ecuación de Klein-Gordon tenemos que

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = -m^2\phi \tag{24}$$

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi^* = -m^2\phi^* \tag{25}$$

y reemplazando

$$\partial_\mu j^\mu = m^2\frac{i}{2}\left(\phi^*\phi - \phi\phi^*\right) \implies \boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \tag{26}$$

Ecuacion de Klein-Gordon para un campo complejo

Usando que el campo satisface la ecuación de Klein-Gordon tenemos que

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = -m^2\phi \tag{24}$$

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi^* = -m^2\phi^* \tag{25}$$

y reemplazando

$$\partial_\mu j^\mu = m^2\frac{i}{2}\left(\phi^*\phi - \phi\phi^*\right) \implies \boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \tag{26}$$

Evidentemente esto seguiría valiendo si la multiplicasemos por cualquier número complejo; sin embargo, es fácil ver que la unidad imaginaria es necesaria para que esta corriente sea real

$$\boxed{j_\mu = -\frac{i}{2}2i\mathrm{Im}\left(\phi^*\partial_\mu\phi\right) = \mathrm{Im}\left(\phi^*\partial_\mu\phi\right)}. \tag{27}$$

Ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

Si tenemos soluciones de onda plana

$$\phi_{\pm}(x) = e^{\mp i k^{\mu} x_{\mu}}, \quad (\Box + m^2)\phi_{\pm} = 0 \implies -k^{\mu} k_{\mu} + m^2 = 0, \quad \implies k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad (28)$$

Ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

Si tenemos soluciones de onda plana

$$\phi_\pm(x) = e^{\mp ik^\mu x_\mu}, \quad (\Box + m^2)\phi_\pm = 0 \implies -k^\mu k_\mu + m^2 = 0, \quad \implies k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \tag{28}$$

entonces su corriente asociada es

$$j^\pm_\mu = -\frac{i}{2}\left(\phi^*_\pm \partial_\mu \phi_\pm - \phi_\pm \partial_\mu \phi^*_\pm\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{\pm ik^\nu x_\nu}\partial_\mu e^{\mp ik^\nu x_\nu} - e^{\mp ik^\nu x_\nu}\partial_\mu e^{\pm ik^\nu x_\nu}\right) = \tag{29}$$

Ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

Si tenemos soluciones de onda plana

$$\phi_{\pm}(x) = e^{\mp i k^{\mu} x_{\mu}}, \quad (\Box + m^2)\phi_{\pm} = 0 \implies -k^{\mu}k_{\mu} + m^2 = 0, \quad \implies k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \tag{28}$$

entonces su corriente asociada es

$$j_{\mu}^{\pm} = -\frac{i}{2}\left(\phi_{\pm}^{*}\partial_{\mu}\phi_{\pm} - \phi_{\pm}\partial_{\mu}\phi_{\pm}^{*}\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{\pm i k^{\nu} x_{\nu}}\partial_{\mu}e^{\mp i k^{\nu} x_{\nu}} - e^{\mp i k^{\nu} x_{\nu}}\partial_{\mu}e^{\pm i k^{\nu} x_{\nu}}\right) = \tag{29}$$

$$= -\frac{i}{2}\left(e^{\pm i k^{\nu} x_{\nu}}\left(\mp i k_{\mu}\right)e^{\mp i k^{\nu} x_{\nu}} - e^{\mp i k^{\nu} x_{\nu}}\left(\pm i k_{\mu}\right)e^{\pm i k^{\nu} x_{\nu}}\right) = \tag{30}$$

Ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

Si tenemos soluciones de onda plana

$$\phi_{\pm}(x) = e^{\mp i k^{\mu} x_{\mu}}, \quad (\Box + m^2)\phi_{\pm} = 0 \implies -k^{\mu}k_{\mu} + m^2 = 0, \quad \implies k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \tag{28}$$

entonces su corriente asociada es

$$j_{\mu}^{\pm} = -\frac{i}{2}\left(\phi_{\pm}^{*}\partial_{\mu}\phi_{\pm} - \phi_{\pm}\partial_{\mu}\phi_{\pm}^{*}\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{\pm i k^{\nu} x_{\nu}}\partial_{\mu}e^{\mp i k^{\nu} x_{\nu}} - e^{\mp i k^{\nu} x_{\nu}}\partial_{\mu}e^{\pm i k^{\nu} x_{\nu}}\right) = \tag{29}$$

$$= -\frac{i}{2}\left(e^{\pm i k^{\nu} x_{\nu}}\left(\mp i k_{\mu}\right)e^{\mp i k^{\nu} x_{\nu}} - e^{\mp i k^{\nu} x_{\nu}}\left(\pm i k_{\mu}\right)e^{\pm i k^{\nu} x_{\nu}}\right) = \tag{30}$$

$$= -\frac{i}{2}\left((\mp i k_{\mu}) - (\pm i k_{\mu})\right) = \mp k_{\mu}. \tag{31}$$

Ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

Tenemos entonces que $j_0^{\pm} = \mp k^0 = \mp\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ que es positiva para las soluciones de frecuencia negativa y negativa para las soluciones de frecuencia positiva.

Ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

Tenemos entonces que $j_0^{\pm} = \mp k^0 = \mp\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ que es positiva para las soluciones de frecuencia negativa y negativa para las soluciones de frecuencia positiva.Sin embargo, si

$$\phi = a\phi_+ + b\phi_-, \tag{32}$$

Ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

Tenemos entonces que $j_0^{\pm} = \mp k^0 = \mp\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ que es positiva para las soluciones de frecuencia negativa y negativa para las soluciones de frecuencia positiva.Sin embargo, si

$$\phi = a\phi_+ + b\phi_-, \tag{32}$$

entonces

$$j_\mu = \mathsf{Im}\left(\left(a\phi_+ + b\phi_-\right)^* \partial_\mu \left(a\phi_+ + b\phi_-\right)\right) = \mathsf{Im}\left(\left(a^*\phi_+^* + b^*\phi_-^*\right) \partial_\mu \left(a\phi_+ + b\phi_-\right)\right) \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

Ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

Tenemos entonces que $j_0^{\pm} = \mp k^0 = \mp\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ que es positiva para las soluciones de frecuencia negativa y negativa para las soluciones de frecuencia positiva.Sin embargo, si

$$\phi = a\phi_+ + b\phi_-, \tag{32}$$

entonces

$$j_\mu = \mathrm{Im}\left((a\phi_+ + b\phi_-)^* \partial_\mu (a\phi_+ + b\phi_-)\right) = \mathrm{Im}\left(\left(a^*\phi_+^* + b^*\phi_-^*\right) \partial_\mu (a\phi_+ + b\phi_-)\right) \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

$$= \mathrm{Im}\left(|a|^2\phi_+^*\partial_\mu\phi_+ + |b|^2\phi_-^*\partial_\mu\phi_- + b^*\phi_-^* a\partial_\mu\phi_+ + a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-\right) \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

Ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

Tenemos entonces que $j_0^{\pm} = \mp k^0 = \mp\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ que es positiva para las soluciones de frecuencia negativa y negativa para las soluciones de frecuencia positiva.Sin embargo, si

$$\phi = a\phi_+ + b\phi_-, \tag{32}$$

entonces

$$j_\mu = \mathrm{Im}\left((a\phi_+ + b\phi_-)^* \partial_\mu (a\phi_+ + b\phi_-)\right) = \mathrm{Im}\left(\left(a^*\phi_+^* + b^*\phi_-^*\right)\partial_\mu (a\phi_+ + b\phi_-)\right) \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

$$= \mathrm{Im}\left(|a|^2\phi_+^*\partial_\mu\phi_+ + |b|^2\phi_-^*\partial_\mu\phi_- + b^*\phi_-^* a\partial_\mu\phi_+ + a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-\right) \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

$$= \mathrm{Im}\left(|a|^2\phi_+^*\partial_\mu\phi_+\right) + \mathrm{Im}\left(|b|^2\phi_-^*\partial_\mu\phi_-\right) + \mathrm{Im}\left(b^*\phi_-^* a\partial_\mu\phi_+ + a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-\right) \tag{37}$$

Ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

Tenemos entonces que $j_0^{\pm} = \mp k^0 = \mp\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ que es positiva para las soluciones de frecuencia negativa y negativa para las soluciones de frecuencia positiva.Sin embargo, si

$$\phi = a\phi_+ + b\phi_-, \tag{32}$$

entonces

$$j_\mu = \mathrm{Im}\left(\left(a\phi_+ + b\phi_-\right)^* \partial_\mu \left(a\phi_+ + b\phi_-\right)\right) = \mathrm{Im}\left(\left(a^*\phi_+^* + b^*\phi_-^*\right)\partial_\mu\left(a\phi_+ + b\phi_-\right)\right) \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

$$= \mathrm{Im}\left(|a|^2\phi_+^*\partial_\mu\phi_+ + |b|^2\phi_-^*\partial_\mu\phi_- + b^*\phi_-^* a\partial_\mu\phi_+ + a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-\right) \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

$$= \mathrm{Im}\left(|a|^2\phi_+^*\partial_\mu\phi_+\right) + \mathrm{Im}\left(|b|^2\phi_-^*\partial_\mu\phi_-\right) + \mathrm{Im}\left(b^*\phi_-^* a\partial_\mu\phi_+ + a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-\right) \tag{37}$$

pero como $\phi_+ = \phi_-^*$, tenemos que $\left(a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-\right)^* = a\phi_+ b^*\partial_\mu\phi_-^* = a\phi_-^* b^*\partial_\mu\phi_+$,

Ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

Tenemos entonces que $j_0^{\pm} = \mp k^0 = \mp\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ que es positiva para las soluciones de frecuencia negativa y negativa para las soluciones de frecuencia positiva.Sin embargo, si

$$\phi = a\phi_+ + b\phi_-, \tag{32}$$

entonces

$$j_\mu = \mathrm{Im}\left((a\phi_+ + b\phi_-)^* \partial_\mu (a\phi_+ + b\phi_-)\right) = \mathrm{Im}\left(\left(a^*\phi_+^* + b^*\phi_-^*\right) \partial_\mu (a\phi_+ + b\phi_-)\right) \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

$$= \mathrm{Im}\left(|a|^2\phi_+^*\partial_\mu\phi_+ + |b|^2\phi_-^*\partial_\mu\phi_- + b^*\phi_-^* a\partial_\mu\phi_+ + a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-\right) \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

$$= \mathrm{Im}\left(|a|^2\phi_+^*\partial_\mu\phi_+\right) + \mathrm{Im}\left(|b|^2\phi_-^*\partial_\mu\phi_-\right) + \mathrm{Im}\left(b^*\phi_-^* a\partial_\mu\phi_+ + a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-\right) \tag{37}$$

pero como $\phi_+ = \phi_-^*$, tenemos que $(a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-)^* = a\phi_+ b^*\partial_\mu\phi_-^* = a\phi_-^* b^*\partial_\mu\phi_+$,entonces

$$j_\mu = |a|^2 j_\mu^+ + |b|^2 j_\mu^- + \mathrm{Im}\left(\mathrm{Re}\left(a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-\right)\right) = |a|^2 j_\mu^+ + |b|^2 j_\mu^- \tag{38}$$

Tenemos entonces que $j_0^{\pm} = \mp k^0 = \mp\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ que es positiva para las soluciones de frecuencia negativa y negativa para las soluciones de frecuencia positiva.Sin embargo, si

$$\phi = a\phi_+ + b\phi_-, \tag{32}$$

entonces

$$j_\mu = \text{Im}\left(\left(a\phi_+ + b\phi_-\right)^* \partial_\mu \left(a\phi_+ + b\phi_-\right)\right) = \text{Im}\left(\left(a^*\phi_+^* + b^*\phi_-^*\right)\partial_\mu \left(a\phi_+ + b\phi_-\right)\right) \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

$$= \text{Im}\left(|a|^2\phi_+^*\partial_\mu\phi_+ + |b|^2\phi_-^*\partial_\mu\phi_- + b^*\phi_-^* a\partial_\mu\phi_+ + a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-\right) \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

$$= \text{Im}\left(|a|^2\phi_+^*\partial_\mu\phi_+\right) + \text{Im}\left(|b|^2\phi_-^*\partial_\mu\phi_-\right) + \text{Im}\left(b^*\phi_-^* a\partial_\mu\phi_+ + a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-\right) \tag{37}$$

pero como $\phi_+ = \phi_-^*$, tenemos que $\left(a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-\right)^* = a\phi_+ b^*\partial_\mu\phi_-^* = a\phi_-^* b^*\partial_\mu\phi_+$,entonces

$$j_\mu = |a|^2 j_\mu^+ + |b|^2 j_\mu^- + \text{Im}\left(\text{Re}\left(a^*\phi_+^* b\partial_\mu\phi_-\right)\right) = |a|^2 j_\mu^+ + |b|^2 j_\mu^- \tag{38}$$

y en particular

Ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

¿Por qué es importante esta observación de que j_0 no tiene un signo bien definido?

Ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

¿Por qué es importante esta observación de que j_0 no tiene un signo bien definido?

Schödinger tenía $\psi(\mathbf{x}, t)$ función de onda con corriente conservada

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right) \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \implies \int d^3x |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 = 1 \quad \forall t \tag{41}$$

Ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

¿Por qué es importante esta observación de que j_0 no tiene un signo bien definido?

Schödinger tenía $\psi(\mathbf{x}, t)$ función de onda con corriente conservada

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right) \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \implies \int d^3x |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 = 1 \quad \forall t \tag{41}$$

Al notar que la ecuación para $\mathbf{j}$ es idéntica a j_μ con $\mu = 1, 2, 3$ (a menos de un factor) y que tiene su ecuación de continuidad, uno se ve tentado de interpretar a ϕ como una función de onda con una densidad de probabilidad dada por j_0.

Ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo

¿Por qué es importante esta observación de que j_0 no tiene un signo bien definido?

Schödinger tenía $\psi(\mathbf{x}, t)$ función de onda con corriente conservada

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right) \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \implies \int d^3x |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 = 1 \quad \forall t \tag{41}$$

Al notar que la ecuación para $\mathbf{j}$ es idéntica a j_μ con $\mu = 1, 2, 3$ (a menos de un factor) y que tiene su ecuación de continuidad, uno se ve tentado de interpretar a ϕ como una función de onda con una densidad de probabilidad dada por j_0.

Sin embargo, lo que este ejercicio nos dice es que esto no es posible, pues si así fuera j_0 debería ser definida positiva o negativa (si fuese negativa podríamos redefinir a j_μ multiplicandola por -1 y hacerla positiva) para definir correctamente una probabilidad (que por definición es no negativa).

Ecuación de Dirac

Dos de los problemas anteriores podrían ser resueltos con una ecuación de primer orden puesto que no necesitaríamos dar $\dot{\phi}_0$ y permitiría potencialmente eliminar el cuadrado que permite energías negativas en la relación de dispersión anterior (de manera tal que $E = \sqrt{p^2 + m^2} > 0$).

Dos de los problemas anteriores podrían ser resueltos con una ecuación de primer orden puesto que no necesitaríamos dar $\dot{\phi}_0$ y permitiría potencialmente eliminar el cuadrado que permite energías negativas en la relación de dispersión anterior (de manera tal que $E = \sqrt{p^2 + m^2} > 0$).Esto motivó a Dirac a buscar un operador lineal $O = (i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_x + i\gamma^2\partial_y + i\gamma^3\partial_z)$ tal que $O^2 = \nabla^2 - \partial_t^2 \sim E^2 - p^2 = m^2$, Dos de los problemas anteriores podrían ser resueltos con una ecuación de primer orden puesto que no necesitaríamos dar $\dot{\phi}_0$ y permitiría potencialmente eliminar el cuadrado que permite energías negativas en la relación de dispersión anterior (de manera tal que $E = \sqrt{p^2 + m^2} > 0$).Esto motivó a Dirac a buscar un operador lineal $O = (i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_x + i\gamma^2\partial_y + i\gamma^3\partial_z)$ tal que $O^2 = \nabla^2 - \partial_t^2 \sim E^2 - p^2 = m^2$,de esta relación se deducen relaciones de conmutación entre $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ que determinan el

$$\text{álgebra de Dirac:} \quad \boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} 1_{4\times 4}} \tag{42}$$

Ecuación de Dirac

Dos de los problemas anteriores podrían ser resueltos con una ecuación de primer orden puesto que no necesitaríamos dar $\dot{\phi}_0$ y permitiría potencialmente eliminar el cuadrado que permite energías negativas en la relación de dispersión anterior (de manera tal que $E = \sqrt{p^2 + m^2} > 0$).Esto motivó a Dirac a buscar un operador lineal $O = (i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_x + i\gamma^2\partial_y + i\gamma^3\partial_z)$ tal que $O^2 = \nabla^2 - \partial_t^2 \sim E^2 - p^2 = m^2$,de esta relación se deducen relaciones de conmutación entre $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ que determinan el

$$\text{álgebra de Dirac:} \quad \boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} 1_{4\times 4}} \tag{42}$$

$$\text{ecuación de Dirac:} \quad \boxed{(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0}, \tag{43}$$

con $\gamma^\mu \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ y $\Psi \in \mathbb{C}^4$.

Ecuación de Dirac

La representación de Dirac de este álgebra viene dada por

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathsf{Id} & 0 \\ 0 & (-\mathsf{Id}) \end{bmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}$$

La representación de Dirac de este álgebra viene dada por

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathsf{Id} & 0 \\ 0 & (-\mathsf{Id}) \end{bmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}$$

La representación de Weyl o quiral de este álgebra viene dada por

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathsf{Id} \\ \mathsf{Id} & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}$$

La representación de Dirac de este álgebra viene dada por

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathsf{Id} & 0 \\ 0 & (-\mathsf{Id}) \end{bmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}$$

La representación de Weyl o quiral de este álgebra viene dada por

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathsf{Id} \\ \mathsf{Id} & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación de Dirac

Por la construcción anterior una solución de la ecuación de Dirac lo es también de Klein-Gordon. Veamoslo

$$0 = (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi \tag{44}$$

Por la construcción anterior una solución de la ecuación de Dirac lo es también de Klein-Gordon. Veamoslo

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \tag{44}$$

$$\implies 0 = (-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\Psi \tag{45}$$

Por la construcción anterior una solución de la ecuación de Dirac lo es también de Klein-Gordon. Veamoslo

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \tag{44}$$

$$\implies 0 = (-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\Psi \tag{45}$$

$$0 = (-i\gamma^\mu \partial_\mu i\gamma^\nu \partial_\nu + mi\gamma^\nu \partial_\nu - mi\gamma^\mu \partial_\mu + m^2)\Psi \tag{46}$$

Por la construcción anterior una solución de la ecuación de Dirac lo es también de Klein-Gordon. Veamoslo

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \tag{44}$$

$$\implies 0 = (-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\Psi \tag{45}$$

$$0 = (-i\gamma^\mu \partial_\mu i\gamma^\nu \partial_\nu + mi\gamma^\nu \partial_\nu - mi\gamma^\mu \partial_\mu + m^2)\Psi \tag{46}$$

$$0 = (\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu \partial_\nu + m^2)\Psi \tag{47}$$

Ecuación de Dirac

Por la construcción anterior una solución de la ecuación de Dirac lo es también de Klein-Gordon. Veamoslo

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \tag{44}$$

$$\implies 0 = (-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\Psi \tag{45}$$

$$0 = (-i\gamma^\mu \partial_\mu i\gamma^\nu \partial_\nu + mi\gamma^\nu \partial_\nu - mi\gamma^\mu \partial_\mu + m^2)\Psi \tag{46}$$

$$0 = (\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu \partial_\nu + m^2)\Psi \tag{47}$$

$$0 = (\frac{1}{2} 2\eta^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu + m^2)\Psi \tag{48}$$

Ecuación de Dirac

Por la construcción anterior una solución de la ecuación de Dirac lo es también de Klein-Gordon. Veamoslo

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \tag{44}$$

$$\implies 0 = (-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\Psi \tag{45}$$

$$0 = (-i\gamma^\mu \partial_\mu i\gamma^\nu \partial_\nu + mi\gamma^\nu \partial_\nu - mi\gamma^\mu \partial_\mu + m^2)\Psi \tag{46}$$

$$0 = (\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu \partial_\nu + m^2)\Psi \tag{47}$$

$$0 = (\frac{1}{2}2\eta^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu + m^2)\Psi \tag{48}$$

$$\boxed{0 = (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\Psi} \tag{49}$$

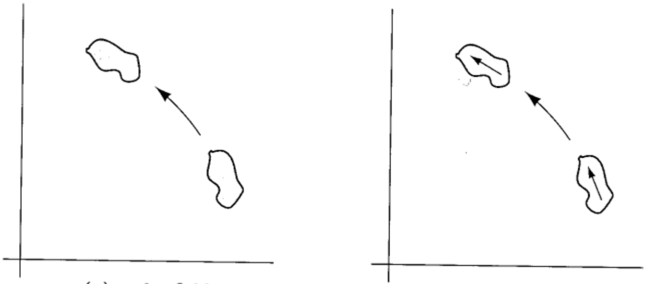
Ecuación de Dirac

Notemos que la simplicidad que ganamos al tener ahora una ecuación lineal la perdimos en que Ψ ya no es un *escalar* como lo era ϕ. Ahora Ψ es un vector, lo que significa que al hacer una transformación de Lorentz no sólo debemos transformar el punto en el que se evalúa, sino además también las componentes de su vector.

Ecuación de Dirac

Notemos que la simplicidad que ganamos al tener ahora una ecuación lineal la perdimos en que Ψ ya no es un *escalar* como lo era ϕ. Ahora Ψ es un vector, lo que significa que al hacer una transformación de Lorentz no sólo debemos transformar el punto en el que se evalúa, sino además también las componentes de su vector.

(Recuerden que el campo eléctrico ante un rotación es $\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbb{R}\mathbf{E}(\mathbb{R}^{-1}\mathbf{r})$)



(a) scalar field   **(b)** vector field

Ecuación de Dirac

El campo debe transformar como

$$\boxed{\tilde{\Psi}(x) = S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)}\,.$$

donde $S(\Lambda)$ es una representación del grupo de Lorentz sobre las matrices de 4x4.

Ecuación de Dirac

El campo debe transformar como

$$\boxed{\tilde{\Psi}(x) = S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)}.$$

donde $S(\Lambda)$ es una representación del grupo de Lorentz sobre las matrices de 4x4.

Además que la ecuación de Dirac sea invariante de Lorentz tenemos

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x) = S(\Lambda)S(\Lambda)^{-1} \left(i\gamma^\mu \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu \partial_\nu - m \right) S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x) \quad (50)$$

El campo debe transformar como

$$\boxed{\tilde{\Psi}(x) = S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)}.$$

donde $S(\Lambda)$ es una representación del grupo de Lorentz sobre las matrices de 4x4.

Además que la ecuación de Dirac sea invariante de Lorentz tenemos

$$0 = (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\, S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x) = S(\Lambda)S(\Lambda)^{-1}\left(i\gamma^{\mu}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \mu}\partial_{\nu} - m\right)S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x) \quad (50)$$

$$0 = S(\Lambda)\left(iS(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda)\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \mu}\partial_{\nu}\Psi - m\Psi\right)(\Lambda^{-1}x) \quad (51)$$

Ecuación de Dirac

El campo debe transformar como

$$\boxed{\tilde{\Psi}(x) = S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)}.$$

donde $S(\Lambda)$ es una representación del grupo de Lorentz sobre las matrices de 4x4.

Además que la ecuación de Dirac sea invariante de Lorentz tenemos

$$0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x) = S(\Lambda)S(\Lambda)^{-1} \left(i\gamma^\mu \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu_\mu \partial_\nu - m \right) S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x) \quad (50)$$

$$0 = S(\Lambda) \left(iS(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda) \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu_\mu \partial_\nu \Psi - m\Psi \right) (\Lambda^{-1}x) \quad (51)$$

Necesitamos entonces que

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda) \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu_\mu = \gamma^\nu \quad (52)$$

(de manera tal que al reemplazar obtengamos la ecuación de Dirac $S(\Lambda^{-1})\,(i\gamma^\nu \partial_\nu \Psi - m\Psi)\,(\Lambda^{-1}x) = 0$).

El campo debe transformar como

$$\boxed{\tilde{\Psi}(x) = S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)}.$$

donde $S(\Lambda)$ es una representación del grupo de Lorentz sobre las matrices de 4x4.

Además que la ecuación de Dirac sea invariante de Lorentz tenemos

$$0 = (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\, S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x) = S(\Lambda)S(\Lambda)^{-1}\left(i\gamma^{\mu}\left(\Lambda^{-1}\right)_{\mu}^{\nu}\partial_{\nu} - m\right) S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x) \quad (50)$$

$$0 = S(\Lambda)\left(iS(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda)\left(\Lambda^{-1}\right)_{\mu}^{\nu}\partial_{\nu}\Psi - m\Psi\right)(\Lambda^{-1}x) \quad (51)$$

Necesitamos entonces que

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda)\left(\Lambda^{-1}\right)_{\mu}^{\nu} = \gamma^{\nu} \quad (52)$$

(de manera tal que al reemplazar obtengamos la ecuación de Dirac $S(\Lambda^{-1})\,(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu}\Psi - m\Psi)\,(\Lambda^{-1}x) = 0$).Luego multiplicando (52) por Λ_{ν}^{μ} y sumando sobre ν obtenemos

$$\boxed{S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda) = \Lambda_{\nu}^{\mu}\gamma^{\nu}}. \quad (53)$$

Lo que nos dice este ejercicio es que si queremos que la ecuación de Dirac sea invariante ante transformaciones de Lorentz, las matrices de Dirac deben transformar de manera covariante. Esto es razonable, puesto que si queremos que la ecuación sea invariante de Lorentz el término $\gamma^\mu \partial_\mu$ debería ser invariante y dado que la derivada transforma como un vector covariante la matriz gamma debería transformar como uno contravariante.

¿Quién es $S(\Lambda)$?

¿Quién es $S(\Lambda)$?

Debe ser

$$\boxed{S \equiv e^{\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}},$$

con $\Sigma_{\mu\nu}$ una representación del álgebra de Lorentz en 4x4 y tal que se satisfaga la relación anterior.

¿Quién es $S(\Lambda)$?

Debe ser

$$\boxed{S \equiv e^{\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}},$$

con $\Sigma_{\mu\nu}$ una representación del álgebra de Lorentz en 4x4 y tal que se satisfaga la relación anterior.

Tomamos

$$\boxed{\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}.$$

Pueden comprobar que satisface el álgebra de Lorentz

¿Quién es $S(\Lambda)$?

Debe ser

$$\boxed{S \equiv e^{\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}},$$

con $\Sigma_{\mu\nu}$ una representación del álgebra de Lorentz en 4x4 y tal que se satisfaga la relación anterior.

Tomamos

$$\boxed{\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}.$$

Pueden comprobar que satisface el álgebra de Lorentz y veamos que se satisface la condición previa a primer orden en el parámetro $\omega^{\mu\nu}$ de la transformación de Lorentz Λ.

Sea

$$S(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) \approx 1 + \frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \tag{54}$$

la matriz de transformación de los espinores de Dirac a causa de una tranformación de Lorentz Λ del sistema de coordenadas (donde $\approx$ significa a primer orden en $\omega^{\mu\nu}$).

Sea

$$S(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) \approx 1 + \frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \tag{54}$$

la matriz de transformación de los espinores de Dirac a causa de una tranformación de Lorentz Λ del sistema de coordenadas (donde $\approx$ significa a primer orden en $\omega^{\mu\nu}$).Entonces tenemos que su transformación inversa viene dada por

$$S(\Lambda)^{-1} = \exp\left(-\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) \approx 1 - \frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}. \tag{55}$$

Sea

$$S(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) \approx 1 + \frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \tag{54}$$

la matriz de transformación de los espinores de Dirac a causa de una tranformación de Lorentz Λ del sistema de coordenadas (donde $\approx$ significa a primer orden en $\omega^{\mu\nu}$).Entonces tenemos que su transformación inversa viene dada por

$$S(\Lambda)^{-1} = \exp\left(-\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) \approx 1 - \frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}. \tag{55}$$

Además podemos expresar a Λ en términos de los generadores del grupo de Lorentz como

$$\Lambda = \exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\sigma\rho}M_{\sigma\rho}\right) \approx 1 + \frac{i}{2}\omega^{\sigma\rho}M_{\sigma\rho} \tag{56}$$

Reemplazando en la relación obtenida antes

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} = S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda) \tag{57}$$

Reemplazando en la relación obtenida antes

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} = S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda) \tag{57}$$

$$\left(1+\frac{i}{2}\omega^{\sigma\rho}M_{\sigma\rho}\right)^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} = \left(1-\frac{i}{2}\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}\right)\gamma^{\mu}\left(1+\frac{i}{2}\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}\right) \approx \gamma^{\mu}+\frac{i}{2}\left(\gamma^{\mu}\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}-\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}\gamma^{\mu}\right) \tag{58}$$

Reemplazando en la relación obtenida antes

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} = S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda) \tag{57}$$

$$\left(1+\frac{i}{2}\omega^{\sigma\rho}M_{\sigma\rho}\right)^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} = \left(1-\frac{i}{2}\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}\right)\gamma^{\mu}\left(1+\frac{i}{2}\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}\right) \approx \gamma^{\mu}+\frac{i}{2}\left(\gamma^{\mu}\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}-\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}\gamma^{\mu}\right) \tag{58}$$

$$\boxed{(M_{\sigma\rho})^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} = \left(\gamma^{\mu}\Sigma_{\sigma\rho}-\Sigma_{\sigma\rho}\gamma^{\mu}\right) = \left[\gamma^{\mu},\Sigma_{\sigma\rho}\right]}\,. \tag{59}$$

Reemplazando en la relación obtenida antes

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} = S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda) \tag{57}$$

$$\left(1+\frac{i}{2}\omega^{\sigma\rho}M_{\sigma\rho}\right)^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} = \left(1-\frac{i}{2}\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}\right)\gamma^{\mu}\left(1+\frac{i}{2}\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}\right) \approx \gamma^{\mu}+\frac{i}{2}\left(\gamma^{\mu}\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}-\Sigma_{\sigma\rho}\omega^{\sigma\rho}\gamma^{\mu}\right) \tag{58}$$

$$\boxed{(M_{\sigma\rho})^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} = (\gamma^{\mu}\Sigma_{\sigma\rho}-\Sigma_{\sigma\rho}\gamma^{\mu}) = [\gamma^{\mu},\Sigma_{\sigma\rho}]}\,. \tag{59}$$

Queda como ejercicio reemplazar las matrices $M_{\sigma\rho}$ y γ^{μ} que ya conocemos y la matriz $\Sigma_{\sigma\rho}$ que nos dan en la expresión anterior y ver que efectivamente el lado izquierdo coincide con el derecho.

La representación del grupo de Lorentz (incluyendo paridad) de dimensión más baja es una suma directa de representaciones de espín $\frac{1}{2}$: $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$. Esta es la representación *espinorial*.

Ecuación de Dirac

La representación del grupo de Lorentz (incluyendo paridad) de dimensión más baja es una suma directa de representaciones de espín $\frac{1}{2}$: $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Esta es la representación *espinorial*.

A fin de ver esto, consideremos la *representación quiral* de las matrices de Dirac y mostremos que una transformación de Lorentz preserva espinores de la forma $\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix}$.

Como vimos antes los generadores de las transformaciones de espinores vienen dados por

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right). \tag{60}$$

Como vimos antes los generadores de las transformaciones de espinores vienen dados por

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right). \tag{60}$$

Notemos que

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AD & 0 \\ 0 & BC \end{bmatrix}$$

Como vimos antes los generadores de las transformaciones de espinores vienen dados por

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right). \tag{60}$$

Notemos que

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AD & 0 \\ 0 & BC \end{bmatrix}$$

y, como las matrices γ^{μ} en esta representación tienen justo esa forma tenemos que $\Sigma_{\mu\nu}$ resulta diagonal por bloques.

Además dado que

$$\exp\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(A) & 0 \\ 0 & \exp(B) \end{bmatrix},$$

Además dado que

$$\exp\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(A) & 0 \\ 0 & \exp(B) \end{bmatrix},$$

es claro que la transformación S será de la forma

$$S = \exp\left(\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Además dado que

$$\exp\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(A) & 0 \\ 0 & \exp(B) \end{bmatrix},$$

es claro que la transformación S será de la forma

$$S = \exp\left(\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Así, dado un espinor $\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix}$ en el subespacio

$$T^+ = \left\langle \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\rangle$$

Además dado que

$$\exp\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(A) & 0 \\ 0 & \exp(B) \end{bmatrix},$$

es claro que la transformación S será de la forma

$$S = \exp\left(\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Así, dado un espinor $\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix}$ en el subespacio

$$T^+ = \left\langle \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\rangle$$

tendremos que $S\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\xi \\ 0 \end{bmatrix} \in T^+$.

Calcule los generadores A *y* B *del Ejercicio 9 en esta representación y verifique que los dos tipos de espinores del inciso anterior corresponden a la representación* $(\frac{1}{2}, 0)$ *y* $(0, \frac{1}{2})$.

Calcule los generadores A y B del Ejercicio 9 en esta representación y verifique que los dos tipos de espinores del inciso anterior corresponden a la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$.

Necesitamos calcular

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_{jk} \tag{61}$$

$$K_i = \Sigma_{i0} \tag{62}$$

Calcule los generadores A y B del Ejercicio 9 en esta representación y verifique que los dos tipos de espinores del inciso anterior corresponden a la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$.

Necesitamos calcular

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_{jk} \tag{61}$$

$$K_i = \Sigma_{i0} \tag{62}$$

(usamos letras latinas para los enteros del 1 al 3) para luego obtener

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\vec{J} - i\vec{K}\right) \tag{63}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\left(\vec{J} + i\vec{K}\right). \tag{64}$$

Calcule los generadores A y B del Ejercicio 9 en esta representación y verifique que los dos tipos de espinores del inciso anterior corresponden a la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$.

Necesitamos calcular

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_{jk} \tag{61}$$

$$K_i = \Sigma_{i0} \tag{62}$$

(usamos letras latinas para los enteros del 1 al 3) para luego obtener

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\vec{J} - i\vec{K}\right) \tag{63}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\left(\vec{J} + i\vec{K}\right). \tag{64}$$

Recordemos que los generadores de rotaciones en esta representación del álgebra de Lorentz son

$$\Sigma_{jk} = \frac{i}{4}\left[\gamma^j, \gamma^k\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^j\gamma^k - \gamma^k\gamma^j\right) \tag{65}$$

Recordemos que los generadores de rotaciones en esta representación del álgebra de Lorentz son

$$\Sigma_{jk} = \frac{i}{4}\left[\gamma^j, \gamma^k\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^j\gamma^k - \gamma^k\gamma^j\right) \tag{65}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{66}$$

Recordemos que los generadores de rotaciones en esta representación del álgebra de Lorentz son

$$\Sigma_{jk} = \frac{i}{4}\left[\gamma^j, \gamma^k\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^j\gamma^k - \gamma^k\gamma^j\right) \tag{65}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{66}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} -\sigma^j\sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^j\sigma^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sigma^k\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^k\sigma^j \end{bmatrix}\right) \tag{67}$$

Recordemos que los generadores de rotaciones en esta representación del álgebra de Lorentz son

$$\Sigma_{jk} = \frac{i}{4}\left[\gamma^j, \gamma^k\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^j\gamma^k - \gamma^k\gamma^j\right) \tag{65}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{66}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} -\sigma^j\sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^j\sigma^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sigma^k\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^k\sigma^j \end{bmatrix}\right) \tag{67}$$

$$= \frac{i}{4}\begin{bmatrix} \sigma^k\sigma^j - \sigma^j\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k\sigma^j - \sigma^j\sigma^k \end{bmatrix} = \frac{i}{4}2i\epsilon_{kji}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} \tag{68}$$

Recordemos que los generadores de rotaciones en esta representación del álgebra de Lorentz son

$$\Sigma_{jk} = \frac{i}{4}\left[\gamma^j, \gamma^k\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^j\gamma^k - \gamma^k\gamma^j\right) \tag{65}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{66}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} -\sigma^j\sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^j\sigma^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sigma^k\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^k\sigma^j \end{bmatrix}\right) \tag{67}$$

$$= \frac{i}{4}\begin{bmatrix} \sigma^k\sigma^j - \sigma^j\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k\sigma^j - \sigma^j\sigma^k \end{bmatrix} = \frac{i}{4}2i\epsilon_{kji}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} \tag{68}$$

$$= -\frac{1}{2}\epsilon_{kji}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} \tag{69}$$

Mientras que los generadores de boosts están dados por

$$\Sigma_{i0} = \frac{i}{4}\left[\gamma^i, \gamma^0\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^i\gamma^0 - \gamma^i\gamma^0\right) \tag{70}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{71}$$

Mientras que los generadores de boosts están dados por

$$\Sigma_{i0} = \frac{i}{4}\left[\gamma^i, \gamma^0\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^i \gamma^0 - \gamma^i \gamma^0\right) \tag{70}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{71}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix}\right) \tag{72}$$

Mientras que los generadores de boosts están dados por

$$\Sigma_{i0} = \frac{i}{4}\left[\gamma^i, \gamma^0\right] = \frac{i}{4}\left(\gamma^i\gamma^0 - \gamma^i\gamma^0\right) \tag{70}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{71}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix}\right) \tag{72}$$

$$= \frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix} \tag{73}$$

Reemplazando esto en (61) tenemos

$$\boxed{J_i} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_{jk} = \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon_{qjk}\begin{bmatrix} \sigma^q & 0 \\ 0 & \sigma^q \end{bmatrix} \tag{74}$$

Reemplazando esto en (61) tenemos

$$\boxed{J_i} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_{jk} = \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon_{qjk}\begin{bmatrix} \sigma^q & 0 \\ 0 & \sigma^q \end{bmatrix} \tag{74}$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}2\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix}} \tag{75}$$

Reemplazando esto en (61) tenemos

$$\boxed{J_i} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_{jk} = \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon_{qjk}\begin{bmatrix} \sigma^q & 0 \\ 0 & \sigma^q \end{bmatrix} \tag{74}$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}2\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix}} \tag{75}$$

$$\boxed{K_i = \Sigma_{i0} = \frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}} \tag{76}$$

donde usamos que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{qjk} = 2\delta_{iq}$

y en virtud de (63) obtenemos

$$\boxed{A_i} = \frac{1}{2}\left(J_i - iK_i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} - i\frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}\right) \tag{77}$$

y en virtud de (63) obtenemos

$$\boxed{A_i} = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} - i\frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}\right) \tag{77}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}\right) \boxed{= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \tag{78}$$

y en virtud de (63) obtenemos

$$\boxed{A_i} = \frac{1}{2}\left(J_i - iK_i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} - i\frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}\right) \tag{77}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}\right) \boxed{= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \tag{78}$$

$$\boxed{B_i} = \frac{1}{2}\left(J_i + iK_i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} + i\frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}\right) \tag{79}$$

y en virtud de (63) obtenemos

$$\boxed{A_i} = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} - i\frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}\right) \tag{77}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}\right) \boxed{= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \tag{78}$$

$$\boxed{B_i} = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} + i\frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}\right) \tag{79}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}\right) \boxed{= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix}} \tag{80}$$

Ecuación de Klein-Gordon

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

Ecuación de Klein-Gordon

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de segundo orden.

Ecuación de Klein-Gordon

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de segundo orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré y transformaciones C, P y T.

Ecuación de Klein-Gordon

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de segundo orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré y transformaciones C, P y T.
- ϕ es un escalar (representación del grupo de Lorentz del tipo $(0,0)$).

Ecuación de Klein-Gordon

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de segundo orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré y transformaciones C, P y T.
- ϕ es un escalar (representación del grupo de Lorentz del tipo $(0,0)$).
- No define una función de onda.

Ecuación de Klein-Gordon

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de segundo orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré y transformaciones C, P y T.
- ϕ es un escalar (representación del grupo de Lorentz del tipo $(0,0)$).
- No define una función de onda.

Ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de primer orden.

Ecuación de Klein-Gordon

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de segundo orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré y transformaciones C, P y T.
- ϕ es un escalar (representación del grupo de Lorentz del tipo $(0,0)$).
- No define una función de onda.

Ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de primer orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré.

Ecuación de Klein-Gordon

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de segundo orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré y transformaciones C, P y T.
- ϕ es un escalar (representación del grupo de Lorentz del tipo $(0,0)$).
- No define una función de onda.

Ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de primer orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré.
- Ψ es un vector complejo de 4 componentes y cada componente satisface Klein-Gordon.

Ecuación de Klein-Gordon

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de segundo orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré y transformaciones C, P y T.
- ϕ es un escalar (representación del grupo de Lorentz del tipo $(0,0)$).
- No define una función de onda.

Ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de primer orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré.
- Ψ es un vector complejo de 4 componentes y cada componente satisface Klein-Gordon.
- $\Psi = \Psi_L + \Psi_R$ es un espinor de Dirac (corresponde a $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$).

Ecuación de Klein-Gordon

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de segundo orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré y transformaciones C, P y T.
- ϕ es un escalar (representación del grupo de Lorentz del tipo $(0,0)$).
- No define una función de onda.

Ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0$$

- Es una ecuación diferencial de primer orden.
- Posee invariancia ante el grupo de Poincaré.
- Ψ es un vector complejo de 4 componentes y cada componente satisface Klein-Gordon.
- $\Psi = \Psi_L + \Psi_R$ es un espinor de Dirac (corresponde a $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$).
- Las componentes Ψ_L y Ψ_R no cambian ante transformaciones de Lorentz.