Los campos de Proca y Maxwell corresponden a representaciones de espín y helicidad (respectivamente) 1. Ambos tienen en común la dificultad de que los 4 campos que aparecen en el Lagrangiano (componentes de un campo cuadrivectorial) no son todos independientes (por razones diferentes) lo que dificulta implementar el procedimiento de cuantización canonica. En esta guía pondremos el foco en cómo aislar los grados de libertad de cada campo y ver la relación entre estos grados de libertad y el espín/helicidad de la especie de partícula que describen.

---

54 Considere el Lagrangiano de Proca $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}Z_\mu Z^\mu$, para un campo Z_μ que es un cuadrivector (real), siendo F la expresión usual: $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$

(a) Muestre que las ecuaciones de movimiento que se desprenden de este Lagrangiano equivalen a estas dos ecuaciones:

$$(i)\ \Box Z^\mu + m^2 Z^\mu = 0 \quad (ii)\ \partial_\nu Z^\nu = 0$$

Observe que el signo del término de masa en el Lagrangiano es opuesto al del Lagrangiano de Klein-Gordon y pese a ello contribuye de la misma forma en la ecuación i).

(b) Verifique que $\epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})e^{-ikx}$ (y su complejo conjugado) (para $\lambda = 1, 2, 3$) es solución de las ecuaciones, satisfaciendo k la condición $k^2 = m^2$ y siendo los 3 cuadrivectores $\epsilon^{(\lambda)}$ los cuadivectores transversales al k dado en el apéndice.

(c) Verifique que el momento canónico conjugado a Z^0 es idénticamente cero y que Z^0, usando la ecuación (ii), puede escribirse en función de los momentos canónicos asociados a Z^i (observación: esto es relevante para la cuantización canónica, dado que pone de manifiesto que las únicas variables dinámicas son los tres campos A_i y sus momento canónicos conjugados).

✓ **Resuelto en la sección 4.4.1 de las notas de la práctica.**

55 La expresión del campo de Proca cuantizado es:

$$\hat{Z}_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \sum_{\lambda=1}^{3} \left[\hat{a}^\lambda_\mathbf{k}\epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})e^{-ikx} + \hat{a}^{\lambda\dagger}_\mathbf{k}\epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})^* e^{ikx}\right]$$

donde $\left[\hat{a}^{(\lambda)}_\mathbf{k}, \hat{a}^{(\lambda')\dagger}_{\mathbf{k}'}\right] = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{\lambda\lambda'}$ y todas las demás cero. Hallar la expresión de la función de dos puntos $\langle 0| Z^\mu(x)Z^\nu(y) |0\rangle$ en términos de la de un campo escalar real.

✓ **Resuelto en la sección 4.4.2 de las notas de la práctica.**

56 Considere ahora el Lagrangiano de Maxwell, que se obtiene usando el Lagrangiano de Proca con $m = 0$. Ahora la condición ii) no sigue de las ecuaciones de movimiento. En su lugar, aparece ahora invariancia de gauge, que permite imponer, entre otras cosas, $\partial_\mu A^\mu = 0$, subsistiendo aún cierta libertad. El procedimiento de Gupta-Bleuler para cuantizar el sistema consiste en considerar primero el espacio de soluciones de un campo que cumpla:

$$(I) \quad \Box A_\mu = 0\,,$$

y luego imponer la condición

$$(II) \quad \partial_\mu A^\mu = 0\,.$$

(a) Muestre que el campo

$$\hat{A}_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left[\hat{a}^{(\lambda)}_\mathbf{k}\epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})e^{-ikx} + \hat{a}^{(\lambda)\dagger}_\mathbf{k}\epsilon^{(\lambda)}_\mu(\mathbf{k})^* e^{ikx}\right]$$

satisface las ecuaciones de movimiento (I), pero no las ecuaciones (II), con los cuadrivectores ϵ del apéndice asociados a un vector k nulo.

(b) Considerando la expresión anterior como un campo clásico (con las $a^{\lambda}(k)$ funciones complejas de k), ¿qué relación debería haber entre $a^{(0)}$ y $a^{(3)}$ para que sea solución de (II)?

✓ **Resuelto en la sección 4.5 de las notas de la práctica.**

57 La cuantización del campo de Maxwell posee el problema de que los operadores a y $a^{\dagger}$ no actúan en un Hilbert ya que aparecen estados con norma negativa (y por lo tanto el 'producto interno' del cual deriva dicha norma no es definido positivo, por lo que estrictamente no es un producto interno). Muestre que de las relaciones de conmutación (que siguen de las reglas de conmutación canonicas):

$$\left[\hat{a}^{(\lambda)}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^{(\lambda')\dagger}_{\mathbf{k}'}\right] = -\eta^{\lambda\lambda'}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

se desprende que existen estados de norma negativa (asumiendo que los $a^{(0)}$ aniquilan el vacío).
✓ **Resuelto en la sección 4.5.1 de las notas de la práctica.**

58 El problema que mencionamos en el ejercicio anterior se resuelve parcialmente imponiendo la condición II) sobre ciertos estados (condición de estado físico), lo cual deja aún estados con norma 0. Estos últimos representan estados que son "puro gauge" (y por lo tanto, uno hace un cociente y los identifica como equivalentes al cero). La versión precisa de esta condición (Gupta-Bleuler) es:

$$\partial_\mu \hat{A}^{\mu}_{+} |\Psi\rangle = 0$$

siendo $\hat{A}^{\mu}_{+}$ la parte de aniquilación (frecuencia positiva) de $\hat{A}^{\mu}$.

(a) Verifique la condición de Gupta-Bleuler se cumple para para estados $|\Psi\rangle$ que provengan de actuar sobre el vacío con la combinación $\hat{a}^{(3)\dagger} - \hat{a}^{(0)\dagger}$, los cuales contienen pares de modos longitudinal ($\lambda = 3$) y temporal (o escalar) ($\lambda = 0$).

(b) Muestre que el valor de espectación de $\hat{A}$ en $|\Psi\rangle$ y $|\Psi'\rangle \equiv (1 + \int c(k)(\hat{a}^{(3)\dagger}_k - \hat{a}^{(1)\dagger}_k))d^3k\,|\Psi\rangle$ (con $c(k)$ una función de los momentos) difieren en el gradiente de una función.

Observación: este último ítem ilustra que $\int c(k)(\hat{a}^{(3)\dagger}_k - \hat{a}^{(1)\dagger}_k)d^3k\,|\Psi\rangle$ corresponde a una estado *puro gauge*, que en efecto es un estado de norma cero. El espacio de Hilbert (con producto interno definido positivo) se obtiene cuando se declaran equivalentes a estados que difieren en un estado nulo.

✓ **Resuelto en la sección 4.5.2 de las notas de la práctica.**

59 Hallar la función de dos puntos y el propagador del campo de Maxwell en el gauge de Lorentz (notar que la cuenta es muy similar a la del campo escalar complejo).
✓ **Resuelto en la sección 4.5.3 de las notas de la práctica.**

60 Considerar el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\lambda\,(\partial\cdot A)^2\ .$$

Escribir la ecuación de movimiento e invertirla para encontrar la expresión de la función de Green (si se elige la prescripción $i\epsilon$ para sortear los polos se obtiene el propagador de Feynman).
✓ **Discutido en el video de la práctica subido el 03/06/2020.**

61 El operador helicidad (proyección del momento angular intrínseco en la dirección de movimiento) $\hat{h}$, en el caso del campo de Proca, puede verse que es:

$$\hat{h} = i \int d^3k (\hat{a}_k^{(2)\dagger} \hat{a}_k^{(1)} - \hat{a}_k^{(1)\dagger} \hat{a}_k^{(2)})$$

(a) Muestre que los estados $(\hat{a}_k^{(3)})^\dagger |0\rangle$ y $(\hat{a}_k^{(2)})^\dagger \pm i(\hat{a}_k^{(1)})^\dagger |0\rangle$ son autoestados de $\hat{h}$. Halle los autovalores y verifique que encajan con el hecho de que el campo describe una partícula de espín 1.

(b) Argumente por qué en el caso del caso de Maxwell, donde se obtiene la misma expresión para los estados transversales, la helicidad se reduce a 1 y -1.

62 Comprobar la validez de la microcausalidad para los campos eléctrico y magnético.
✓ **Resuelto en la sección 4.5.3 de las notas de la práctica.**

Apéndice: Base de cuadrivectores de polarización

63 Dado un cuadrivector de tipo tiempo, k^μ ($k^2 = m^2$, con k^0 positivo), es posible hallar una terna de cuadrivectores $\epsilon^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, 2, 3$), ortogonales entre sí, de tipo espacio y ortogonales a k^μ. Se puede completar una base ortonormal eligiendo $\frac{k^\mu}{m}$ como el cuarto cuadrivector. Muestre que se verifica la relación de completitud:

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} k_\mu k_\nu$$

64 A fin de tratar el caso del campo de Maxwell, considere ahora un cuadrivector k nulo. La base ortonormal sólo puede contener a lo sumo 2 cuadrivectores $\epsilon^{(1)}$ y $\epsilon^{(2)}$ ortogonales a k (que son de tipo espacial). La base se puede completar con dos vectores adicionales $\epsilon^{(3)}$ espacial y $\epsilon^{(0)}$ temporal, tal que $(\epsilon^{(3)} + \epsilon^{(0)})$ sea proporcional a k. Considere la elección en que $\epsilon^{(0)} = n$ (n vector tipo tiempo unitario), $\epsilon^{(3)} = \frac{k-(k.n)n}{k.n}$ y los $\epsilon^{(1)}$ y $\epsilon^{(2)}$ ortogonales a estos y de tipo espacio. Muestre que es posible satisfacer esas condiciones (para ello puede fijar un sistema de coordenadas en el que n esté en el eje temporal).