Campos - Práctica

Simetrías globales. Función de dos puntos. Propagador.

Simetrías globales

En clases pasadas vimos que la ecuación de Dirac es invariante ante transformaciones del grupo de Poincaré, lo cual a través del teorema de Noether da lugar a corrientes conservadas a partir de las cuales se pueden hallar constantes de movimiento.

Simetrías globales

En clases pasadas vimos que la ecuación de Dirac es invariante ante transformaciones del grupo de Poincaré, lo cual a través del teorema de Noether da lugar a corrientes conservadas a partir de las cuales se pueden hallar constantes de movimiento.En la teoría clásica vimos que la corriente conservada ante traslaciones era el tensor de energía-impulso

$$\theta^{\mu\nu}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\psi,$$

cuyas cargas conservadas eran la energía y el momento lineal

$$H = \int \theta^{00}_{\text{Dirac}} d^3\mathbf{x} = \int i\overline{\psi}\gamma^0\partial^0\psi d^3\mathbf{x}$$

$$P^i = \int \theta^{0i}_{\text{Dirac}} d^3\mathbf{x} = \int i\overline{\psi}\gamma^0\partial^i\psi d^3\mathbf{x}.$$

En clases pasadas vimos que la ecuación de Dirac es invariante ante transformaciones del grupo de Poincaré, lo cual a través del teorema de Noether da lugar a corrientes conservadas a partir de las cuales se pueden hallar constantes de movimiento.En la teoría clásica vimos que la corriente conservada ante traslaciones era el tensor de energía-impulso

$$\theta^{\mu\nu}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\psi,$$

cuyas cargas conservadas eran la energía y el momento lineal

$$H = \int \theta^{00}_{\text{Dirac}} d^3\mathbf{x} = \int i\overline{\psi}\gamma^0\partial^0\psi d^3\mathbf{x}$$

$$P^i = \int \theta^{0i}_{\text{Dirac}} d^3\mathbf{x} = \int i\overline{\psi}\gamma^0\partial^i\psi d^3\mathbf{x}.$$

Al cuantizar estas magnitudes se convertían en operadores

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{p}\, \omega_{\mathbf{p}} \sum_{s=1,2} \left(\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{b}^{s}_{\mathbf{p}} + \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{d}^{s}_{\mathbf{p}}\right)$$

$$\hat{P}^i = \int d^3\mathbf{p} \sum_{s=1,2} p^i \left(\hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{b}^{s}_{\mathbf{p}} + \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\hat{d}^{s}_{\mathbf{p}}\right).$$

(Práctica 4, Ejercicio 48) *Escriba la expresión clásica de la carga conservada asociada a la simetría de rotación e identifique la parte que genera la rotación intrínseca del espinor. Halle su versión cuántica y verifique que un estado de la forma* $\hat{b}_0^{s\dagger}|0\rangle$ *o* $\hat{d}_0^{s\dagger}|0\rangle$ *transforma como un objeto de espín* $\frac{1}{2}$ *ante rotaciones.*

(Práctica 4, Ejercicio 48) *Escriba la expresión clásica de la carga conservada asociada a la simetría de rotación e identifique la parte que genera la rotación intrínseca del espinor. Halle su versión cuántica y verifique que un estado de la forma* $\hat{b}_0^{s\dagger}|0\rangle$ *o* $\hat{d}_0^{s\dagger}|0\rangle$ *transforma como un objeto de espín* $\frac{1}{2}$ *ante rotaciones.*

Recordemos que al estudiar la versión clásica de la ecuación de Dirac obtuvimos la carga conservada ante transformaciones del grupo de Lorentz

$$Q^0_{\alpha\beta} = \int \left[x_\alpha \theta^0_\beta - x_\beta \theta^0_\alpha + \bar{\psi}\gamma^0 \Sigma_{\alpha\beta}\psi\right] d^3\mathbf{x}$$

siendo $\theta^{\mu\nu}_{\text{Dirac}}$ el tensor de energía-impulso.

(Práctica 4, Ejercicio 48) *Escriba la expresión clásica de la carga conservada asociada a la simetría de rotación e identifique la parte que genera la rotación intrínseca del espinor. Halle su versión cuántica y verifique que un estado de la forma* $\hat{b}_0^{s\dagger}|0\rangle$ *o* $\hat{d}_0^{s\dagger}|0\rangle$ *transforma como un objeto de espín* $\frac{1}{2}$ *ante rotaciones.*

Recordemos que al estudiar la versión clásica de la ecuación de Dirac obtuvimos la carga conservada ante transformaciones del grupo de Lorentz

$$Q^0_{\alpha\beta} = \int \left[x_\alpha \theta^0_\beta - x_\beta \theta^0_\alpha + \bar{\psi}\gamma^0 \Sigma_{\alpha\beta}\psi\right] d^3\mathbf{x}$$

siendo $\theta^{\mu\nu}_{\text{Dirac}}$ el tensor de energía-impulso.

En particular, la carga conservada ante rotaciones correspondía a tomar $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ y estaba asociada al momento angular del campo. Para ver esto, si definimos

$$(\mathbf{J})_k := \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} Q^0_{ij} = \epsilon_{ijk} \int (x_i \theta^0_j + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^0\Sigma_{ij}\psi) d^3\mathbf{x} = \epsilon_{ijk} \int (x_i i\bar{\psi}\gamma^0\partial_j\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^0\Sigma_{ij}\psi) d^3\mathbf{x} \quad (1)$$

$$(\vec{\Sigma})_k := \epsilon_{ijk}\Sigma_{ij} \quad (2)$$

Simetrías globales

Tenemos que el momento angular viene dado por

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}} \tag{3}$$

Simetrías globales

Tenemos que el momento angular viene dado por

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}} \tag{3}$$

donde

$$\hat{\mathbf{L}} := \int \hat{\psi}^\dagger \left[\mathbf{x} \times i\nabla\right] \hat{\psi} d^3\mathbf{x} \tag{4}$$

$$\hat{\mathbf{S}} := \int \hat{\psi}^\dagger \frac{\vec{\Sigma}}{2} \hat{\psi} d^3\mathbf{x}. \tag{5}$$

Tenemos que el momento angular viene dado por

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}} \tag{3}$$

donde

$$\hat{\mathbf{L}} := \int \hat{\psi}^\dagger \left[\mathbf{x} \times i\nabla\right] \hat{\psi} d^3\mathbf{x} \tag{4}$$

$$\hat{\mathbf{S}} := \int \hat{\psi}^\dagger \frac{\vec{\Sigma}}{2} \hat{\psi} d^3\mathbf{x}. \tag{5}$$

Para entender mejor qué representan físicamente estos términos en la teoría cuántica comencemos expandiendo a los campos en ondas planas

$$\hat{\mathbf{L}} = \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{p}'} \sum_{r,s=1,2} \int -\mathbf{x} \times \mathbf{p} \big(b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} u^{r\dagger}(p') e^{ip'x} b^s_{\mathbf{p}} u^s(p) e^{-ipx} + d^r_{\mathbf{p}'} v^{r\dagger}(p') e^{-ip'x} b^s_{\mathbf{p}} u^s(p) e^{-ipx} \\ - b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} u^{r\dagger}(p') e^{ip'x} d^{s\dagger}_{\mathbf{p}} v^s(p) e^{ipx} - d^r_{\mathbf{p}'} v^{r\dagger}(p') e^{-ip'x} d^{s\dagger}_{\mathbf{p}} v^s(p) e^{ipx} \big) d^3\mathbf{x} \tag{6}$$

Simetrías globales

Tenemos que el momento angular viene dado por

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}} \tag{3}$$

donde

$$\hat{\mathbf{L}} := \int \hat{\psi}^\dagger \left[\mathbf{x} \times i\nabla\right] \hat{\psi} d^3\mathbf{x} \tag{4}$$

$$\hat{\mathbf{S}} := \int \hat{\psi}^\dagger \frac{\vec{\Sigma}}{2} \hat{\psi} d^3\mathbf{x}. \tag{5}$$

Para entender mejor qué representan físicamente estos términos en la teoría cuántica comencemos expandiendo a los campos en ondas planas

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{L}} = \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{p}'} \sum_{r,s=1,2} \int -\mathbf{x} \times \mathbf{p}\big(&b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} u^{r\dagger}(p') e^{ip'x} b^s_{\mathbf{p}} u^s(p) e^{-ipx} + d^r_{\mathbf{p}'} v^{r\dagger}(p') e^{-ip'x} b^s_{\mathbf{p}} u^s(p) e^{-ipx} \\ &- b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} u^{r\dagger}(p') e^{ip'x} d^{s\dagger}_{\mathbf{p}} v^s(p) e^{ipx} - d^r_{\mathbf{p}'} v^{r\dagger}(p') e^{-ip'x} d^{s\dagger}_{\mathbf{p}} v^s(p) e^{ipx}\big) d^3\mathbf{x}\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}= \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{p}'} \sum_{r,s=1,2} \int -\mathbf{x} \times \mathbf{p}\big(&b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} b^s_{\mathbf{p}} u^s(p) u^{r\dagger}(p') e^{-i(p-p')x} + d^r_{\mathbf{p}'} b^s_{\mathbf{p}} u^s(p) v^{r\dagger}(p') e^{-i(p+p')x} \\ &- b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} d^{s\dagger}_{\mathbf{p}} u^{r\dagger}(p') v^s(p) e^{i(p+p')x} - d^r_{\mathbf{p}'} d^{s\dagger}_{\mathbf{p}} v^{r\dagger}(p') v^s(p) e^{i(p-p')x}\big) d^3\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{7}$$

Simetrías globales

Si ahora tomamos el valor medio sobre un estado de una partícula $d_{\mathbf{p}}^{s\dagger}|0\rangle$ sólo sobreviven los términos con $d_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\langle :\mathbf{L}:\rangle &= \langle \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}\int \mathbf{x}\times\mathbf{p}\left(: d_{\mathbf{p}}^{s} d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} : v^{s\dagger}(p) v^{s}(p)\right) d^3\mathbf{x}\rangle = \int\int \mathbf{x}\times\mathbf{p}\,(-2\omega_{\mathbf{p}})\,\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} d^3\mathbf{x} \\ &= -\int \mathbf{x}\times\mathbf{p}\frac{1}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{x},\end{aligned} \tag{8}$$

que podemos reconocer como el momento angular orbital de un partícula cuya amplitud de probabilidad se distribuye uniformemente sobre todo el espacio.

Si ahora tomamos el valor medio sobre un estado de una partícula $d_{\mathbf{p}}^{s\dagger}|0\rangle$ sólo sobreviven los términos con $d_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle : \mathbf{L} : \rangle &= \langle \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \int \mathbf{x} \times \mathbf{p} \left(: d_{\mathbf{p}}^{s} d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} : v^{s\dagger}(p) v^{s}(p) \right) d^3\mathbf{x} \rangle = \int \int \mathbf{x} \times \mathbf{p} \left(-2\omega_{\mathbf{p}} \right) \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} d^3\mathbf{x} \\
&= - \int \mathbf{x} \times \mathbf{p} \frac{1}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{x},
\end{aligned} \tag{8}$$

que podemos reconocer como el momento angular orbital de un partícula cuya amplitud de probabilidad se distribuye uniformemente sobre todo el espacio.

Veamos ahora qué rol cumple el otro término

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \int \psi^\dagger \frac{\vec{\Sigma}}{2} \psi d^3\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{p}'} \sum_{r,s=1,2} \int \Big(b_{\mathbf{p}'}^{r\dagger} b_{\mathbf{p}}^{s} u^{r\dagger}(p') \frac{\vec{\Sigma}}{2} u^{s}(p) e^{-i(p-p')x} + d_{\mathbf{p}'}^{r} b_{\mathbf{p}}^{s} v^{r\dagger}(p') \frac{\vec{\Sigma}}{2} u^{s}(p) e^{-i(p+p')x} \\
&\quad + b_{\mathbf{p}'}^{r\dagger} d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} u^{r\dagger}(p') \frac{\vec{\Sigma}}{2} v^{s}(p) e^{i(p+p')x} + d_{\mathbf{p}'}^{r} d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^{r\dagger}(p') \frac{\vec{\Sigma}}{2} v^{s}(p) e^{i(p-p')x} \Big) d^3\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{9}$$

Ahora podemos integrar sobre $\mathbf{x}$ para formar deltas de Dirac y luego eliminarlas con la integral sobre $\mathbf{p}'$

$$\begin{aligned}\mathbf{S} =& \int_{\mathbf{p}}\int_{\mathbf{p}'}\sum_{r,s=1,2}\big(b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}b^{s}_{\mathbf{p}}u^{r\dagger}(p')\frac{\vec{\Sigma}}{2}u^{s}(p)\,(2\pi)^{3}\,3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')+d^{r}_{\mathbf{p}'}b^{s}_{\mathbf{p}}v^{r\dagger}(p')\frac{\vec{\Sigma}}{2}u^{s}(p)\,(2\pi)^{3}\,\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}') \\ &+b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}u^{r\dagger}(p')\frac{\vec{\Sigma}}{2}v^{s}(p)\,(2\pi)^{3}\,\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}')+d^{r}_{\mathbf{p}'}d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^{r\dagger}(p')\frac{\vec{\Sigma}}{2}v^{s}(p)\,(2\pi)^{3}\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\big) \\ =& \int\frac{d^{3}\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}}\sum_{r,s=1,2}\big(b^{r\dagger}_{\mathbf{p}}b^{s}_{\mathbf{p}}u^{r\dagger}(\mathbf{p})\frac{\vec{\Sigma}}{2}u^{s}(\mathbf{p})+d^{r}_{-\mathbf{p}}b^{s}_{\mathbf{p}}v^{r\dagger}(-\mathbf{p})\frac{\vec{\Sigma}}{2}u^{s}(\mathbf{p}) \\ &+b^{r\dagger}_{-\mathbf{p}}d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}u^{r\dagger}(-\mathbf{p})\frac{\vec{\Sigma}}{2}v^{s}(\mathbf{p})+d^{r}_{\mathbf{p}}d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^{r\dagger}(\mathbf{p})\frac{\vec{\Sigma}}{2}v^{s}(\mathbf{p})\big).\end{aligned} \tag{10}$$

Veamos cómo actúa dicho operador sobre el estado $b_0^{q\dagger}|0\rangle$, es decir, el estado de una partícula de tipo b con momento nulo (en ese caso, actuar con $\mathbf{S}$ es lo mismo que actuar con $\mathbf{J}$ ya que la parte de $\mathbf{L}$ no contribuye porque $\mathbf{p} = \mathbf{0}$).

Veamos cómo actúa dicho operador sobre el estado $b_0^{q\dagger}|0\rangle$, es decir, el estado de una partícula de tipo b con momento nulo (en ese caso, actuar con $\mathbf{S}$ es lo mismo que actuar con $\mathbf{J}$ ya que la parte de $\mathbf{L}$ no contribuye porque $\mathbf{p} = \mathbf{0}$).En lugar de hacer la cuenta directa, que involucraría tratar con la forma explícita de las soluciones u y v, vamos a notar que

$$\mathbf{S} b_0^{q\dagger}|0\rangle = \left[\mathbf{S}, b_0^{q\dagger}\right]|0\rangle + b_0^{q\dagger}\mathbf{S}|0\rangle = \left[\mathbf{S}, b_0^{q\dagger}\right]|0\rangle\,, \tag{11}$$

ya que $\mathbf{S}|0\rangle = \mathbf{J}|0\rangle = 0$.

Veamos cómo actúa dicho operador sobre el estado $b_0^{q\dagger}|0\rangle$, es decir, el estado de una partícula de tipo b con momento nulo (en ese caso, actuar con $\mathbf{S}$ es lo mismo que actuar con $\mathbf{J}$ ya que la parte de $\mathbf{L}$ no contribuye porque $\mathbf{p} = \mathbf{0}$).En lugar de hacer la cuenta directa, que involucraría tratar con la forma explícita de las soluciones u y v, vamos a notar que

$$\mathbf{S}b_0^{q\dagger}|0\rangle = \left[\mathbf{S}, b_0^{q\dagger}\right]|0\rangle + b_0^{q\dagger}\mathbf{S}|0\rangle = \left[\mathbf{S}, b_0^{q\dagger}\right]|0\rangle\,, \tag{11}$$

ya que $\mathbf{S}|0\rangle = \mathbf{J}|0\rangle = 0$.Esto es así porque $\mathbf{J}$ es un generador del álgebra de Lorentz y como la teoría tiene invariancia de Lorentz, el vacío es invariante

$$e^{i\alpha J^i}|0\rangle = |0\rangle \implies |0\rangle + i\alpha J^i|0\rangle + ... = |0\rangle\,, \tag{12}$$

de donde sale que todos los términos con potencias distintas de α (que es un parámetro arbitrario) deben anularse.

Veamos cómo actúa dicho operador sobre el estado $b_0^{q\dagger}|0\rangle$, es decir, el estado de una partícula de tipo b con momento nulo (en ese caso, actuar con $\mathbf{S}$ es lo mismo que actuar con $\mathbf{J}$ ya que la parte de $\mathbf{L}$ no contribuye porque $\mathbf{p} = \mathbf{0}$).En lugar de hacer la cuenta directa, que involucraría tratar con la forma explícita de las soluciones u y v, vamos a notar que

$$\mathbf{S}b_0^{q\dagger}|0\rangle = \left[\mathbf{S}, b_0^{q\dagger}\right]|0\rangle + b_0^{q\dagger}\mathbf{S}|0\rangle = \left[\mathbf{S}, b_0^{q\dagger}\right]|0\rangle\,, \tag{11}$$

ya que $\mathbf{S}|0\rangle = \mathbf{J}|0\rangle = 0$.Esto es así porque $\mathbf{J}$ es un generador del álgebra de Lorentz y como la teoría tiene invariancia de Lorentz, el vacío es invariante

$$e^{i\alpha J^i}|0\rangle = |0\rangle \implies |0\rangle + i\alpha J^i|0\rangle + ... = |0\rangle\,, \tag{12}$$

de donde sale que todos los términos con potencias distintas de α (que es un parámetro arbitrario) deben anularse.En particular

$$J^i|0\rangle = 0\,. \tag{13}$$

Simetrías globales

Para seguir con la cuenta (11) es necesario calcular $\left[\mathbf{S}, b_0^{q\dagger}\right]$, para lo que va a ser necesario escribir el conmutador en términos de anticonmutadores.

Simetrías globales

Para seguir con la cuenta (11) es necesario calcular $\left[\mathbf{S}, b_0^{q\dagger}\right]$, para lo que va a ser necesario escribir el conmutador en términos de anticonmutadores.De los cuatro términos que salen de hacer esta cuenta sólo dos son nulos, los dados por

$$\left[\hat{b}_{\mathbf{p}}^{r\dagger}\hat{b}_{\mathbf{p}}^{s}, b_{\mathbf{0}}^{q\dagger}\right] = \delta_{sq}\delta^3(\mathbf{p})\hat{b}_{\mathbf{p}}^{r\dagger}\,, \tag{14}$$

$$\left[\hat{d}_{-\mathbf{p}}^{r}\hat{b}_{\mathbf{p}}^{s}, b_{\mathbf{0}}^{q\dagger}\right] = \delta_{sq}\delta^3(\mathbf{p})\hat{d}_{-\mathbf{p}}^{r}\,. \tag{15}$$

Para seguir con la cuenta (11) es necesario calcular $\left[\mathbf{S}, b_0^{q\dagger}\right]$, para lo que va a ser necesario escribir el conmutador en términos de anticonmutadores.De los cuatro términos que salen de hacer esta cuenta sólo dos son nulos, los dados por

$$\left[\hat{b}_{\mathbf{p}}^{r\dagger}\hat{b}_{\mathbf{p}}^{s}, b_{\mathbf{0}}^{q\dagger}\right] = \delta_{sq}\delta^3(\mathbf{p})\hat{b}_{\mathbf{p}}^{r\dagger}\,, \tag{14}$$

$$\left[\hat{d}_{-\mathbf{p}}^{r}\hat{b}_{\mathbf{p}}^{s}, b_{\mathbf{0}}^{q\dagger}\right] = \delta_{sq}\delta^3(\mathbf{p})\hat{d}_{-\mathbf{p}}^{r}\,. \tag{15}$$

Pero al actuar sobre el vacío sólo sobrevive el primero de ellos, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}b_0^{q\dagger}|0\rangle &= \left[\mathbf{S}, b_0^{q\dagger}\right]|0\rangle & (16)\\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \sum_{r,s=1,2} u^{r\dagger}(\mathbf{p})\frac{\vec{\Sigma}}{2}u^s(\mathbf{p})\delta_{sq}\delta^3(\mathbf{p})\hat{b}_{\mathbf{p}}^{r\dagger}|0\rangle = & (17)\\
&= \frac{1}{2m}\sum_{r=1,2} u^{r\dagger}(\mathbf{0})\frac{\vec{\Sigma}}{2}u^s(\mathbf{0})\hat{b}_{\mathbf{0}}^{r\dagger}|0\rangle = & (18)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{r=1,2} (\vec{\sigma})_{rq}\,\hat{b}_{\mathbf{0}}^{r\dagger}|0\rangle\,, & (19)
\end{aligned}$$

donde para llegar a la última línea usamos la expresión explícita de u y v, que se simplifica considerablemente al tener $\mathbf{p} = 0$, dando

$$u^{r\dagger}(\mathbf{0}) \frac{\vec{\Sigma}}{2} u^{s}(\mathbf{0}) = \sum_{r=1,2} m \left(\vec{\sigma}\right)_{rq} \ . \tag{20}$$

donde para llegar a la última línea usamos la expresión explícita de u y v, que se simplifica considerablemente al tener $\mathbf{p} = 0$, dando

$$u^{r\dagger}(\mathbf{0})\frac{\vec{\Sigma}}{2}u^{s}(\mathbf{0}) = \sum_{r=1,2} m\,(\vec{\sigma})_{rq}\ . \tag{20}$$

Para convencerse de esta última igualdad, les recomendamos que lo hagan una vez para alguna de las componentes (por ejemplo, para Σ_x).

donde para llegar a la última línea usamos la expresión explícita de u y v, que se simplifica considerablemente al tener $\mathbf{p} = 0$, dando

$$u^{r\dagger}(\mathbf{0})\frac{\vec{\Sigma}}{2}u^{s}(\mathbf{0}) = \sum_{r=1,2} m\,(\vec{\sigma})_{rq}\ . \tag{20}$$

Para convencerse de esta última igualdad, les recomendamos que lo hagan una vez para alguna de las componentes (por ejemplo, para Σ_x).Tenemos finalmente

$$\mathbf{S}b_0^{q\dagger}|0\rangle = \sum_{r=1,2} \frac{\vec{\sigma}_{rq}}{2}\hat{b}_{\mathbf{0}}^{r\dagger}|0\rangle\ . \tag{21}$$

Simetrías globales

Luego tomando $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b_0^{1\dagger}|0\rangle, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b_0^{2\dagger}|0\rangle$ tenemos que ante una rotación de ángulo θ en el plano ortogonal a $\hat{n}$, una combinación lineal χ de estos estados cambia según

$$\chi' = e^{-i\frac{\omega_{ij}}{2}Q^0_{ij}}\chi = e^{-i\frac{\omega_{ij}}{2}\epsilon_{ijk}J_k}\chi = e^{-i\tilde{\theta}\cdot\mathbf{J}}\chi = e^{-i\theta\hat{n}\frac{\vec{\sigma}}{2}}\chi \tag{22}$$

Simetrías globales

Luego tomando $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b_0^{1\dagger}|0\rangle, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b_0^{2\dagger}|0\rangle$ tenemos que ante una rotación de ángulo θ en el plano ortogonal a $\hat{n}$, una combinación lineal χ de estos estados cambia según

$$\chi' = e^{-i\frac{\omega_{ij}}{2}Q^0_{ij}}\chi = e^{-i\frac{\omega_{ij}}{2}\epsilon_{ijk}J_k}\chi = e^{-i\tilde{\theta}\cdot\mathbf{J}}\chi = e^{-i\theta\hat{n}\frac{\vec{\sigma}}{2}}\chi \tag{22}$$

donde usamos las siguientes definiciones

$$Q^0_{ij} = \epsilon_{ijk}J_k \tag{23}$$

$$(\vec{\theta})_k := \frac{\omega_{ij}}{2}\epsilon_{ijk} \tag{24}$$

$$\theta := |\vec{\theta}| \tag{25}$$

$$\hat{n} := \frac{\vec{\theta}}{\theta} \tag{26}$$

y que $\mathbf{L}b_0^{2\dagger}|0\rangle = 0$. La ecuación (22) muestra entonces que aún partículas sin momento poseen un momento angular intrínseco, el cual ante rotaciones genera que transformen como espinores.

Resulta natural entonces asociar $\mathbf{S}$ al espín de las partículas. Noten que mientras en la mecánica cuántica tradicional el espín debemos introducirlo a la fuerza considerando un operador de momento angular intrínseco de dimensión finita, aquí el espín surje naturalmente de la invariancia relativista del campo de Dirac. Así como el cálculo de la carga conservada por la simetría ante $U(1)$ nos permitió dar una intepretación de $\hat{b}^s_{\mathbf{p}}$ como operador de aniquilación de partículas y $\hat{d}^s_{\mathbf{p}}$ de anti-partículas, aplicando S_z encontramos

$$\begin{aligned} S_z\left(\hat{b}^{1\dagger}_{\mathbf{0}}|0\rangle\right) &= +\frac{1}{2}\hat{b}^{1\dagger}_{\mathbf{0}}|0\rangle, \quad S_z\left(\hat{b}^{2\dagger}_{\mathbf{0}}|0\rangle\right) = -\frac{1}{2}\hat{b}^{2\dagger}_{\mathbf{0}}|0\rangle \\ S_z\left(\hat{d}^{1\dagger}_{\mathbf{0}}|0\rangle\right) &= -\frac{1}{2}\hat{d}^{1\dagger}_{\mathbf{0}}|0\rangle, \quad S_z\left(\hat{d}^{2\dagger}_{\mathbf{0}}|0\rangle\right) = +\frac{1}{2}\hat{d}^{2\dagger}_{\mathbf{0}}|0\rangle \end{aligned} \tag{27}$$

de manera tal que podemos identificar al índice s en $\hat{b}^s_{\mathbf{0}}$ o $\hat{d}^s_{\mathbf{0}}$ con las proyecciones de espín en z.

(Práctica 4, Ejercicio 49) *Una transformación de Poincaré dada por* (Λ, a) *tiene asociado un operador unitario que actúa en el campo de Dirac de la siguiente forma:*

$$U^\dagger(\Lambda, a)\psi_i(x)U(\Lambda, a) = S_{ij}(\Lambda^{-1})\psi_j(\Lambda x + a)$$

siendo S *la matriz que aparece en la transformación de un espinor de Dirac. Muestre a partir de esto que las funciones de dos puntos resultan invariantes ante traslaciones espacio-temporales pero no necesariamente ante transformaciones de Lorentz.*

(Práctica 4, Ejercicio 49) *Una transformación de Poincaré dada por* (Λ, a) *tiene asociado un operador unitario que actúa en el campo de Dirac de la siguiente forma:*

$$U^\dagger(\Lambda, a)\psi_i(x)U(\Lambda, a) = S_{ij}(\Lambda^{-1})\psi_j(\Lambda x + a)$$

siendo S *la matriz que aparece en la transformación de un espinor de Dirac. Muestre a partir de esto que las funciones de dos puntos resultan invariantes ante traslaciones espacio-temporales pero no necesariamente ante transformaciones de Lorentz.*

La función de dos puntos es por definición

$$\langle 0|\psi_i(x)\psi_j(y)|0\rangle \tag{28}$$

Funciones de dos puntos y propagadores

(Práctica 4, Ejercicio 49) *Una transformación de Poincaré dada por* (Λ, a) *tiene asociado un operador unitario que actúa en el campo de Dirac de la siguiente forma:*

$$U^\dagger(\Lambda, a)\psi_i(x)U(\Lambda, a) = S_{ij}(\Lambda^{-1})\psi_j(\Lambda x + a)$$

siendo S *la matriz que aparece en la transformación de un espinor de Dirac. Muestre a partir de esto que las funciones de dos puntos resultan invariantes ante traslaciones espacio-temporales pero no necesariamente ante transformaciones de Lorentz.*

La función de dos puntos es por definición

$$\langle 0|\psi_i(x)\psi_j(y)|0\rangle \tag{28}$$

al realizar una traslación (Id, a) tenemos que

$$S(\mathsf{Id}^{-1})\psi_i(\mathsf{Id}\ x + a) = \psi_i(x + a) = U^\dagger(\mathsf{Id}, a)\psi_i(x)U(\mathsf{Id}, a)$$

Funciones de dos puntos y propagadores

(Práctica 4, Ejercicio 49) *Una transformación de Poincaré dada por* (Λ, a) *tiene asociado un operador unitario que actúa en el campo de Dirac de la siguiente forma:*

$$U^\dagger(\Lambda, a)\psi_i(x)U(\Lambda, a) = S_{ij}(\Lambda^{-1})\psi_j(\Lambda x + a)$$

siendo S *la matriz que aparece en la transformación de un espinor de Dirac. Muestre a partir de esto que las funciones de dos puntos resultan invariantes ante traslaciones espacio-temporales pero no necesariamente ante transformaciones de Lorentz.*

La función de dos puntos es por definición

$$\langle 0|\psi_i(x)\psi_j(y)|0\rangle \tag{28}$$

al realizar una traslación (Id, a) tenemos que

$$S(\mathsf{Id}^{-1})\psi_i(\mathsf{Id}\ x + a) = \psi_i(x + a) = U^\dagger(\mathsf{Id}, a)\psi_i(x)U(\mathsf{Id}, a)$$

y por lo tanto la función de dos puntos pasa a ser

$$\langle 0|\psi_i(x + a)\psi_j(y + a)|0\rangle = \langle 0|U^\dagger(\mathsf{Id}, a)\psi_i(x)U(\mathsf{Id}, a)U^\dagger(\mathsf{Id}, a)\psi_j(y)U(\mathsf{Id}, a)|0\rangle \tag{29}$$

Funciones de dos puntos y propagadores

(Práctica 4, Ejercicio 49) *Una transformación de Poincaré dada por* (Λ, a) *tiene asociado un operador unitario que actúa en el campo de Dirac de la siguiente forma:*

$$U^\dagger(\Lambda, a)\psi_i(x)U(\Lambda, a) = S_{ij}(\Lambda^{-1})\psi_j(\Lambda x + a)$$

siendo S *la matriz que aparece en la transformación de un espinor de Dirac. Muestre a partir de esto que las funciones de dos puntos resultan invariantes ante traslaciones espacio-temporales pero no necesariamente ante transformaciones de Lorentz.*

La función de dos puntos es por definición

$$\langle 0|\psi_i(x)\psi_j(y)|0\rangle \tag{28}$$

al realizar una traslación (Id, a) tenemos que

$$S(\mathsf{Id}^{-1})\psi_i(\mathsf{Id}\ x + a) = \psi_i(x + a) = U^\dagger(\mathsf{Id}, a)\psi_i(x)U(\mathsf{Id}, a)$$

y por lo tanto la función de dos puntos pasa a ser

$$\langle 0|\psi_i(x + a)\psi_j(y + a)|0\rangle = \langle 0|U^\dagger(\mathsf{Id}, a)\psi_i(x)U(\mathsf{Id}, a)U^\dagger(\mathsf{Id}, a)\psi_j(y)U(\mathsf{Id}, a)|0\rangle \tag{29}$$

y usando que el vacío es invariante ante transformaciones de Lorentz tenemos

$$\langle 0|\psi_i(x + a)\psi_k(y + a)|0\rangle = \langle 0|\psi_i(x)\psi_k(y)|0\rangle. \tag{30}$$

Funciones de dos puntos y propagadores

Si la función de dos puntos fuese invariante ante transformaciones de Lorentz tendríamos

$$\langle 0|\psi_i(\Lambda x + a)\psi_q(\Lambda y + a)|0\rangle = \langle 0|\psi_i(x)\psi_q(y)|0\rangle, \tag{31}$$

Si la función de dos puntos fuese invariante ante transformaciones de Lorentz tendríamos

$$\langle 0|\psi_i(\Lambda x + a)\psi_q(\Lambda y + a)|0\rangle = \langle 0|\psi_i(x)\psi_q(y)|0\rangle, \tag{31}$$

pero

$$\langle 0|S_{ij}(\Lambda)U^\dagger(\Lambda, a)\psi_j(x)U(\Lambda, a)S_{ij}(\Lambda)U^\dagger(\Lambda, a)\psi_q(y)U(\Lambda, a)|0\rangle = \langle 0|\psi_i(x)\psi_q(y)|0\rangle, \tag{32}$$

Si la función de dos puntos fuese invariante ante transformaciones de Lorentz tendríamos

$$\langle 0|\psi_i(\Lambda x + a)\psi_q(\Lambda y + a)|0\rangle = \langle 0|\psi_i(x)\psi_q(y)|0\rangle, \tag{31}$$

pero

$$\langle 0|S_{ij}(\Lambda)U^\dagger(\Lambda, a)\psi_j(x)U(\Lambda, a)S_{ij}(\Lambda)U^\dagger(\Lambda, a)\psi_q(y)U(\Lambda, a)|0\rangle = \langle 0|\psi_i(x)\psi_q(y)|0\rangle, \tag{32}$$

$$\langle 0|S_{ij}(\Lambda)\psi_j(x)S_{qk}(\Lambda)\psi_k(y)|0\rangle = \langle 0|\psi_i(x)\psi_q(y)|0\rangle, \tag{33}$$

lo cual sólo vale si $S_{ij}(\Lambda) = \delta_{ij}$, es decir, $\Lambda = \text{Id}$ y la transformación es una traslación espacio-temporal.

Si la función de dos puntos fuese invariante ante transformaciones de Lorentz tendríamos

$$\langle 0|\psi_i(\Lambda x + a)\psi_q(\Lambda y + a)|0\rangle = \langle 0|\psi_i(x)\psi_q(y)|0\rangle, \tag{31}$$

pero

$$\langle 0|S_{ij}(\Lambda)U^\dagger(\Lambda, a)\psi_j(x)U(\Lambda, a)S_{ij}(\Lambda)U^\dagger(\Lambda, a)\psi_q(y)U(\Lambda, a)|0\rangle = \langle 0|\psi_i(x)\psi_q(y)|0\rangle, \tag{32}$$

$$\langle 0|S_{ij}(\Lambda)\psi_j(x)S_{qk}(\Lambda)\psi_k(y)|0\rangle = \langle 0|\psi_i(x)\psi_q(y)|0\rangle, \tag{33}$$

lo cual sólo vale si $S_{ij}(\Lambda) = \delta_{ij}$, es decir, $\Lambda =$ Id y la transformación es una traslación espacio-temporal.Si bien esta función de dos puntos no es invariante ante transformaciones de Lorentz, recordando lo que hicimos con los bilineales de Dirac podemos sospechar que una de la forma $\langle 0 \mid \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) \mid 0\rangle$ sí lo sea.

Funciones de dos puntos y propagadores

Considere la función de 2-puntos ordenada temporalmente
$S_{\alpha\beta}(x-y) \equiv -iT\langle 0 \mid \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) \mid 0\rangle$

1. *Muestre que* $S_{\alpha\beta}(x-y) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\Delta_F(x-y)$, *siendo* $\Delta_F(x-y)$ *el propagador de Feynman del campo de Klein Gordon.*
2. *Halle la expresión integral en el espacio de momentos del propagador.*

Funciones de dos puntos y propagadores

Considere la función de 2-puntos ordenada temporalmente
$S_{\alpha\beta}(x-y) \equiv -iT\langle 0 \mid \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) \mid 0\rangle$

1. *Muestre que* $S_{\alpha\beta}(x-y) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\Delta_F(x-y)$*, siendo* $\Delta_F(x-y)$ *el propagador de Feynman del campo de Klein Gordon.*
2. *Halle la expresión integral en el espacio de momentos del propagador.*

Comencemos asumiendo que $x_0 > y_0$ y calculemos

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle =& \langle \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} \sum_{s=1,2} \left(b^s_\mathbf{p} u^s(p) e^{-ipx} + d^{s\dagger}_\mathbf{p} v^s(p) e^{ipx}\right) \times \\ & \times \int \frac{d^3\mathbf{p'}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{p'}}} \sum_{r=1,2} \left(b^{r\dagger}_\mathbf{p'} \bar{u}^r(p') e^{ip'y} + d^r_\mathbf{p'} \bar{v}^r(p') e^{-ip'y}\right)\rangle \end{aligned} \quad (34)$$

Funciones de dos puntos y propagadores

Considere la función de 2-puntos ordenada temporalmente
$S_{\alpha\beta}(x-y) \equiv -iT\langle 0 \mid \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) \mid 0\rangle$

1. *Muestre que* $S_{\alpha\beta}(x-y) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\Delta_F(x-y)$*, siendo* $\Delta_F(x-y)$ *el propagador de Feynman del campo de Klein Gordon.*
2. *Halle la expresión integral en el espacio de momentos del propagador.*

Comencemos asumiendo que $x_0 > y_0$ y calculemos

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle =& \langle\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\sum_{s=1,2}\left(b^s_{\mathbf{p}}u^s(p)e^{-ipx} + d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^s(p)e^{ipx}\right)\times \\ &\times\int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}}\sum_{r=1,2}\left(b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}\bar{u}^r(p')e^{ip'y} + d^r_{\mathbf{p}'}\bar{v}^r(p')e^{-ip'y}\right)\rangle \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}= \langle\int\int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\sum_{r,s=1,2}&\left(b^s_{\mathbf{p}}b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}u^s(p)\bar{u}^r(p')e^{-i(px-p'y)} + d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}v^s(p)\bar{u}^r(p')e^{i(px+p'y)}\right. \\ &\left. + b^s_{\mathbf{p}}d^r_{\mathbf{p}'}u^s(p)\bar{v}^r(p')e^{-i(px+p'y)} + d^{s\dagger}_{\mathbf{p}}d^r_{\mathbf{p}'}v^s(p)\bar{v}^r(p')e^{i(px-p'y)}\right)\rangle.\end{aligned} \tag{35}$$

Funciones de dos puntos y propagadores

Luego usando que

$$\langle b^s_{\mathbf{p}} b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'} \rangle = \delta_{rs}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \tag{36}$$

Luego usando que

$$\langle b_{\mathbf{p}}^{s} b_{\mathbf{p}'}^{r\dagger} \rangle = \delta_{rs} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \tag{36}$$

$$\langle b_{\mathbf{p}}^{s} b_{\mathbf{p}'}^{r} \rangle = \langle b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}'}^{r\dagger} \rangle = \langle d_{\mathbf{p}}^{s} d_{\mathbf{p}'}^{r} \rangle = \langle d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} d_{\mathbf{p}'}^{r\dagger} \rangle = \langle d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} d_{\mathbf{p}'}^{r} \rangle = 0. \tag{37}$$

Luego usando que

$$\langle b^s_{\mathbf{p}} b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}\rangle = \delta_{rs}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{36}$$

$$\langle b^s_{\mathbf{p}} b^{r}_{\mathbf{p}'}\rangle = \langle b^{s\dagger}_{\mathbf{p}} b^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}\rangle = \langle d^s_{\mathbf{p}} d^{r}_{\mathbf{p}'}\rangle = \langle d^{s\dagger}_{\mathbf{p}} d^{r\dagger}_{\mathbf{p}'}\rangle = \langle d^{s\dagger}_{\mathbf{p}} d^{r}_{\mathbf{p}'}\rangle = 0. \tag{37}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \sum_{s=1,2} \left(u^s(p)\bar{u}^s(p) e^{-ip(x-y)} \right) \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} \left(\gamma^\mu p_\mu + m\right) e^{-ip(x-y)} \\
&= \left(i\gamma^\mu \partial_\mu + m\right) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Análogamente tenemos que

$$\langle 0|\overline{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle = -\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m\right)\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}e^{-ip(y-x)}, \tag{39}$$

Análogamente tenemos que

$$\langle 0|\overline{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle = -\left(i\gamma^\mu\partial_\mu + m\right)\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}e^{-ip(y-x)}, \tag{39}$$

de donde concluimos

$$\begin{aligned}\langle 0|T\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle :&= \theta(x_0-y_0)\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle - \theta(y_0-x_0)\langle 0|\overline{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle \\ &= \left(i\gamma^\mu\partial_\mu + m\right)\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}[e^{-ip(x-y)}\theta(x_0-y_0) + e^{-ip(y-x)}\theta(y_0-x_0)] \\ &= \left(i\gamma^\mu\partial_\mu + m\right)\Delta_F(x-y). \end{aligned} \tag{40}$$

También será útil más adelante reescribirla como

$$
\begin{aligned}
S(x-y) &= (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \lim_{\epsilon \to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int \frac{i\left(\gamma^\mu p_\mu + m\right)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

También será útil más adelante reescribirla como

$$
\begin{aligned}
S(x-y) &= (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \lim_{\epsilon\to 0} \int e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int \frac{i\left(\gamma^\mu p_\mu + m\right)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}
\end{aligned} \tag{41}
$$

Finalmente, podemos utilizar este resultado para notar que el propagador de Feynman $S_F(x-y)$ es una función de Green de la ecuación de Dirac

$$
(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, S(x-y) = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\, \Delta_F(x-y) \tag{42}
$$

$$
= -\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) \Delta_F(x-y) = i\delta(x-y). \tag{43}
$$

Cuantización del campo escalar complejo

- Los estados de la forma $\hat{b}_0^{s\dagger} |0\rangle$ (o $\hat{d}_0^{s\dagger} |0\rangle$) transforman como un objeto de espín $\frac{1}{2}$ ante rotaciones. Los interpretamos como estados de una partícula (o antipartícula) con momento nulo y proyección de espín definida.

Cuantización del campo escalar complejo

- Los estados de la forma $\hat{b}_0^{s\dagger}|0\rangle$ (o $\hat{d}_0^{s\dagger}|0\rangle$) transforman como un objeto de espín $\frac{1}{2}$ ante rotaciones. Los interpretamos como estados de una partícula (o antipartícula) con momento nulo y proyección de espín definida.

- Las funciones de dos puntos $\langle 0|\psi_i(x)\psi_j(y)|0\rangle$ son invariantes ante traslaciones pero no ante transformaciones de Lorentz.

Cuantización del campo escalar complejo

- Los estados de la forma $\hat{b}_0^{s\dagger}\left|0\right\rangle$ (o $\hat{d}_0^{s\dagger}\left|0\right\rangle$) transforman como un objeto de espín $\frac{1}{2}$ ante rotaciones. Los interpretamos como estados de una partícula (o antipartícula) con momento nulo y proyección de espín definida.

- Las funciones de dos puntos $\langle 0|\psi_i(x)\psi_j(y)|0\rangle$ son invariantes ante traslaciones pero no ante transformaciones de Lorentz.

- El propagador del campo de Dirac puede expresarse como

$$S(x-y) = \lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{i\left(\gamma^\mu p_\mu + m\right)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

.

Cuantización del campo escalar complejo

- Los estados de la forma $\hat{b}_0^{s\dagger}\left|0\right\rangle$ (o $\hat{d}_0^{s\dagger}\left|0\right\rangle$) transforman como un objeto de espín $\frac{1}{2}$ ante rotaciones. Los interpretamos como estados de una partícula (o antipartícula) con momento nulo y proyección de espín definida.

- Las funciones de dos puntos $\langle 0|\psi_i(x)\psi_j(y)|0\rangle$ son invariantes ante traslaciones pero no ante transformaciones de Lorentz.

- El propagador del campo de Dirac puede expresarse como

$$S(x-y) = \lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{i\left(\gamma^\mu p_\mu + m\right)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

.