Los campos de Dirac, Proca y Maxwell corresponden a representaciones no triviales del grupo de Lorentz, en el sentido que el grupo de Lorentz actúa no sólo modificando el argumento de los campos sino también mezclando las componentes del mismo. En la versión cuántica, los estados de partículas asociadas transforman en forma no trivial ante rotaciones. En el caso masivo, este grado de libertad se manifiesta en lo que llamamos espín. En esta guía, consideraremos el caso de un campo de Dirac.

---

44 Considere

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} \sum_{s=1,2} \left[\hat{b}^s_\mathbf{p} u^s(p)\, e^{-ipx} + \hat{d}^{s\dagger}_\mathbf{p} v^s(p)\, e^{ipx}\right] .$$

Verificar que $\hat{\psi}(x)$ es una solución de la ecuación de Dirac. Demostrar además que si $\{\hat{b}^r_\mathbf{p}, \hat{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}'}\} = \{\hat{d}^r_\mathbf{p}, \hat{d}^{s\dagger}_{\mathbf{p}'}\} = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\mathbf{rs}}$ (y todos los otros nulos) entonces

$$\left\{\hat{\psi}_a(0,\mathbf{x}), \hat{\psi}^\dagger_b(0,\mathbf{y})\right\} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\delta_{ab}\,.$$

✓ **Resuelto en la sección 4.3.2 de las notas de la práctica.**

45 Exprese las cargas conservadas asociadas a invariancia ante traslaciones espacio temporales en términos de operadores de creación y destrucción.

✓ **Hamiltoniano derivado en la sección 4.3.4 de las notas de la práctica.**

46 **Conexión espín-estadística.** Halle $\hat{H}$ pero ahora usando reglas de conmutación entre los b y d (como las del campo escalar complejo) y muestre que el operador no es definido positivo (este fue uno de los primeros indicios que encontró Pauli del teorema Espín-Estadística).

✓ **Resuelto en la sección 4.3.4 de las notas de la práctica.**

47 Halle la cantidad conservada asociada a la simetría $U(1)$ global: $\psi \to e^{i\alpha}\psi$. Muestre que los autovalores de esta carga son opuestos para los estados de 1-partícula creados por $\hat{b}^\dagger$ y $\hat{d}^\dagger$.

✓ **Resuelto en la sección 4.3.5 de las notas de la práctica.**

48 Escriba la expresión clásica de la carga conservada asociada a la simetría de rotación e identifique la parte que genera la rotación intrínseca del espinor. Halle su versión cuántica y verifique que un estado de la forma $\hat{b}^{s\dagger}_\mathbf{p}|0\rangle$ o $\hat{d}^{s\dagger}_\mathbf{p}|0\rangle$ transforma como un objeto de espín $\frac{1}{2}$ ante rotaciones.

✓ **Resuelto en la sección 4.3.6 de las notas de la práctica.**

49 Una transformación de Poincaré dada por (Λ, a) tiene asociado un operador unitario que actúa en el campo de Dirac de la siguiente forma:

$$U^\dagger(\Lambda,a)\psi_i(x)U(\Lambda,a) = S_{ij}(\Lambda^{-1})\psi_j(\Lambda x + a)$$

siendo S la matriz que aparece en la transformación de un espinor de Dirac. Muestre a partir de esto que las funciones de dos puntos resultan invariantes ante traslaciones espacio-temporales pero no necesariamente ante transformaciones de Lorentz.

✓ **Resuelto en la sección 4.3.7 de las notas de la práctica.**

50 Mostrar que:

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\Delta(x-y)$$

siendo $\Delta(x-y)$ el conmutador analogo en el caso del campo de Klein-Gordon. Muestre que este se anula para puntos x, y espacialmente separados.

✓ **Resuelto en la página 138 del libro de Greiner.**

$\boxed{51}$ Considere la función de 2-puntos ordenada temporalmente $S_{\alpha\beta}(x-y) \equiv \langle 0 \mid T\left(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\right) \mid 0\rangle$

(a) Muestre que $S_{\alpha\beta}(x-y) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\Delta_F(x-y)$, siendo $\Delta_F(x-y)$ el propagador de Feynman del campo de Klein Gordon.

(b) Halle la expresión integral en el espacio de momentos del propagador.

✓ **Resuelto en la sección 4.3.7 de las notas de la práctica.**

$\boxed{52}$ * Cuantizar un campo el campo de Weyl (espinor de masa cero y quiralidad definida).

$\boxed{53}$ * **Violación de la Condición de Energía Débil.** En la teoría de campos clásica vimos que tanto la energía total como la densidad de energía son positivas. En teoría cuántica de campos la energía total es positiva pero la sustracción de la energía de vacío (orden normal) hace que $\hat{T}^{00}$ no sea un operador positivo. En este ejercicio les proponemos que encuentren algún estado para el cual el valor de expectación de la densidad de energía, que será una función del espacio-tiempo, sea negativo para algunas regiones del espacio-tiempo (probando así que $\hat{T}^{00}$ no es positivo).

Que $\hat{T}^{00}$ no sea positivo viola lo que se conoce como Weak Energy Condition (WEC), que dice que todo observador ve una densidad de energía positiva. La WEC forma parte de un conjunto de desigualdades que uno impone sobre la materia (sobre $T^{\mu\nu}$) y sirven para probar teoremas en relatividad general (como los teoremas de singularidades) o para que las geometrías que aparecen como soluciones de las ecuaciones de Einstein sean físicamente razonables. En las teorías cuánticas todas esas condiciones de energía se violan, ¿pero en qué grado? Esa información se codifica en lo que se conocen como *desigualdades cuánticas de energía*. Si les interesa leer más sobre este tema pueden mirar por ejemplo el review “Lectures on quantum energy inequalities”, de C. J. Fewster (https://arxiv.org/abs/1208.5399).