LOS GRUPOS SU(2), SO(3) Y SUS REPRESENTACIONES

Lisetta BRUSCHI

1 Introducción

Estos grupos son dos de los ejemplos más importantes en física de los llamados *grupos continuos* (actualmente mejor denominados *grupos de Lie conexos*). Antes de dedicarnos al estudio de estos dos grupos, veamos algunos otros ejemplos familiares de grupos de Lie.

1. $G = (\mathbb{R}, +)$, el grupo aditivo de los números reales.
2. $G = (\mathbb{R}^+, .)$, el grupo multiplicativo de los números reales positivos.
3. $G = (\mathbb{R}^*, .)$, el grupo multiplicativo de los números reales distintos de cero.
4. $G = U(1)$, el grupo multiplicativo de los números complejos de módulo 1.
5. $G = (\mathbb{C}, +)$, el grupo aditivo de los números complejos.
6. $G = (\mathbb{C}^*, .)$, el grupo multiplicativo de los números complejos distintos de cero.

En cada uno de estos ejemplos se tiene una noción natural de diferenciablidad (y por supuesto también de continuidad) para funciones $G \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \to G$, $G \to G$, $G \times G \to G$ ... Sin entrar en definiciones precisas (éstas podrán encontrarse en el apéndice), podemos decir que estos objetos tienen una estructura diferenciable, o que son variedades diferenciables. Esta estructura es además compatible con la estructura de grupo, en el sentido que tanto la operación de grupo como la inversión en el grupo son aplicaciones diferenciables. Ésta es esencialmente la definición de *grupo de Lie*: un objeto que tiene una estructura de grupo y una diferenciable, compatibles entre sí.

Notar que en cada uno de estos ejemplos se puede hablar de dimensión (uno en los ejemplos 1 a 4, dos en los dos últimos) y describir la forma geométrica del objeto: 1 es una recta, 2 una semirrecta, 3 dos semirrectas, 4 una circunferencia, etc. En esta descripción sin embargo estamos haciendo intervenir una estructura adicional que tienen estos objetos, la distancia. Pero si sólo fijamos la atención en la estructura de grupo y la diferenciable, deberán ser considerados equivalentes (o isomorfos como grupos de Lie) G_1 y G_2 cuando se pueda establecer una correspondencia biyectiva $f : G_1 \to G_2$ que sea diferenciable de ida y de vuelta (*difeomorfismo*), y a la vez isomorfismo de grupos. De este modo, 1 y 2 son equivalentes ($t \mapsto e^t$ cumple estas condiciones); 3 en cambio es un grupo de Lie no isomorfo a los dos primeros, ya que, a diferencia de éstos, no es conexo, de modo que no es posible poner en correspondencia biyectiva que sea siquiera continua 1 con 3. Notar que la aplicación $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it} \in U(1)$ es un homomorfismo del grupo $(\mathbb{R}, +)$ sobre $U(1)$, diferenciable, no inyectiva, pero su restricción a un intervalo bastante chico alrededor del cero sí es inyectiva y tiene una inversa diferenciable: estos dos grupos de Lie son *localmente* isomorfos - aunque no isomorfos. Desde la misma postura, el ejemplo 6 es isomorfo al grupo producto directo $U(1) \times \mathbb{R}$: su "forma" puede pensarse indiferentemente como la de un plano sin un punto o la de un cilindro. Sin embargo, una estructura adicional como la distancia puede ser muy útil para algunas deducciones referidas a un grupo de Lie, como se verá en las secciones 3,4,5.

La finalidad de lo dicho hasta aquí es por una parte la de inducir a considerar un grupo de Lie como un objeto geométrico, que tiene una "forma" –aunque no siempre se la pueda visualizar fácilmente como en los ejemplos anteriores–, y por otra parte esbozar el marco general en el que deben situarse los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$. Mucho de lo que diremos acerca de ellos tiene una generalización a cualquier grupo de Lie.

Aunque $SO(3)$, grupo de rotaciones en el espacio $\mathbb{R}^3$, es, de los dos, el que en forma más clara e inmediata tiene relevancia desde el punto de vista físico, empezaremos estudiando $SU(2)$, que es más sencillo y más fácilmente visualizable; como veremos en la sección 5, está estrechamente relacionado con $SO(3)$ y es instrumento valioso en el estudio de este último. Además, en física interesan y aparecen naturalmente no sólo las representaciones de $SO(3)$ sino también las de $SU(2)$ (ver sección 10).

2 Algunas propiedades elementales de $SU(2)$

Recordemos que por definición $SU(2)$ está formado por las matrices u , 2×2 , de coeficientes complejos, que sean unitarias ($u.u^\dagger = \mathbb{1}$) y de determinante igual a 1; de aquí sigue inmediatamente que $u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ está en $SU(2)$ si y sólo si $\gamma = -\beta^*$, $\delta = \alpha^*$ y $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Cada matriz de $SU(2)$, como cualquier matriz unitaria, es diagonalizable y puede ser diagonalizada por una matriz también unitaria y de determinante 1. En otros términos, cada matriz u de SU(2) es conjugada, en $SU(2)$, con una matriz diagonal $\begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}$, donde, naturalmente, $e^{\pm i\phi}$ son los autovalores de u .

De aquí resulta que en $SU(2)$ cada matriz es conjugada con su inversa, y dos matrices son conjugadas si y sólo si tienen iguales autovalores, y aun si y sólo si tienen igual traza $(= 2\cos\phi)$.

3 $SU(2)$ es la esfera S^3

S^3 es la (superficie de la) esfera unitaria en $\mathbb{R}^4$, es decir,

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_k \in \mathbb{R}, \ \sum_1^4 x_k^2 = 1\} \ .$$

Separando parte real e imaginaria en la expresión $u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ de una matriz arbitraria de $SU(2)$, se ve que $u = \begin{pmatrix} x_4 + ix_3 & x_2 + ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & x_4 - ix_3 \end{pmatrix} \in SU(2)$ está individualizada biunívocamente por cuatro números reales cuyos cuadrados suman 1: componentes de un vector de norma 1 en $\mathbb{R}^4$. Adoptando esta particular numeración para las partes reales e imaginarias de los coeficientes de u , la correspondencia biyectiva entre S^3 y $SU(2)$ está dada por

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \quad \longleftrightarrow \quad x_4 \mathbb{1} + i \sum_1^3 x_k \sigma_k \in SU(2) \ ,$$

donde las σ_k son las matrices de Pauli en el orden usual:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

En todo lo que sigue se piensa $SU(2)$ situado dentro de $\mathbb{R}^4$, a través de esta identificación con S^3 .

Nota. La traza de la matriz $u = \begin{pmatrix} x_4 + ix_3 & x_2 + ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & x_4 - ix_3 \end{pmatrix}$ es $2x_4$, luego por lo dicho en la sección 1 dos matrices de $SU(2)$ son conjugadas si y sólo si tienen la misma coordenada x_4 . Si en analogía con la representación usual de S^2 pensamos el elemento neutro $\mathbb{1}$ de $SU(2)$, de coordenadas (0,0,0,1), como el polo norte de la esfera, las clases conjugadas de $SU(2)$ aparecen como los "paralelos", esto es, las intersecciones con S^3 de los (hiper)planos paralelos al (hiper)plano "ecuatorial" $x_4 = 0$. Estos "paralelos" no son, naturalmente, circunferencias, sino superficies esféricas usuales (de dimensión 2), de radio que varía desde 0 (para $x_4 = \pm 1$) hasta 1 (para $x_4 = 0$).

Introduzcamos coordenadas esféricas ϕ, θ_1, θ_2 en S^3 . El nuevo ángulo azimutal θ_2 , como θ_1 , varía desde 0 hasta π . Para un valor dado de θ_2 , tomamos coordenadas esféricas usuales ϕ, θ_1 para la 2-esfera de radio $\mathrm{sen}\theta_2$ formada por los puntos de S^3 que tienen $x_4 = \cos\theta_2$. S^3 queda entonces coordinatizada por ϕ, θ_1, θ_2 , siendo:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \mathrm{sen}\ \theta_2(\mathrm{sen}\ \theta_1 \cos\phi) \\
x_2 &= \mathrm{sen}\ \theta_2(\mathrm{sen}\ \theta_1 \mathrm{sen}\ \phi) \\
x_3 &= \mathrm{sen}\ \theta_2 \cos\theta_1 \\
x_4 &= \cos\theta_2\ .
\end{aligned}$$

Subrayemos de nuevo: dos matrices de $SU(2)$ son conjugadas si y sólo si tienen la misma coordenada θ_2 ; $e^{\pm i\theta_2}$ son los autovalores de las matrices que tienen esta coordenada.

Conviene notar que una matriz genérica $u = x_4 \mathbb{1} + i\sum_1^3 x_k\sigma_k$ de $SU(2)$ puede escribirse

$$u = \cos\theta_2 \mathbb{1} + i\mathrm{sen}\theta_2(\sum_1^3 n_k\sigma_k)$$

con θ_2 como arriba, y $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = \frac{1}{\mathrm{sen}\ \theta_2}(x_1, x_2, x_3)$, vector unitario bien determinado en $\mathbb{R}^3$, salvo si $\mathrm{sen}\ \theta_2 = 0$, o sea, salvo si $u = \pm\mathbb{1}$. Fácilmente se comprueba que $u^{-1} = \cos\theta_2 \mathbb{1} - i\mathrm{sen}\ \theta_2(\sum_1^3 n_k\sigma_k)$.

4 Elemento de volumen invariante en $SU(2)$

Queremos construir en $SU(2)$ un elemento de volumen du invariante por todas las traslaciones a izquierda

$$L_{u_0} : SU(2) \to SU(2) \qquad\qquad L_{u_0}u = u_0 u$$

por elementos $u_0 \in SU(2)$. Esta invariancia significa que para cualquier "trozo" X en $SU(2)$ el volumen de X , $\int_X du$, es igual al volumen del trasladado $L_{u_0}X$, $\int_{L_{u_0}X} du$, o sea, si f indica la función $SU(2) \to \mathbb{R}$ que vale 1 en X y 0 fuera de él,

$$\int_{SU(2)} f(u)du = \int_{SU(2)} f(u_0^{-1}u)du\ ,$$

y, más generalmente, que esta igualdad vale para cualquier función $f : SU(2) \to \mathbb{R}$. La existencia de un tal elemento de volumen (que, según veremos, es también invariante por las traslaciones a derecha) nos permitirá extender a $SU(2)$ muchas de las construcciones y demostraciones vistas para grupos finitos que se basaban en sumar sobre todos los elementos del grupo, reemplazando suma por integral sobre todo el grupo respecto de este elemento de volumen.

Para eso utilizaremos la identificación $SU(2) = S^3$ vista en la sección anterior, así como el hecho (que vamos a probar) de que las $L_{u_0} : S^3 \to S^3$ resultan ser transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^4$ (de hecho, rotaciones). El problema es entonces construir un elemento de volumen en S^3 invariante por las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^4$, y esto se hará por analogía con la construcción conocida del elemento de área en S^2 , que es invariante por las transforamaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$.

Empecemos por esto último: el elemento de área ds de la esfera usual $\{(x_1, x_2, x_3) : \sum x_k^2 = r^2\}$ en un punto dado es el producto del elemento de arco sobre el paralelo por ese punto por el elemento de arco sobre el meridiano por el mismo punto (ya que paralelos y meridianos son ortogonales). Si ϕ, θ_1 son las coordenadas esféricas de ese punto, será pues $ds = (r\mathrm{sen}\theta_1 d\theta_1)(rd\phi) = r^2\mathrm{sen}\theta_1 d\theta_1 d\phi$.

Análogamente, el elemento de volumen dS en S^3 en un punto de coordenadas ϕ, θ_1, θ_2 será el producto del elemento de área del paralelo por ese punto (que tiene radio $\text{sen}\theta_2$) por el elemento de arco del meridiano correspondiente, es decir

$$dS = (\text{sen}^2\theta_2 \text{sen}\theta_1 d\theta_1 d\phi).(d\theta_2) = \text{sen}\theta_1 \text{sen}^2\theta_2 d\theta_1 d\phi d\theta_2.$$

Este elemento de volumen en S^3 es invariante por las transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^4$ (como puede verificarse usando la fórmula por cambio de variables en una integral, recordando que el jacobiano de un cambio de variable ortogonal tiene determinante de valor absoluto igual a 1) . Cuentas elementales permiten ver que el volumen total de la esfera $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \sum_1^4 x_k = 1\}$ es igual a $2\pi^2$. Llamaremos $du = \frac{dS}{2\pi^2}$ al elemento de volumen normalizado y pensado en $SU(2)$.

Para ver que du es invariante por las traslaciones en $SU(2)$ nos falta ver que éstas son (restricciones a S^3) de transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^4$. Esto se verá en la sección siguiente.

Vale la pena mencionar aquí que en cualquier grupo de Lie hay un elemento de volumen invariante por las traslaciones a izquierda, y uno invariante por las traslaciones a derecha, cada uno unívocamente determinado (a menos de múltiplos); si el grupo es compacto (como es el caso de $SU(2)$) ambos coinciden.

5 Los cuaternios

La correspondencia establecida en la sección 3 entre S^3 y $SU(2)$ se extiende a una correspondencia lineal entre $\mathbb{R}^4$ y un cierto espacio de matrices, que se indica $\mathbb{H}$ (la hache es por Hamilton, el inventor de los cuaternios, o cuaterniones, o números de Hamilton):

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad \longleftrightarrow \quad m(\vec{x}) = X = x_4 \mathbb{1} + i \sum_1^3 x_k \sigma_k \in \mathbb{H} \ .$$

Las matrices de $\mathbb{H}$ son pues todas y solamente las de la forma

$$\begin{pmatrix} x_4 + ix_3 & x_2 + ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & x_4 - ix_3 \end{pmatrix} ,$$

sin ninguna restricción sobre los números reales x_k . Es fácil verificar que constituyen un espacio vectorial real de dimensión 4, y que $\mathbb{H}$ es cerrado respecto de la multiplicación de matrices. Puede verse además (aunque no nos interesa en este momento) que todas las matrices de $\mathbb{H}$, salvo la matriz nula, son invertibles y con una inversa que está también en $\mathbb{H}$. $\mathbb{H}$ tiene pues una estructura algebraica de dos operaciones, suma y producto, que tienen todas las propiedades de la suma y producto en los campos numéricos $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, con la sola excepción de la conmutatividad del producto, que en $\mathbb{H}$ no vale: es un "cuerpo no conmutativo" o, en la terminología actual, un "algebra con división".

Nota. $\mathbb{H}$ contiene a $\mathbb{C}$ (como las matrices de la forma $x_4 \mathbb{1} + ix_3\sigma_3$), respetando las operaciones, y como espacio vectorial real es de dimensión finita. Puede probarse que no hay otras álgebras con división de dimensión finita que extiendan a $\mathbb{C}$; si se quiere proseguir la sucesión de extensiones $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ hay que renunciar a alguna otra propiedad (por ejemplo la asociatividad del producto, como en el álgebra de los octoniones), o permitir dimensión infinita.
Puede construirse $\mathbb{H}$ (un ejemplar isomorfo a $\mathbb{H}$), en analogía a la construcción de los números complejos, agregando a $\mathbb{R}$ tres "unidades imaginarias" i, j, k de cuadrado igual a -1, e imponiendo $ij = -ji = -k$ y permutaciones cíclicas.

En $\mathbb{H}$ podemos considerar el producto escalar $< X, Y >= \frac{1}{2}Tr(X^\dagger Y)$ que por el isomorfismo m se corresponde con el producto escalar usual en $\mathbb{R}^4$; la base $(\mathbb{1}, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3)$, que se corresponde con la base canónica de $\mathbb{R}^4$, es una base ortonormal para este producto escalar. Las matrices de $SU(2)$ son los vectores unitarios de $\mathbb{H}$. Para $u_0 \in SU(2)$ y $X, Y \in \mathbb{H}$ se tiene (puesto que $u_0^\dagger = u_0^{-1}$)

$$< u_0.X, u_0.Y >= \frac{1}{2}Tr(X^\dagger.u_0^\dagger.u_0.Y) = \frac{1}{2}Tr(X.Y) =< X, Y >$$

$$< X.u_0, Y.u_0 >= \frac{1}{2}Tr(u_0^\dagger.X^\dagger.Y.u_0 >= \frac{1}{2}Tr(X.Y) =< X, Y > \quad ,$$

es decir, este producto escalar es invariante por las multiplicaciones a izquierda o a derecha por elementos de $SU(2)$: éstas –que claramente son lineales– son pues transformaciones ortogonales de $\mathbb{H}$ (o de $\mathbb{R}^4$), como se había afirmado.

Seguiremos indicando L_{u_0}, R_{u_o} las multiplicaciones a izquierda y derecha por $u_0 \in SU(2)$, aun pensadas como transformaciones de $\mathbb{H}$ en sí mismo, y no sólo de $SU(2)$ en sí mismo. Es claro que $\alpha_{u_0} = L_{u_0} \circ R_{u_0^{-1}}$ (que restringida a $SU(2)$ es la conjugación por el elemento u_0) también será una transformación ortogonal. Luego de $\alpha_{u_0}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ resulta que α_{u_0} deja invariante el subespacio ortogonal a $\mathbb{1}$, es decir, el subespacio generado por $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$. Este subespacio está formado por todas las matrices antihermíticas de traza nula, y (de acuerdo a una convención general que se verá más adelante) se indica $\mathfrak{su}(2)$:

$$\mathfrak{su}(2) = \{\begin{pmatrix} ix_3 & x_2 + ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix} : x_k \in \mathbb{R}\}.$$

6 Relación entre $SU(2)$ y $SO(3)$

Vamos a construir un homomorfismo h de $SU(2)$ sobre $SO(3)$, de núcleo $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$; tal h mandará pues u y $-u = (-\mathbb{1}).u$ a un mismo elemento de $SO(3)$, estableciendo una correspondencia "2 a 1" entre los dos grupos.

Según acabamos de ver, para cada $u_0 \in SU(2)$, la aplicación $\alpha_{u_0} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ ($\alpha_{u_0}(X) = u_0.X.u_0^{-1}$) es ortogonal y deja invariante el subespacio $\mathfrak{su}(2)$. Llamemos $\hat{h}(u_0) : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)$ su restricción a $\mathfrak{su}(2)$, de modo que

$$\hat{h}(u_0)(X) = u_0.X.u_0^{-1} \quad \forall X \in \mathfrak{su}(2).$$

Respecto de la base ortonormal de $\mathfrak{su}(2)$, $(i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3)$, $\hat{h}(u_0)$ estará representada por una matriz ortogonal, que llamamos $h(u_0)$. Es decir:

$$h(u) \text{ es la matriz } \quad (x_k^j(u)) \quad \text{siendo} \quad u.i\sigma_k.u^{-1} = \sum_{j=1}^{j=3} x_k^j(u) i\sigma_j \quad k = 1, 2, 3 \tag{1}$$

Para ver que $h(u_0)$ así definida está efectivamente en $SO(3)$, nos falta ver que el determinante de $\hat{h}(u_0)$ es igual a 1. Por el momento, sólo podemos decir que h está definido como yendo de $SU(2)$ al grupo $O(3)$ de las matrices 3×3 ortogonales. Es claro que h es homomorfismo de grupos ($\hat{h}(u.u') = \hat{h}(u).\hat{h}(u')$ y por lo tanto $h(u.u') = h(u).h(u')$). Luego, si probamos que $\det h(u_0) = 1$ para toda u_0 diagonal, será también $\det h(u) = \det h(u_0) = 1$ para una $u = u'.u_0.u'^{-1}$ y puesto que toda matriz de $SU(2)$ es conjugada de una diagonal, será $\det h(u) = 1$ para toda $u \in SU(2)$.

Sea pues u_0 diagonal, es decir, $u_0 = \cos\theta_2 \mathbb{1} + i\text{sen } \theta_2\sigma_3$. Recordando que $i\sigma_1.i\sigma_2 = -i\sigma_2.i\sigma_1 = -i\sigma_3$ y permutaciones cíclicas, realizando las cuentas se obtiene

$$\hat{h}(u_0)(i\sigma_1) = u_0.\sigma_1.u_0^{-1} = (\cos 2\theta_2)i\sigma_1 - (\text{sen } 2\theta_2)i\sigma_2$$

$$\hat{h}(u_0)(i\sigma_2) = u_0.\sigma_2.u_0^{-1} = (\text{sen } 2\theta_2)i\sigma_1 + (\cos 2\theta_2)i\sigma_2$$

$$\hat{h}(u_0)(i\sigma_3) = u_0.\sigma_3.u_0^{-1} = i\sigma_3$$

es decir

$$h(\cos\theta_2 \mathbb{1} + i\text{sen } \theta_2\sigma_3) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta_2 & \text{sen } 2\theta_2 & 0 \\ -\text{sen } 2\theta_2 & \cos 2\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos de aquí en primer lugar que $h(u_0)$ es una rotación, como nos habíamos propuesto probar, lo que asegura por el razonamiento de más arriba que h es efectivamente un homomorfismo de $SU(2)$ en $SO(3)$.

Pero obtuvimos una información más precisa: cuando $u_0 = \cos\theta_2 \mathbb{1} + \text{sen } \theta_2 i\sigma_3$, $h(u_0)$ es la rotación de eje $i\sigma_3$ y ángulo $2\theta_2$. De aquí podemos deducir que para cualquier $u \in SU(2)$ el ángulo de la rotación $h(u)$ es el doble de la coordenada θ_2 de u . En efecto, u es conjugada de una u_0 diagonal, que tiene la misma coordenada θ_2 que u . Luego $h(u)$ es conjugada, en $SO(3)$, de $h(u_0)$ y por lo tanto el ángulo de rotación de $h(u)$ es igual al de $h(u_0)$. El eje de $h(u)$ es el transformado, por la conjugación que lleva $h(u_0)$ a $h(u)$, del eje $i\sigma_3$ de $h(u_0)$ y, haciendo las cuentas, se ve que

$$\text{Si } \; u = \cos\theta_2 \mathbb{1} + i\text{sen } \theta_2 \sum_1^3 n_k\sigma_k \; , \; h(u) \; \text{ es rotación de ángulo } \; 2\theta_2 \; \text{ y eje } i\sum_1^3 n_k\sigma_k \; . \qquad (2)$$

(Este redoblamiento del ángulo tiene mucho que ver –como se verá en lo que sigue– con la pregunta: una rotación en un ángulo α ¿es igual o no es igual a una en ángulo $\alpha + 2\pi$? De esta pregunta se habla en la sección 7.)

Vemos así que cualquier $R \in SO(3)$ se obtiene como imagen por h de una matriz de $SU(2)$: el homomorfismo $h : SU(2) \to SO(3)$ es sobreyectivo.

Finalmente, el núcleo de h está formado por aquellas matrices u tales que $h(u) = \mathbb{1}$, o sea $u.X.u^{-1} = X$ para toda $X \in \mathfrak{su}(2)$. Pero las únicas matrices que conmutan con las tres matrices de Pauli son las escalares; si son de $SU(2)$ sólo pueden ser $\pm \mathbb{1}$.

Puesto que $h(u) = h(u')$ sólo si u y u' son diametralmente opuestas (o iguales), h restringido a un trozo bastante chico de $SU(2)$ es inyectivo; manda un entorno bastante chico del elemento neutro de $SU(2)$ biyectivamente sobre un entorno del elemento neutro de $SO(3)$ y estos dos grupos son pues localmente isomorfos. (h es una aplicación diferenciable, así como sus inversas locales, aunque obviamos la demostración.)

Transportando a $SO(3)$, a través de h , el elemento de volumen invariante en $SU(2)$ se obtiene en $SO(3)$ un elemento de volumen invariante (que habrá que corregir con un factor 2 si se quiere que el volumen total sea igual a 1).

7 Subgrupos monoparamétricos de $SO(3)$

Hemos estado usando, como es usual en matemática, "rotación" como sinónimo de "transformación ortogonal que mantiene la orientación del espacio" (o de "matriz ortogonal de determinante 1"). De acuerdo con esto, la rotación en $\mathbb{R}^3$ de eje $\vec{n}$ y ángulo α , $R_{\vec{n},\alpha}$, no se distingue de la rotación de igual eje y ángulo $\alpha + 2\pi$. Pero la idea intuitiva de rotación es más rica, en cuanto incluye la idea de un movimiento rotativo alrededor de el eje $\vec{n}$ que partiendo del reposo llega hasta la posición indicada por $R_{\vec{n},\alpha}$. De acuerdo a esta idea más rica, es claramente distinguible la rotación en ángulo α de la de ángulo $\alpha + 2\pi$. Para traducir esta idea que involucra un movimiento que transcurre en el tiempo, hay que considerar una función $R : \mathbb{R} \to SO(3)$ que depende del tiempo, entendiendo que, para $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $R(t)\vec{x}$ indica la posición que, a tiempo t , ocupa la partícula que a tiempo 0 ocupaba la posición $\vec{x}$. Si el movimiento ha de ser en todo momento alrededor de un eje fijo, y, además, de velocidad uniforme, es claro que deberá ser

$$R(t_1 + t_2) = R(t_1).R(t_2) \ .$$

(Es un hecho notable que esta condición, más la dependencia continua respecto de t asegura que el eje de rotación es el mismo en todos los instantes.) Una función $R : \mathbb{R} \to SO(3)$ (que supondremos derivable) que cumpla esta condición es por definición un *subgrupo monoparamétrico de* $SO(3)$.

Por ejemplo, si X es una matriz 3×3 antisimétrica, $t \mapsto \exp tX$ es un subgrupo monoparamétrico de $SO(3)$. De hecho, todos los subgrupos monoparamétricos de $SO(3)$ son de esta forma, como se verá en el estudio más detallado en la sección 8.

8 Generadores infinitesimales; álgebras de Lie

8.1 Algunas definiciones generales

En el conjunto $\mathfrak{gl}(n, K)$, ($K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$) de todas las matrices $n \times n$ con coeficientes reales o complejos, además de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar (que lo convierten en un espacio vectorial), y además de la operación de producto de matrices, se tiene también la operación “conmutador” o “corchete de Lie”

$$X, Y \mapsto [X, Y] = X.Y - Y.X$$

Esta operación
i) es bilineal: $[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1[X_1, Y] + \alpha_2[X_2, Y]$
$[X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2] = \alpha_1[X, Y_1] + \alpha_2[X, Y_2]$
ii) es antisimétrica: $[X, Y] = -[Y, X]$
iii) verifica la identidad de Jacobi:
$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 \ .$$
(Notar que esta operación no es asociativa en general: la identidad de Jacobi, que usando i) y ii) puede escribirse también $[X, [Y, Z] = [[X, Y], Z] - [Y, [Z, X]]$ muestra justamente cuán no asociativa es.)

Un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ en el cual está dada una operación

$$X, Y \in \mathfrak{g} \mapsto [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

con estas tres propiedades es, por definición, un álgebra de Lie.

Una subálgebra de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial $\mathfrak{h}$ cerrado respecto de la operación corchete. En tal caso, $\mathfrak{h}$ es ella misma un álgebra de Lie.

Dos álgebras de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ son isomorfas cuando sea posible establecer entre ambas un isomorfismo lineal que respete el corchete.

Si el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita (lo que supondremos en lo que sigue), y $X_1, ..., X_n$ es una base, basta conocer los coeficientes c_{ij}^k (“constantes de estructura”) de las expresiones $[X_i, X_j] = \sum_1^n c_{ij}^k X_k$ para poder calcular el corchete de cualquier par de elementos de $\mathfrak{g}$. Y por supuesto dos álgebras de Lie son isomorfas si y sólo si, respecto de bases convenientes, tienen las mismas constantes de estructura.

Recordemos que cualquiera sea la matriz X en $\mathfrak{gl}(n,K)$ es $\det\exp X = e^{\mathrm{Tr}X} \neq 0$: $\exp X$ es siempre una matriz invertible de modo que la aplicación exponencial va del álgebra $\mathfrak{gl}(n,K)$ al grupo de las matrices invertibles $GL(n,K)$.

La propiedad característica de la exponencial numérica, $\exp(x+y) = (\exp x).(\exp y)$ no vale en general para matrices, pero sí vale para matrices que conmutan, como se verifica fácilmente:

$$\exp(X+Y) = (\exp X).(\exp Y) \qquad \text{si } [X,Y] = 0 \; .$$

En particular, puesto que todos los múltiplos tX , $t \in \mathbb{R}$ de una matriz X conmutan entre sí, se tiene

$$\exp(t+s)X = (\exp tX).(\exp sX) \; .$$

Es decir, cada matriz X en $\mathfrak{gl}(n,K)$ da origen a un homomorfismo $t \mapsto \exp tX$ del grupo aditivo de los reales en el grupo de las matrices invertibles. Este homomorfismo es claramente derivable (o sea, es un subgrupo monoparamétrico de $GL(n,K)$), y su derivada evaluada en $t=0$ es la matriz de partida X . Es razonable decir que X "genera" el subgrupo monoparamétrico $t \mapsto \exp tX$ (puesto que para cada entero positivo N , $(\exp \frac{t}{N}X)^N = \exp tX$, cada $\exp tX$ puede pensarse como "la iteración de infinitas matrices $\mathbb{1} + \epsilon X$, con ϵ infinitamente pequeño"), y llamar a X el *generador infinitesimal* del correspondiente subgrupo monoparamétrico.

Por otra parte, si $\gamma : \mathbb{R} \to GL(n,K)$ es un subgrupo monoparamétrico, y $X_0 = \frac{d\gamma}{dt}(0)$, es necesariamente $\gamma(t) = \exp tX_0$ para todo t , pues γ y $\exp tX_0$ son ambos soluciones del mismo sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias $X'(t) = X_0.X(t)$, con la misma condición inicial $X(0) = \mathbb{1}$: los subgrupos monoparamétricos de $GL(n,K)$ son todos y solamente los de la forma $\gamma(t) = \exp tX$, para $X \in \mathfrak{gl}(n,K)$.

Puede verse que a cada subgrupo de Lie de $GL(n,K)$ corresponde una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n,K)$, que está formada por los generadores infinitesimales de todos los subgrupos monoparamétricos de G (y es de algún modo "la mejor aproximación lineal al grupo"); nos limitaremos a verlo para los dos subgrupos que nos interesan.

8.2 Las álgebras de Lie de $SU(2)$ y de $SO(3)$

En la sección 4 definimos $\mathfrak{su}(2)$ como el espacio de las matrices de orden 2, coeficientes complejos, antihermíticas y de traza 0. Una $X \in \mathfrak{su}(2)$ es de la forma iH , con H hermítica (y de traza 0), y de acuerdo a la notación más usual en física, indicaremos en general iH , iK... una matriz genérica en $\mathfrak{su}(2)$. Cuentas sencillas muestran que si iH, iK están en $\mathfrak{su}(2)$ el conmutador $[iH, iK]$ también está (¡no así el producto $iH.iK$!). Luego $\mathfrak{su}(2)$ es un álgebra de Lie. Veamos que

Una matriz iH está en $\mathfrak{su}(2)$ si y sólo si $\exp tiH$ está en $SU(2)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

En efecto: supongamos primero que iH está en $\mathfrak{su}(2)$. Entonces $(\exp(tiH))^\dagger = \exp(t(-i)H^\dagger) = \exp(-(tiH)) = (\exp tiH)^{-1}$ y $\det(\exp tiH) = e^{\mathrm{Tr}(iH)} = e^0 = 1$, o sea, $\exp tiH \in SU(2)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, si esto último ocurre, derivando la identidad

$$(\exp tiH)(\exp tiH)^\dagger = \mathbb{1}$$

obtenemos

$$(\frac{d}{dt}\exp tiH)(\exp tiH) + (\exp tiH)^\dagger(\frac{d}{dt}(\exp tiH)^\dagger) = 0 \; ,$$

que, poniendo $t=0$, da $iH+(iH)^\dagger=0$, o sea iH es antihermítica. Análogamente, puesto que es idénticamente

$$\det\exp tiH = e^{\mathrm{Tr}\ tiH} = 1\ ,$$

se obtiene, derivando, $(\mathrm{Tr}\ iH)e^{\mathrm{Tr}\ tiH}=0$, luego $\mathrm{Tr}\ iH=0$.

Podemos expresar este resultado diciendo que el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ está formada por todos (y solamente) los generadores infinitesimales de los subgrupos monoparamétricos de $SU(2)$; es *el álgebra de Lie de este grupo.*

Notar que en la demostración anterior no intervino el hecho de que $t\mapsto\exp tiH$ sea homomorfismo; con el mismo razonamiento se prueba que si $\gamma:\mathbb{R}\to SU(2)$ es una curva diferenciable con $\gamma(0)=\mathbb{1}$, entonces su vector velocidad en $t=0$, $\frac{d\gamma}{dt}(0)$, está en $\mathfrak{su}(2)$. De modo que $\mathfrak{su}(2)$ puede pensarse como el conjunto de todos estos vectores velocidad: el (hiper)plano tangente a $SU(2)$ en el punto $\mathbb{1}$.

Además, la aplicación exponencial es sobreyectiva de $\mathfrak{su}(2)$ sobre $SU(2)$. Esto puede verse así: cuentas fáciles prueban que si iN es un elemento de $\mathfrak{su}(2)$ de norma 1 (es decir, $N=\sum_1^3 x_k\sigma_k$, con $\sum_2^3 x_k^2=1$) entonces $N^2=\mathbb{1}$ y

$$\exp tiN = \cos t\mathbb{1} + (\mathrm{sen}\ t)iN\ . \tag{3}$$

La imagen de este grupo monoparamétrico es pues el meridiano intersección de la esfera $SU(2)$ con el plano vertical que pasa por 0 , $\mathbb{1}$, iN . Como iN es arbitrario sobre el ecuador, estos subgrupos monoparamétricos cubren todo $SU(2)$. Notar además que un subgrupo monoparamétrico cualquiera de $SU(2)$ (salvo el trivial, $t\mapsto\mathbb{1}$) puede diferir de uno de éstos a lo sumo en la parametrización.

Consideraciones enteramente análogas valen para el grupo $SO(3)$ y siguiendo los mismos lineamientos se prueba:

> Una matriz X de $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ es tal que $\exp tX$ está en $SO(3)$ para todo $t\in\mathbb{R}$ si y sólo si es antisimétrica; éstas constituyen un álgebra de Lie, por definición el álgebra de Lie de $SO(3)$, que se indica $\mathfrak{so}(3)$.

(En general si el grupo de Lie se indica G , es usual indicar $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie.)

El hecho de que $SU(2)$ y $SO(3)$ sean localmente isomorfos se refleja en que sus álgebras de Lie son isomorfas. Esto puede verse comprobando que las constantes de estructura de $\mathfrak{su}(2)$ respecto de la base $\tau_1=\frac{1}{2}i\sigma_1$, $\tau_2=\frac{1}{2}i\sigma_2$, $\tau_3=\frac{1}{2}i\sigma_3$ son iguales a las de $\mathfrak{so}(3)$ respecto de la base formada por los generadores infinitesimales X_1,X_2,X_3 de las rotaciones alrededor de los tres ejes de coordenadas. Estos generadores son:

$$X_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\qquad \exp tX_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos t&\mathrm{sen}\ t\\0&-\mathrm{sen}\ t&\cos t\end{pmatrix}$$

$$X_2=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad \exp tX_2=\begin{pmatrix}\cos t&0&-\mathrm{sen}\ t\\0&1&0\\\mathrm{sen}\ t&0&\cos t\end{pmatrix}$$

$$X_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad \exp tX_3=\begin{pmatrix}\cos t&\mathrm{sen}\ t&0\\-\mathrm{sen}\ t&\cos t&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ .$$

Haciendo las cuentas se obtiene:

$$[\tau_1, \tau_2] = -\tau_3 \qquad\qquad [X_1, X_2] = -X_3$$

$$[\tau_2, \tau_3] = -\tau_1 \qquad\qquad [X_2, X_3] = -X_1$$

$$[\tau_3, \tau_1] = -\tau_3 \qquad\qquad [X_3, X_1] = -X_2$$

Puesto que las constantes de estructura de las dos álgebras respecto de estas bases son iguales, el isomorfismo lineal $h^0 : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ que envía τ_k en X_k es un isomorfismo de álgebras de Lie.

Este isomorfismo h^0 se deduce del homomorfismo canónico $h : SU(2) \to SO(3)$ definido en la sección 6 de acuerdo a un procedimiento general que veremos en la sección 11. Notar que de las fórmulas (2) y (3) se deduce

$$h(\exp t\tau_k) = \exp tX_k \qquad k = 1, 2, 3 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

De hecho, vale

$$h(\exp iH) = \exp h^0(iH) \quad \text{para toda } iH \in \mathfrak{su}(2) \ ; \tag{4}$$

como tanto $h : SU(2) \to SO(3)$ como $\exp : \mathfrak{su}(2) \to SU(2)$ son sobreyectivas, resulta que también lo es $\exp : \mathfrak{so}(3) \to SO(3)$.

9 Relación entre las representaciones de $SU(2)$ y de $SO(3)$

Una representación matricial de dimensión n de un grupo de Lie G es un homomorfismo diferenciable $D : G \to GL(n, \mathbb{C})$ (basta que sea continuo).

Observemos en primer lugar que si D es una representación de $SO(3)$ su composición con el homomorfismo h , $D' = D \circ h$, es una representación de $SU(2)$, de igual dimensión. D es irreducible si y sólo si lo es D' , ya que la irreducibilidad es una propiedad del conjunto imagen y $D(\ SO(3)\ ) = D'(\ SU(2)\ )$ puesto que h es sobreyectivo. Las representaciones D' de $SU(2)$ que así se obtienen no son todas las posibles, ya que si $D' = D \circ h$ es necesariamente $D'(u) = D'(-u)\ \forall u \in SU(2)$, condición que no es verificada por todas las representaciones de $SU(2)$ (por ejemplo la idéntica o "fundamental" no la verifica).

Conviene notar que de todos modos si D' es una representación irreducible de $SU(2)$, $D'(u)$ y $D'(-u)$ pueden diferir a lo sumo en el signo. En efecto, $D'(-u) = D'(-\mathbb{1}).D'(u)$ y $D'(-\mathbb{1})$ conmuta con todas las $D'(u)$ y por lo tanto, por la irreducibilidad, es una matriz escalar; como por otra parte $(D'(-\mathbb{1}))^2 = D'((-\mathbb{1})^2) = \mathbb{1}$, es $D'(-\mathbb{1}) = \pm\mathbb{1}$ (únicas matrices escalares de cuadrado igual a la identidad).

Si, partiendo de una representación cualquiera D' de $SU(2)$, se define para $R \in SO(3)$:

$$D(R) = D'(h^{-1}(R)) \tag{5}$$

se obtiene una verdadera representación de $SO(3)$ sólo si D' verifica $D'(u) = D'(-u)$ para toda u , esto es, si $D'(-\mathbb{1}) = \mathbb{1}$; en caso contrario, D así definida asocia a cada $R \in SO(3)$ no una sino dos matrices (o transformaciones lineales) $D'(u)$, $D'(-u)$ $(h(u) = R)$. La igualdad (5) define en ese caso lo que se llama *representación bivaluada* de $SO(3)$. Y no es posible, entonces, eliminar la bivaluación mediante una conveniente elección, para cada R , de uno de los dos valores $D'(u)$, $D'(-u)$, en forma enteramente análoga a como no es posible eliminar la bivaluación de una función como $\sqrt{z}$ en el plano complejo: en este último caso, cuando la variable z recorre por ejemplo la circunferencia $|z| = 1$, si se parte de $z = 1$ con el valor $\sqrt{1} = +1$ se llega, si no se quiere romper la continuidad, con la otra valuación $\sqrt{1} = -1$ al final del recorrido. De la misma manera, cuando la variable R recorre en $SO(3)$ ciertos caminos cerrados R_t , con $0 \leq t \leq 1$ y $R_0 = R_1$, si se elige $D(R_t) = D'(u_t)$ $(h(u_t) = R_t)$ de modo que haya continuidad a lo largo del camino, se llega a $D(R_1) = D'(u_1) \neq D'(u_0) = D(R_0)$. (Pero puede verse que si un tal camino es recorrido dos veces ($R_t : [0,2] \to SO(3)$ con $R_{2t} = R_t$ para $0 \leq t \leq 1$, la elección continua de u_t , $t \in [0,2]$ lleva a $D(R_2) = D'(u_2) = D'(u_0) = D(R_0)$.)

Sin embargo, dada una representación D' de $SU(2)$, si se conviene en elegir para las rotaciones R bastante cercanas a la identidad (por ejemplo, de ángulo menor que π), de las dos $h^{-1}(R)$, la que está en el hemisferio superior (de ángulo azimutal θ_2 menor que $\pi/2$), la fórmula (5) proporciona una "representación local" (sólo definida en el entorno de la identidad), univaluada y continua.

Igual que para un grupo finito,

Toda representación de $SU(2)$ (o de $SO(3)$) es equivalente a una unitaria.

La demostración es enteramente análoga a la del caso de un grupo finito:
Partiendo de un producto escalar cualquiera (,) en el espacio de la representación y "promediando sobre $SU(2)$ " los valores ($D(u)\vec{x}, D(u)\vec{y}$) , es decir, definiendo

$$< \vec{x}, \vec{y} >= \int_{SU(2)} (D(u)\vec{x}, D(u)\vec{y}\ )du$$

(donde du es el elemento de volumen invariante), se obtiene un producto escalar respecto del cual todos los operadores $D(u)$ son unitarios.

Análogamente, utilizando el elemento de volumen invariante e imitando las demostraciones válidas para grupos finitos se prueba:

A) Dos representaciones de $SU(2)$ son equivalentes si y sólo si tienen igual carácter.

B) Una representación de $SU(2)$ es irreducible si y sólo si su carácter χ verifica

$$\int_{SU(2)} |\chi(u)|^2 du = 1\ .$$

C) Si dos representaciones irreducibles de $SU(2)$ no son equivalentes, entonces sus caracteres χ , χ' "son ortogonales", es decir, verifican

$$\int_{SU(2)} \chi(u)\chi'(u)^* du = 0\ .$$

10 Prosigue la justificación de la introducción de $SU(2)$

El hecho de que, desde el punto de vista físico, interesen también las representaciones bivaluadas de $SO(3)$ (esto es, las representaciones de $SU(2)$) está relacionado con la indeterminación de fase para las funciones de onda (ver por ejemplo Elliot, *Symmetry in Physics*, pág. 150). Esta indeterminación hace que interesen tanto las verdaderas representaciones unitarias como las que "están determinadas salvo un factor de fase". Una definición precisa de una tal, de dimensión finita n , es: homomorfismo (continuo) D de $SO(3)$ en el grupo cociente de $U(n)$ por el subgrupo Z formado por las matrices escalares (es decir, las de la forma $e^{i\theta}\mathbb{1}$). Estas representaciones se llaman también *representaciones proyectivas.* Dada una tal D , no siempre existe un homomorfismo continuo $D_1 : SO(3) \to U(n)$ que para cada R seleccione una matriz de la clase lateral $D(R)$

(es, decir, tal que $D_1 \circ p = D$, siendo $p : U(n) \to U(n)/Z$ la proyección canónica). En cambio, lo análogo es siempre posible cuando en lugar de $SO(3)$ se parte de $SU(2)$. (Esto es debido a que $SU(2)$, a diferencia de $SO(3)$, es simplemente conexo). De modo que dado $D : SO(3) \to U(n)/Z$ como arriba, es siempre posible hallar un homorfismo continuo $D' : SU(2) \to U(n)$ (representación unitaria de $SU(2)$) tal que $p \circ D' = D \circ h$, reduciendo así a una bivaluación la total indeterminación de fase de D .

Prolongando la analogía con las funciones analíticas multivaluadas, se podría decir que $SU(2)$ juega, simultáneamente para todas las representaciones proyectivas de $SO(3)$, el papel de la superficie de Riemann para una función analítica multivaluada.

Otra línea de razonamiento que justifica la introducción de $SU(2)$, siendo $SO(3)$ el objeto de principal interés, es la siguiente (a relacionar con el hecho de que, por lo general, las leyes físicas se expresan por ecuaciones diferenciales). Como veremos en la sección siguiente, toda representación de uno de estos grupos da origen a una de su álgebra de Lie, "la mejor aproximación lineal de la representación del grupo", o "aspecto infinitesimal de la representación del grupo". Puesto que $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{so}(3)$ son isomorfas, en su aspecto infinitesimal no se distinguen las representaciones de los dos grupos. Por otra parte se puede probar que cada representación del álgebra $\mathfrak{su}(2)$ viene de una (única) representación de $SU(2)$: para este grupo hay una correspondencia perfecta entre representaciones (de dimensión finita) del grupo y representaciones del álgebra (lo que no es el caso para $SO(3)$). Puede darse una demostración topológica de este hecho, basada en la simple conexión de $SU(2)$, o también una puramente algebraica, parte de la cual será esbozada en el apéndice.

11 Representaciones en su aspecto infinitesimal

Consideremos primero el caso de $SU(2)$. Supongamos tener una representación D de $SU(2)$: $D(u)$, para cada $u \in SU(2)$, es una matriz invertible $n \times n$ cuyos coeficientes dependen diferenciablemente de las coordenadas de u (y, por supuesto, $D(u.u') = D(u).D(u')$).

Vamos a asignar a cada matriz $iH \in \mathfrak{su}(2)$ una matriz $D^0(iH)$, $n \times n$ (ya no invertible en general), por medio de

$$D^0(iH) = \frac{d}{dt}(D(\exp tiH))_{|t=0}$$

La asignación $iH \in \mathfrak{su}(2) \mapsto D^0(iH) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ así definida tiene las siguientes propiedades:

i) vale: $\exp tD^0(iH) = D(\exp tiH)$

ii) es lineal: $D^0(aiH + biK) = aD^0(iH) + bD^0(iK) \qquad (a, b \in \mathbb{R})$

iii) respeta la operación corchete: $D^0([iH, iK]) = [D^0(iH), D^0(iK)]$

La propiedad i) es consecuencia de lo observado al final de la sección 8.1, ya que claramente $t \mapsto D(\exp tiH)$ es un subgrupo monoparamétrico de $GL(n, \mathbb{C})$. Las dos últimas dicen que D^0 es un homomorfismo de álgebras de Lie, o sea, una *representación del álgebra de Lie* $\mathfrak{su}(2)$ y la demostración de estas dos propiedades puede verse en el apéndice.

Observemos que D^0 , al ser lineal, queda totalmente determinada conociendo sus valores sobre los elementos de una base de $\mathfrak{su}(2)$, por ejemplo, conociendo $D^0(\frac{i}{2}\sigma_k)$, $k = 1, 2, 3$. Además, estas tres matrices tienen por la propiedad iii) las mismas relaciones de conmutación que las $\frac{i}{2}\sigma_k$, o , lo que es lo mismo, llamando

$$iJ_k = D^0(\frac{i}{2}\sigma_k) \ ,$$

las tres matrices J_k tienen las mismas relaciones de conmutación que las matrices de Pauli divididas por 2:

$$[J_1, J_2] = iJ_3 \qquad \text{y permutaciones cíclicas .} \tag{6}$$

Recíprocamente, dadas tres matrices $n \times n$, J_1, J_2, J_3 con estas relaciones de conmutación, queda unívocamente determinada una aplicación lineal $\mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, la que manda $\tau_k = \frac{i}{2}\sigma_k$ en iJ_k , $k = 1, 2, 3$. Esta aplicación lineal necesariamente respeta el corchete, es pues una *representación de dimensión* n *del álgebra* $\mathfrak{su}(2)$.

Como se dijo al final de la sección 10, se puede demostrar que dada una representación D^0 del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ existe una única representación D del grupo $SU(2)$ que verifica

$$\exp tD^0(iH) = D(\exp tiH) \qquad \forall\ iH \in \mathfrak{su}(2) \ ;$$

vemos ahora que una de estas representaciones queda unívocamente determinada por tres matrices J_1, J_2, J_3 con las relaciones de conmutación (6). Conociendo estas tres matrices, se podrán determinar pues todas las propiedades de la correspondiente representación del grupo; en particular si es o no irreducible. Esto va a permitir en particular determinar todas las representaciones irreducibles de $SU(2)$, lo que se hará en la sección 13. Nos referiremos a J_1, J_2, J_3 como *los generadores infinitesimales de la representación.*

Respecto a la irreducibilidad, observemos aquí que si D es una representación de dimensión n de $SU(2)$ y D^0 la correspondiente del álgebra, un subespacio W de $\mathbb{C}^n$ es invariante por todas las $D(u)$, $u \in SU(2)$, si y sólo si es invariante por todas las $D^0(iH)$, $iH \in \mathfrak{su}(2)$. En efecto, supongamos primero que W es $D-$invariante, y sea iH arbitraria en $\mathfrak{su}(2)$. Para $\vec{w} \in W$ se tiene

$$D^0(iH)\vec{w} = \frac{d}{dt} D(\exp tiH)_{|t=0}\vec{w} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(D(\exp tiH)\vec{w} - \vec{w}) \ ,$$

y puesto que para cada t el cociente incremental está en W , lo mismo vale para el límite. Supongamos ahora que W es D^0-invariante, y $\vec{w} \in W$. Entonces en la serie

$$D(\exp iH)\vec{w} = (\exp D^0(iH))\vec{w} = \vec{w} + D^0(iH)\vec{w} + ...$$

todos los términos están en W y por lo tanto también su suma $D(\exp iH)\vec{w}$; puesto que toda matriz de $SU(2)$ es exponencial de una matriz de $\mathfrak{su}(2)$, queda probado que W es $D-$invariante.

De esto resulta que D es irreducible si y sólo si D^0 es irreducible, y para asegurar esto último basta saber que el espacio de la representación no tiene ningún subespacio propio invariante por los tres operadores J_k .

También es fácil ver (recordando que $A.\exp B.A^{-1} = \exp(A.B.A^{-1})$) que D_1 es equivalente a D_2 si y sólo si D_1^0 es equivalente a D_2^0 .

De nuevo, las mismas construcciones y razonamientos pueden hacerse en el caso del grupo $SO(3)$, asociando a cada representación D del grupo una, D^0 , de su álgebra, definida por $D^0(X) = \frac{d}{dt}(D(\exp X)_{|t=0}$. Valen las propiedades análogas, en particular $D(\exp X) = \exp D^0(X)$ para toda $X \in \mathfrak{so}(3)$; la única excepción es que la correspondencia $D \mapsto D^0$ deja de ser sobreyectiva: algunas de las representaciones del álgebra $\mathfrak{so}(3)$ (que por supuesto “coinciden” con las representaciones de $\mathfrak{su}(2)$) no vienen de una verdadera representación de $SO(3)$ sino de una bivaluada.

12 (J_1, J_2, J_3) como operador tensorial irreducible de tipo $D^{(1)}$

Con las notaciones de la sección anterior, observemos que para toda representación D de $SU(2)$, toda $u \in SU(2)$, y toda $iH \in \mathfrak{su}(2)$ se tiene

$$D(u).D^0(iH).D(u)^{-1} = D(u).\frac{d}{dt}D(\exp tiH)_{|t=0}.D(u^{-1}) = \frac{d}{dt}D(u.\exp tiH.u^{-1})_{|t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}D(\exp t(u.iH.u^{-1}))_{|t=0} = D^0(u.iH.u^{-1}) \ .$$

En particular, para $H = \frac{1}{2}\sigma_k$, y con $iJ_k = D^0(\frac{i}{2}\sigma_k)$, se tendrá

$$D(u)iJ_kD(u^{-1}) = D^0(u.\frac{i}{2}\sigma_k.u^{-1}) \ .$$

Llamemos, como en la ecuación (1) de la sección 6, $x_k^j(u)$ los coeficientes de la matriz $h(u)$: $u.i\sigma_k.u^{-1} = \sum_j x_k^j(u)i\sigma_k$. (Claramente la misma relación subsiste agregando un factor $\frac{1}{2}$ o eliminando el factor i de las tres matrices de Pauli). De modo que

$$D(u).D^0(\frac{i}{2}\sigma_k).D(u)^{-1} = D^0(\sum_{j=1}^{j=3} x_k^j(u)\frac{i}{2}\sigma_k) = \sum_{j=1}^{j=3} x_k^j(u)iJ_k$$

o también

$$D(u).J_k.D(u)^{-1} = \sum_{j=1}^{j=3} x_k^j(u)J_j \tag{7}$$

Es decir, en cualquier representación D, los tres operadores $J_k = -iD^0(\frac{i}{2}\sigma_k)$ transforman entre sí, por las $D(u)$, de acuerdo a la misma matriz $(x_k^j(u)) = h(u)$. Según veremos en la sección siguiente, h es la (única) representación irreducible de dimensión 3 de $SU(2)$, y suele indicarse $h = D^{(1)}$; (J_1, J_2, J_3) (en cualquier representación) es un "operador tensorial irreducible de tipo $D^{(1)}$ ".

13 Clasificación de las representaciones de $SU(2)$ en su aspecto infinitesimal

Nuestro objetivo en esta sección es construir todas las represesentaciones irreducibles de $\mathfrak{su}(2)$, explicitando la forma que tienen los J_k en una base conveniente del espacio en que actúan, cuando éste es irreducible.

Supongamos dadas tres matrices (u operadores) J_1, J_2, J_3 que verifican las relaciones de conmutación (6). De estas relaciones puede deducirse de varias maneras (ninguna de las cuales es muy sencilla) que respecto de un conveniente producto escalar en el espacio vectorial complejo V (que suponemos de dimensión finita) en el cual operan los J_k estos operadores son hermíticos, y por lo tanto diagonalizables (¡aunque no simultáneamente!).

Una de las formas de verlo es la siguiente: según se mencionó en las secciones anteriores, existe una (única) representación D de $SU(2)$ tal que

$$D(\exp t\frac{i}{2}\sigma_k) = \exp tiJ_k \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

y sabemos que respecto de un conveniente producto escalar todos los $D(u)$ son unitarios (final de la sección 9). Por lo tanto todos los $D^0(iH)$ y en particular los iJ_k son antihermíticos. (De manera mucho más elemental resultará del teorema más abajo la hermiticidad de los operadores J_k cuando se sabe que determinan una representación irreducible.) En el caso de una representación cualquiera, de la hermiticidad de los J_k resulta que si W es un subespacio invariante por los tres operadores J_k , su complemento ortogonal será también invariante, lo cual asegura la posibilidad de descomponer el espacio en suma directa (ortogonal) de subespacios invariantes irreducibles.

Pero por el momento no haremos uso de este hecho, ni supondremos todavía que la representación definida por los J_k sea irreducible. Introducimos los operadores $J_+ = J_1 + iJ_2$, $J_- = J_1 - iJ_2$. Es claro que un subespacio de V es invariante (resp. invariante irreducible) para J_1, J_2, J_3 si y sólo si lo es para J_+, J_-, J_3 . Las nuevas relaciones de conmutación son

$$[J_3, J_+] = J_+ \quad , [J_3, J_-] = -J_-, \quad [J_+, J_-] = 2J_3 \ . \tag{8}$$

Puesto que V es de dimensión finita, cualquier operador, en particular J_3 , tiene en V por lo menos un autovector. Nos apoyaremos en el siguiente hecho, cuya demostración es consecuencia sencilla de las relaciones de conmutación (8):

> Si $\vec{x}$ es autovector de J_3 , de autovalor a , entonces:
>
> o bien $J_+\vec{x} = 0$ o bien $J_+\vec{x}$ es autovector de J_3 , de autovalor $a + 1$, y
>
> o bien $J_-\vec{x} = 0$ o bien $J_-\vec{x}$ es autovector de J_3 , de autovalor $a - 1$.

De aquí resulta que si se parte de un autovector $\vec{x}$ de J_3 de autovalor a y se le aplica reiteradamente J_+ , mientras no se llegue a un vector nulo, se van obteniendo autovectores de J_3 , $\vec{x}, J_+\vec{x}, J_+^2\vec{x}, ...$ correspondientes a autovalores distintos $a, a+1, a+2, ...$ y por lo tanto linealmente independientes. Como el espacio es de dimensión finita, para algún k se llegará a $J_3^k\vec{x} = 0$. Para el primer k para el que eso ocurre, $\vec{x}_0 = J_3^{k-1}\vec{x}$ es un autovector de J_3 anulado por J_+ . Naturalmente consideraciones análogas valen para J_- , en particular cualquier autovector de J_3 es anulado por una conveniente potencia de J_- .

La forma explícita de los J_k , cuando operan irreduciblemente, resultará de la afirmación siguiente, que demostramos en detalle.

> Sea $\vec{x}_0$ un autovector de J_3 anulado por J_+ (tal $\vec{x}_0$ ciertamente existe por lo que acabamos de ver) y sea n el primer entero positivo tal que $J_-^n\vec{x}_0 = 0$. Entonces:
>
> i) los n vectores $\vec{x}_0, J_-x_0, J_-^2\vec{x}_0, ..., J_-^{n-1}\vec{x}_0$ son base de un subespacio W (de dimensión n), invariante e irreducible para la representación definida por los J_k ;
>
> ii) la restricción de J_3 a W es diagonalizable, y su matriz en la base $\vec{x}_0, J_-x_0, J_-^2\vec{x}_0, ...,$ $J_-^{n-1}\vec{x}_0$ es $\mathrm{diag}(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2} - 1, \frac{n-1}{2} - 2, ..., -\frac{n-1}{2})$.

Demostración. Sea a el autovalor correspondiente a $\vec{x}_0$: $J_3\vec{x}_0 = a\vec{x}_0$. Vamos a probar por inducción sobre k que

$$J_+(J_-^k\vec{x}_0) = k(2a - k + 1)J_-^{k-1}\vec{x}_0 \qquad k = 1, 2, ... \tag{9}$$

k=1:

$$J_+(J_-\vec{x}_0) = J_-J_+\vec{x}_0 + 2J_3\vec{x}_0 = 2a\vec{x}_0 = 1(2a - 1 + 1)J_-^0\vec{x}_0 \ .$$

De k a $k+1$:

$$J_+(J_-^{k+1}\vec{x}_0) = J_+J_-(J_-^k\vec{x}_0) = J_-J_+(J_-^k\vec{x}_0) + 2J_3(J_-^k\vec{x}_0) =$$

$$= J_-(k(2a - k + 1)J_-^{k-1}\vec{x}_0) + 2(a - k)J_-^k\vec{x}_0 = (k(2a - k + 1) + 2(a - k)J_-^k\vec{x}_0 =$$

$$= (k(2a-k)+k+(2a-k)-k)J_-^k\vec{x}_0 = ((k+1)(2a-(k+1)+1)J_-^k\vec{x}_0 \ .$$

De la validez de (9) para todo entero positivo k , que queda así establecida, se deduce por una parte que W (que claramente es invariante por J_- y J_3) también es invariante por J_+ . Por otra parte, para $k=n$ (recordando que $J_-^{n-1}\vec{x}_0 \neq 0$ y $J_-^n\vec{x}_0 = 0$), (9) da:

$$0 = J_+(J_-^n\vec{x}_0) = n(2a-n+1)J_-^{n-1}\vec{x}_0$$

y por lo tanto $2a-n+1=0$, o sea $a=\frac{n-1}{2}$. Esto, junto con (9), demuestra la afirmación ii).

Lo único que queda por ver es que W es irreducible. Para eso, observemos que los $\vec{x}_k = J_-^k\vec{x}_0$, $k = 0,1,2,...$, son una base formada por autovectores de J_3 correspondientes a autovalores distintos y por lo tanto, salvo múltiplos, los únicos autovectores de J_3 en W . Si $W' \subset W$ es un subespacio no nulo invariante por los tres operadores J_3, J_+, J_- , habrá en W' por lo menos un autovector de J_3 , es decir, uno por lo menos de los $\vec{x}_k$ debe estar en W' . La invariancia de W' por J_- obliga entonces a que estén en W' los siguientes, $\vec{x}_{k+1} = J_-\vec{x}_k, \vec{x}_{k+2} = J_-^2\vec{x}_k$, ... , mientras que la invariancia por J_+ obliga a que estén en W' los precedentes, $\vec{x}_{k-1}$, $\vec{x}_{k-2}, ...$, que son proporcionales a $J_+\vec{x}_k$, $J_+^2\vec{x}_k$, ... Luego $W' = W$.

En consecuencia:

> Si V , de dimensión n , es invariante irreducible para J_3 , J_+ , J_- entonces tiene una base $\vec{x}_0, \vec{x}_1, ..., \vec{x}_{n-1}$ tal que
>
> $$J_3\vec{x}_k = (\frac{n-1}{2} - k)\vec{x}_k \qquad J_+\vec{x}_k = k(n-k)\vec{x}_{k-1}(= 0 \text{ si } k=0) \qquad J_-\vec{x}_k = \vec{x}_{k+1}$$

Es decir, en esta base, las matrices de estos tres operadores son:

$$J_3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{n-1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{2}-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n-1}{2}-2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n-1}{2}-3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{n-1}{2} \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$J_+ \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2(n-2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3(n-3) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad J_- \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto en esta base, de las tres matrices de los tres operadores dados inicialmente, $J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$, $J_2 = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)$, J_3 , sólo la tercera es hermítica. Pero pasando a la base $\vec{e}_0, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_{n-1}$ con

$$\vec{e}_k = (k!(n-1)(n-2)...(n-k))^{\frac{1}{2}}\vec{x}_k \ ,$$

la matriz de J_3 no se altera, mientras que las de J_2 y J_3 pasan a ser hermíticas, precisamente

$$J_1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{(n-1)^{1/2}}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{(n-1)^{1/2}}{2} & 0 & \frac{(2(n-2))^{1/2}}{2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(2(n-2))^{1/2}}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \frac{(n-1)^{1/2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(n-1)^{1/2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$J_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i(n-1)^{1/2}}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{i(n-1)^{1/2}}{2} & 0 & \frac{-i(2(n-2)^{1/2})}{2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i(2(n-2))^{1/2}}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \frac{-i(n-1)^{1/2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{i(n-1)^{1/2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Es inmediato por otra parte verificar que para cualquier entero positivo n estas tres matrices hermíticas de orden n cumplen las relaciones de conmutación (6) y operan irreduciblemente.

Resumiendo:

> Si tres operadores J_1, J_2, J_3 son generadores infinitesimales de una representación irreducible de dimensión n de $\mathfrak{su}(2)$ (o sea, verifican las relaciones de conmutación (6) y operan irreduciblemente en un espacio de dimensión finita n), sus matrices en una conveniente base del espacio son las explicitadas en las fórmulas (10), (11) y (12); en particular, dos representaciones irreducibles de $\mathfrak{su}(2)$ de igual dimensión son equivalentes.
>
> Para cualquier entero positivo n hay una (única a menos de equivalencias) representación irreducible de $\mathfrak{su}(2)$ de dimensión n .

De acuerdo a lo dicho en las secciones anteriores, puede afirmarse también:

> El grupo $SU(2)$ tiene una única (salvo equivalencias) representación irreducible por cada dimensión n . Ésta suele indicarse $D^{(j)}$, donde $j = \frac{n-1}{2} = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ...$ y tiene una forma matricial unitaria dada por
>
> $$D^{(j)}(\exp \frac{i}{2} \sum_1^3 x_k \sigma_k) = \exp i \sum_1^3 x_k J_k \tag{13}$$
>
> donde las matrices J_k son las de las fórmulas (10), (11) y (12).

Una cuenta fácil muestra que para cualquier j , entero o semientero, es

$$D^{(j)}(-\mathbb{1}) = D^{(j)}(\exp 2\pi i \frac{\sigma_3}{2}) = \exp 2\pi i J_3 = \pm \mathbb{1} \ ,$$

con el signo $+$ si j es entero y el signo $-$ si j es semientero: las representaciones $D^{(j)}$ con j entero (o sea, las de dimensión impar) dan lugar a representaciones univaluadas de $SO(3)$, mientras que las con j semientero (las de dimensión par) dan representaciones bivaluadas de $SO(3)$.

Notas. 1. Los resultados anteriores fueron obtenidos sin apoyarse en el hecho que toda representación de dimensión finita de $\mathfrak{su}(2)$ viene de una del grupo. Podría parecer que, siempre sin apoyarse en este hecho, y sin la hipótesis de irreducibilidad, desglosando sucesivamente bloques irreducibles, se puede probar que de las relaciones de conmutación (6) se deduce la hermiticidad de los operadores J_k para un conveniente producto escalar. Pero esto no es tan sencillo: después de haber desglosado el primer subespacio irreducible, tal como se hizo más arriba, para seguir adelante hace falta saber que fuera de él hay por lo menos un autovector de J_3 , y eso no es de ningún modo evidente si no se sabe de antemano que J_3 es diagonalizable.

2. El álgebra $\mathfrak{su}(2)$ tiene representaciones irreducibles de dimensión infinita que no se corresponden con representaciones del grupo: si V es un espacio de dimensión infinita con base $\vec{x}_0, \vec{x}_1, ...$ y se definen, para un a arbitrario no nulo, tres operadores J_3, J_+, J_- por $J_3\vec{x}_k = (a+k)\vec{x}_k$, $J_+\vec{x}_k = k(2a-k+1)\vec{x}_{k-1}$, $J_-\vec{x}_k = \vec{x}_{k+1}$, los correspondientes J_1, J_2, J_3 definen una representación irreducible de $\mathfrak{su}(2)$ que no viene de ninguna representación de $SU(2)$ (todas las irreducibles de $SU(2)$ son de dimensión finita).

14 Cálculo del carácter χ^j de $D^{(j)}$

Recordemos que toda matriz u de $SU(2)$ es conjugada con la matriz $\cos t\mathbb{1} + i\text{sen } t\sigma_3$, siendo $t = \theta_2(u)$. Luego $\chi^j(u) = \text{Tr } D^{(j)}(\cos t\mathbb{1} + i\text{sen } t\sigma_3)$, con este valor de t . Por otra parte, $\cos t\mathbb{1} + i\text{sen } t\sigma_3 = \exp it\sigma_3$, luego $D^{(j)}(u_t) = \exp 2itJ_3$ y

$$\chi^j(u) = \text{Tr } D^{(j)}(u) = \text{Tr } D^{(j)}(u_t) = \text{Tr}(\exp 2itJ_3) \qquad (t = \theta_2(u)\ ).$$

Puesto que la forma diagonal de J_3 tiene como elementos diagonales $j, j-1, j-2, ..., -j$, es

$$\text{Tr}(\exp 2itJ_3) = \text{Tr diag}(e^{2itj}, e^{2it(j-1)}, ..., e^{-2itj}) = e^{2itj} + e^{2it(j-1)} + ... + e^{-2itj} = \frac{\text{sen}(2j+1)t}{\text{sen } t}$$

y finalmente

$$\chi^j(u) = \frac{\text{sen}(2j+1)\theta_2(u)}{\text{sen } \theta_2(u)} \tag{14}$$

Notar que los caracteres de las $D^{(j)}$ (y por lo tanto de toda representación de $SU(2)$) son reales, como se podría haber previsto sabiendo que en $SU(2)$ toda matriz es conjugada con su inversa, y que toda representación es (equivalente a una) unitaria.

15 Los J_k como operadores diferenciales

Consideremos la representación (de dimensión infinita) de $SO(3)$ en el espacio de las funciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ dada por

$$R \in SO(3) \quad \mapsto \quad \hat{R}\ , \quad \hat{R}f(\vec{x}) = f(R^{-1}\vec{x})\ .$$

La representación infinitesimal correspondiente a esta representación asocia a los generadores infinitesimales de rotaciones X_1, X_2, X_3 (ver sección 8) los operadores

$$iJ_k = \frac{d}{dt}(\widehat{\exp tX_k})_{|t=0}$$

de modo que, derivando y poniendo $t = 0$ en las expresiones

$$\widehat{\exp tX_1}f(x,y,z) = f(x, y\cos t - z \text{ sen } t, y \text{ sen } t + z\cos t)$$

$$\widehat{\exp tX_2}f(x,y,z) = f(x\cos t + z \text{ sen } t, y, -x \text{ sen } t + z\cos t)$$

$$\widehat{\exp tX_3}f(x,y,z) = f(x\cos t - y \text{ sen } t, x \text{ sen } t + y\cos t, z)$$

se obtiene

$$iJ_1 f = -z\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial z}\ , \quad iJ_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\ , \quad iJ_3 f = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$$

o, si se quiere

$$J_1 = i(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}) \ , \quad J_2 = i(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}) \ , \quad J_3 = i(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}) \ .$$

Los operadores $J_\pm$ resultan ser

$$J_+ = -(x+iy)\frac{\partial}{\partial z} + z(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) \ , \qquad J_- = (x-iy)\frac{\partial}{\partial z} - z(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) \ .$$

Nos proponemos determinar, dentro del espacio de funciones, subespacios de dimensión $n = 2j+1$, soportes de las representaciones irreducibles $D^{(j)}$. Es claro que eso se podrá lograr sólo para j entero, ya que la representación que estamos considerando, $R \mapsto \hat{R}$, es univaluada.

Para cualquier j entero, el espacio $\mathcal{P}^j$ de los polinomios homogéneos de grado j en las tres variables x, y, z es claramente invariante por todos los operadores $\hat{R}$, $R \in SO(3)$. Este espacio (de dimensión $\frac{1}{2}(j+1)(j+2)$) no es –salvo para $j = 1$ – irreducible: el subespacio $\mathcal{H}^j$ de los polinomios armónicos (anulados por el laplaciano) es más chico y, debido a que el laplaciano es invariante por rotaciones, sigue siendo invariante por los $\hat{R}$. Y $\mathcal{H}^j$ sí es un subespacio irreducible. Pues, por una parte su dimensión es $2j+1$ (ver por ej. Smirnof, cap.VI,1 del vol.III, parte 2). Por otra parte el polinomio (armónico) $p_0 = (x+iy)^j \in \mathcal{H}^j$ verifica

$$J_+ p_0 = 0 \ , \qquad J_3 p_0 = j p_0 \ .$$

Por lo tanto, de acuerdo a lo expuesto en la sección 13, p_0 , $J_- p_0$, ..., $J_-^{2j} p_0$ son $2j+1$ elementos independientes, base de un espacio irreducible que por estar contenido en $\mathcal{H}^j$ y ser de igual dimensión coincide con $\mathcal{H}^j$.

16 Una construcción alternativa para las $D^{(j)}$

En lo que sigue, j toma uno de los valores $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}...$, de modo que $2j$ es un entero no negativo cualquiera.

Indiquemos $\tilde{\mathcal{P}}^{2j}$ el espacio de los polinomios homogéneos de grado $2j$ en dos variables z_1, z_2 : $\tilde{\mathcal{P}}^{2j}$ tiene por base los monomios

$$z_1^{2j} \ , \ z_1^{2j-1} z_2 \ , \ ..., z_1 z_2^{2j-1} \ , \ z_2^{2j} \tag{15}$$

y consta de todas las combinaciones lineales (con coeficientes complejos) de ellos. Es pues un espacio vectorial complejo de dimensión $2j+1$ y será el espacio de la representación $D^{(j)}$ a construir. Vamos a numerar los monomios (12) con un índice m que va de $-j$ a $+j$ así:

$$p_m(z_1, z_2) = z_1^{j+m} z_2^{j-m} \qquad m = -j, -j+1, ..., j$$

de modo que m es siempre entero o siempre semientero, según sea j .

Para $u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ en $SU(2)$, y p en $\tilde{\mathcal{P}}^{2j}$, definimos $D^{(j)}(u)p$ como el polinomio

$$D^{(j)}(u)p(z_1, z_2) = p(u^T(z_1, z_2)) = p(\alpha z_1 - \beta^* z_2, \beta z_1 + \alpha^* z_2) \ .$$

(Podría usarse $u^\dagger = u^{-1}$ en lugar de u^T en esta definición; se obtendría una representación equivalente, siendo $A : \tilde{\mathcal{P}}^{2j)} \to \tilde{\mathcal{P}}^{2j}$, $Ap(z_1, z_2) = p(z_2, -z_1)$ una equivalencia entre ambas).

Notar que $D^{(j)}(-\mathbb{1})p(z_1,z_2) = p(-z_1,-z_2) = (-1)^{2j}p(z_1,z_2)$, de modo que $D^{(j)}(-\mathbb{1}) = \pm\mathbb{1}$ según la paridad de $2j$, como sabemos que debe ocurrir si $D^{(j)}$ ha de ser irreducible (sección 9).

Es inmediato verificar que $D^{(j)}$ así definida es efectivamente una representación de $SU(2)$. Para calcular su carácter basta calcular la matriz de $D^{(j)}(u_t)$ siendo u_t la matriz diagonal de autovalores $e^{\pm it}$:

$$D^{(j)}(u_t)p_m(z_1,z_2) = p_m(e^{it}z_1, e^{-it}z_2) = e^{2it}p_m(z_1,z_2)$$

o sea

$$D^{(j)}(u_t)p_m = e^{2it}p_m \ , \quad m = j, j-1, ..., -j$$

lo que muestra que $D^{(j)}(u_t)$ es diagonal en la base elegida, siendo su traza

$$\chi^{(j)}(u_t) = \mathrm{Tr}\ D^{(j)}(u_t) = e^{2itj} + ... + e^{-2itj} = \frac{\mathrm{sen}\ (2j+1)t}{\mathrm{sen}\ t}$$

y por lo tanto, para cualquier matriz $u \in SU(2)$ es

$$\chi^{(j)}(u) = \mathrm{Tr}\ D^{(j)}(u) = e^{2i\theta_2(u)j} + ... + e^{-2i\theta_2(u)j} = \frac{\mathrm{sen}\ (2j+1)\theta_2(u)}{\mathrm{sen}\ \theta_2(u)} \ .$$

De modo que esta $D^{(j)}$ es efectivamente equivalente a la definida en la sección 13. Si uno no quiere apoyarse en los resultados de esa sección, puede probar la irreducibilidad de cada $D^{(j)}$ y el hecho que éstas agotan todas las representaciones irreducibles de $SU(2)$ apoyándose en las afirmaciones A,B,C de la sección 9, como sigue:

En coordenadas esféricas

$$\int_{SU(2)} |\chi^{(j)}(u)|^2 du = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\chi^{(j)}(\phi,\theta_1,\theta_2)|^2 \mathrm{sen}\ \theta_1 \mathrm{sen}^2\theta_2 d\phi d\theta_1 \theta_2 =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\chi^{(j)}(\theta_2)|^2 \mathrm{sen}^2\theta_2 d\theta_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{sen}^2(2j+1)\theta_2 d\theta_2 = 1$$

lo que asegura la irreducibilidad de $D^{(j)}$.

Para ver que no hay otra representación irreducible fuera de éstas, supongamos que χ sea el carácter de una representación irreducible no equivalente a ninguna $D^{(j)}$. Naturalmente en coordenadas esféricas χ , al igual que las $\chi^{(j)}$, sólo depende de la coordenada θ_2 , que es la que caracteriza la clase conjugada, de modo que la integral triple que expresa el producto escalar de χ con $\chi^{(j)}$, y que debe ser igual a cero, se reduce también a una integral simple, en θ_2 . Precisamente, debe ser

$$\int_0^\pi \chi(\theta_2)\mathrm{sen}(2j+1)\theta_2 \mathrm{sen}\ \theta_2 d\theta_2 = 0 \ .$$

Es decir, la función $\chi(\theta_2)\mathrm{sen}\ \theta_2$ sería ortogonal en el intervalo $[0,\pi]$ a $\mathrm{sen}\ n\theta_2$ para todo entero n . Puesto que $\{\mathrm{sen}\ n\theta_2 : n = 1,2,...\}$ es un sistema completo en este intervalo, necesariamente $\chi(\theta_2)\mathrm{sen}\ \theta_2$, y por lo tanto $\chi(\theta_2)$, es la función idénticamente nula, lo que no es posible para el carácter de una representación (que, por lo menos, debe ser distinto de cero en $\mathbb{1}$ y por lo tanto en todo un entorno de $\mathbb{1}$.)

APÉNDICES

A Algunas definiciones precisas

Usamos aquí la palabra *diferenciable*, para una función $F : A \to \mathbb{R}$, (A abierto en $\mathbb{R}^n$), como sinónimo de F *es de clase* C^k , es decir que tiene derivadas continuas hasta el orden k , $k \geq 1$. Y si $F : A \to \mathbb{R}^m$, F diferenciable significa que cada una de sus componentes lo es.

Un *sistema de coordenadas* en el abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable biyectiva Φ del abierto A sobre un abierto $B \subset \mathbb{R}^n$ cuya inversa es también diferenciable. (o sea, Φ es un *difeomorfismo* de A sobre B).

Una *subvariedad regular* de dimensión m de $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ tal que para todo punto $\vec{a} \in M$ existe un sistema de coordenadas $\Phi : A \to B$, $\Phi(\vec{x}) = (X_1(\vec{x}), ..., X_n(\vec{x}))$ definido en un entorno A de $\vec{a}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{A} = A \cap M = \{\vec{x} \in A : X_{m+1}(\vec{x}) = ... = X_n(\vec{x}) = 0\}$

En esta situación, las restricciones a A' de las primeras m componentes de Φ determinan un *sistema de coordenadas* $\tilde{\Phi}$ *para* M en el entorno de $\vec{a}$, $\tilde{\Phi} : \tilde{A} \to \tilde{B}$, $\tilde{\Phi}(\vec{x}) = (X_1(\vec{x}), ..., X_m(\vec{x}))$. (Puede probarse que $\tilde{B} = \tilde{\Phi}(\tilde{A})$ es necesariamente un abierto de $\mathbb{R}^m$).

Nos basta pensar aquí que *variedad diferenciable* significa subvariedad regular de $\mathbb{R}^n$, para algún n , aunque hay una definición más abstracta y algo más general de variedad diferenciable.

Si M , M' son variedades diferenciables una función $F : M \to M'$ se dice diferenciable si, "mirada con sistemas de coordenadas" Φ de M y Φ' de M' es diferenciable, esto es, si es diferenciable la función $\Phi'^{-1} \circ F \circ \Phi$.

B Las propiedades ii) y iii) de la sección 11

Antes de probar estas propiedades de la asignación $iH \mapsto D^0(iH)$ recordemos en primer lugar que dos curvas $\gamma, \gamma' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ se dicen tangentes entre sí en un punto común $\gamma(t_0) = \gamma'(t_0)$ si para ese valor del parámetro coinciden también sus derivadas. Necesitaremos además

> Para dos matrices cuadradas cualesquiera A , B
>
> a) Las curvas $\exp tA . \exp tB$ y $\exp t(A+B)$ son tangentes en $t = 0$.
>
> b) Las curvas $\exp \sqrt{t}A . \exp \sqrt{t}B . (\exp \sqrt{t}A)^{-1} . (\exp \sqrt{t}B)^{-1}$ y $\exp t(A+B)$ son tangentes en $t = 0$.

Demostración. Demostramos sólo b); la demostración de a) es similar y más fácil. Recordando que $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$ se tiene:

$$\exp \sqrt{t}A . \exp \sqrt{t}B . (\exp \sqrt{t}A)^{-1} . (\exp \sqrt{t}B)^{-1} =$$

$$= (\mathbb{1} + \sqrt{t}A + \frac{1}{2}tA^2 + ...)(\mathbb{1} + \sqrt{t}B + \frac{1}{2}tB^2 + ...)(\mathbb{1} - \sqrt{t}A + \frac{1}{2}tA^2 + ...)(\mathbb{1} - \sqrt{t}B + \frac{1}{2}tB^2 + ...) =$$

$$= \mathbb{1} + t[A, B] + \text{términos de orden superior en } t$$

de donde la derivada en $t = 0$ de la primera curva es $[A, B]$, igual a la derivada en $t = 0$ de la segunda.

Recordemos ahora que la representación D se supuso diferenciable, es decir, los coeficientes de la matriz $D(u)$ dependen diferenciablemente de las oordenadas de u . Esta dependencia diferenciable implica, entre otras cosas, que si $\gamma_i : \mathbb{R} \to SU(2)$ $(i = 1, 2)$ son curvas (diferenciables) tangentes en un punto correspondiente a un valor t_0 del parámetro, entonces las curvas transformadas por D , $\gamma_i^* = D \circ \gamma_i$ son también tangentes entre sí.

En particular, puesto que por a) las curvas $\gamma_1(t) = \exp t(iH + iK)$ y $\gamma_2(t) = \exp tiH.\exp tiK$ son tangentes en $t = 0$, también son tangentes entre sí $D(\exp t(iH + iK))$ y $D(\exp tiH.\exp tiK) = D(\exp tiH).D(\exp tiK)$. Por otra parte, por i), es $D(\exp t(iH + iK)) = \exp tD^0(iH + iK)$ y $D(\exp tiH).D(\exp tiK) = (\exp tD^0(iH)).(\exp tD^0(iK))$, es decir $\mathbb{1} + tD^0(iH + iK) + ... = (\mathbb{1} + tD^0(iH) + ...).(\mathbb{1} + tD^0(iK) + ...) = \mathbb{1} + t(D^0(iH) + D^0(iK)) + ...$, de modo que la igualdad de las derivadas en $t = 0$ significa $D^0(iH + iK) = D^0(iH) + D^0(iK)$.

Finalmente $D^0(aiH) = aD^0(iH)$ se obtiene poniendo en i) ta en lugar de t : $\exp taD^0(iH) = D(\exp taiH)$, derivando, y evaluando en $t = 0$. Así queda probada la propiedad ii).

La demostración de iii) es análoga, apoyándose ahora en b):
$D^0([iH, iK]) = \frac{d}{dt}(D(\exp t[iH, iK])_{|t=0} =$
$= \frac{d}{dt}(D(\exp \sqrt{t}iH).D(\exp \sqrt{t}iK).D(\exp(-\sqrt{t}iH)).D(\exp(-\sqrt{t}iK))_{|t=0} =$
$= \frac{d}{dt}(\exp(\sqrt{t}D^0(iH)).\exp(\sqrt{t}D^0(iK)).(\exp(-\sqrt{t}D^0(iH)).\exp(-\sqrt{t}D^0(iK)))_{t=0} =$
$= \frac{d}{dt}(\exp t[D^0(iH), D^0(iK)])_{|t=0} = [D^0(iH), D^0(iK)]$.

C Cada representación infinitesimal de $SU(2)$ viene de una representación del grupo

Recordemos que entre una representación $D : G \to GL(n, \mathbb{C})$ de un grupo de Lie G y su aspecto infinitesimal, representación $D^0 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, vale la relación $D \circ \exp = \exp \circ D^0$. Puesto que la aplicación exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$, restringida a un entorno bastante chico V del 0 en $\mathfrak{g}$, es biyectiva sobre un entorno U del elemento neutro de G , dada D^0 queda unívocamente determinada una aplicación $D = \exp \circ D^0 \circ (\exp)^{-1}$ en el entorno U (entendiendo que $(\exp)^{-1} : U \to V$), de la que se puede probar que verifica $D(g.g') = D(g).D(g')$ mientras $g, g', g.g'$ pertenezcan a U . En general sin embargo no es posible extender tal D a todo el grupo de modo que sea una representación.

Pero si llegara a ocurrir que a la vez la imagen de $\exp : \mathfrak{g} \to G$ es todo G y

$$\exp X = \exp Y \quad \Longrightarrow \quad D^0(X) = D^0(Y) \ , \tag{16}$$

la representación D quedaría definida sin ambigüedades en todo G por la relación

$$D(g) = \exp \circ D^0 \circ (\exp)^{-1}(g) \ . \tag{17}$$

Lo único que vamos a probar aquí es que (16) es válida si D^0 es una representación irreducible de $\mathfrak{su}(2)$; como ya sabemos que $\exp : \mathfrak{su}(2) \to SU(2)$ es sobreyectiva (recordar (3) de la sección 8.2), sabremos por lo menos que dada cualquier representación irreducible $D^0 : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ del álgebra de Lie de $SU(2)$ existe una única $D : SU(2) \to GL(n, \mathbb{C})$ que verifica $D \circ \exp = \exp \circ D^0$, aunque no probaremos que es efectivamente una representación, lo que requeriría un estudio más detallado.

Para eso, veamos en primer lugar en qué condiciones ocurre que dos elementos de $\mathfrak{su}(2)$ tengan igual imagen por la exponencial. Si $\exp iH = \exp iK$ las imágenes de los grupos monoparamétricos determinados por iH , iK tienen un punto común. Recordando que estas imágenes son los

meridianos por $\mathbb{1}$ (sección 8.2, fórmula (3)) y por lo tanto si son distintas sólo se cortan en los puntos $\pm\mathbb{1}$, vemos que $\exp iH = \exp iK$ sólo puede ocurrir: a) si $\exp iH = \exp iK = \pm\mathbb{1}$ o, en caso contrario, b) si los grupos monoparamétricos sólo difieren en parametrización, es decir, $iK = ciH$.
En el caso a), apoyándose en (3), se ve que deben ser $||iH||$, $||iK||$ múltiplos enteros de π , de igual paridad (par si $\exp iH = \exp iK = +\mathbb{1}$, impar si $\exp iH = \exp iK = -\mathbb{1}$). En el caso b), $[iH, iK] = 0$ y por lo tanto $\mathbb{1} = (\exp iH)(\exp iK)^{-1} = \exp(iH - iK)$, de modo que, por a), $||i(H-K)|| = 2k\pi$ con k entero. Resumiendo:

> los elementos de $\mathfrak{su}(2)$ cuya exponencial es $\mathbb{1}$ son, además del 0, los de las superficies esféricas centradas en 0 y de radio un múltiplo par de π , mientras que los puntos de las superficies esféricas de radio un múltiplo impar de π son los que por la aplicación exponencial van a parar a $-\mathbb{1}$,
>
> si $\exp iH = \exp iK \neq \pm\mathbb{1}$, entonces $iK = iH + 2k\pi iN$, con k entero, iN de norma 1 y proporcional a iH , iK .

En segundo lugar, puede verse que si iN_1, iN_2, iN_3 es una base ortonormal de $\mathfrak{su}(2)$ convenientemente ordenada, las relaciones de conmutación entre las N_k son las mismas que las de las tres matrices de Pauli, lo que permite, en las construcciones de la sección 13, hacer jugar el papel de $i\sigma_3$ a cualquier matriz iN de norma 1 en $\mathfrak{su}(2)$, y ver así que dada una representación irreducible $D^0 : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ hay una base de $\mathbb{C}^n$ en la cual $iJ = D^0(iN)$ (donde iN es cualquier matriz prefijada de norma 1 en $\mathfrak{su}(2)$) es diagonal, con $i(n-1), i(n-2), ..., -i(n-1)$ sobre la diagonal principal y por lo tanto $\exp \pi iJ = \exp \pi D^0(iN) = \pm\mathbb{1}$, según la paridad de n .

Veamos ahora que vale (16). Sean pues iH , iK dos elementos de $\mathfrak{su}(2)$ de igual exponencial.
En el caso a), $iH = k\pi N$, $iK = ik'N'$, con k, k' enteros de igual paridad, y N , N' de norma 1; por lo tanto $\exp D^0(iH) = \exp D^0(iK) = \pm\mathbb{1}$, según la paridad de k y k' .
En el caso b),
$\exp D^0(iK) = \exp D^0(iH + 2k\pi iN) = \exp(D^0(iH) + D^0(2k\pi iN)) = \exp D^0(iH). \exp D^0(2k\pi iN) =$
$= \exp D^0(iH)$,
ya que $D^0(iH)$ y $D^0(iN)$, como iH e iN , son proporcionales y conmutan, mientras que $\exp D^0(2k\pi iN) = \mathbb{1}$.

D Los grupos dobles

Sea G un subgrupo de $SO(3)$. El *grupo doble*, $\tilde{G}$, de G es por definición el subgrupo de $SU(2)$ preimagen de G por el homomorfismo $h : SU(2) \to SO(3)$. Más generalmente, se puede hablar del grupo doble $\tilde{G}$ de un subgrupo G de $O(3)$. En este caso $\tilde{G}$ puede definirse así: recordemos que $O(3)$ es el producto directo de $SO(3)$ con el grupo de dos elementos $\{\mathbb{1}, I\}$, (donde I es la inversión en $\mathbb{R}^3$). Definimos entonces $\tilde{h} : SU(2) \times \{\mathbb{1}, I\} \to O(3)$ por:

$$\tilde{h}(u, \epsilon) = \epsilon . h(u) \qquad (\epsilon = \mathbb{1}\ ,\ I)\ .$$

Es fácil ver que $\tilde{h}$ así definido es un homomorfismo de $SU(2) \times \{\mathbb{1}, I\}$ sobre $O(3)$ que, como h , es "2 a 1" ($\tilde{h}(u, \epsilon) = \tilde{h}(u', \epsilon')$ si y sólo si $(u', \epsilon') = \pm(u, \epsilon)$).

No es verdad que toda representación proyectiva de un subgrupo G de $O(3)$ pueda "reducirse" a una bivaluada (o sea, a una de $\tilde{G}$). Sin embargo aparentemente desde el punto de vista físico sólo interesan estas últimas. (v. Landau-Lifschitz, Mecánica cuántica, sección 98, nota al pie)

Contents