La formulación Lagrangiana de las ecuaciones relativistas es la base de la construcción usual de modelos de *teorías cuánticas de campos* (QFT). Del Lagrangiano que describe la teoría clásica pueden leerse ciertas simetrías que se preservarán al cuantizar. Además de la simetría ante transformaciones del grupo de Poincaré, los términos típicos de los Lagrangianos que estudiaremos presentan *simetrías internas*, es decir, simetrías ante cambios en los campos que no afectan a sus argumentos (el punto del espacio-tiempo del cual dependen). Las cantidades conservadas que se deducen de la simetría del Lagrangiano tendrán un rol importante a nivel cuántico como generadores de simetrías.

---

22 Considere la densidad Lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2$, con ϕ real.

(a) Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange.

(b) Considere ahora la densidad Lagrangiana $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*$, donde ϕ ahora es un campo complejo. Note que ahora no está el factor $\frac{1}{2}$ en el término cinético y en el de masa. Escribiendo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, con ϕ_1 y ϕ_2 reales, obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange para ϕ_1 y ϕ_2 y muestre que ambos cumplen la ecuación de Klein-Gordon.

(c) Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange considerando ϕ y ϕ^* como variables independientes y verifique que obtiene las mismas ecuaciones de movimiento que en el inciso anterior.

✓ **Resuelto parcialmente en la sección 3.1 de las notas de la práctica.**

23 Escriba la forma más general posible del Lagrangiano invariante de Lorentz para un campo cuadrivectorial con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo. ¿A qué se reduce este Lagrangiano en el caso en que además se requiera invariancia ante transformaciones de gauge? Derive las ecuaciones de movimiento y compare con las de Maxwell.

✓ **Resuelto en la sección 3.1 de las notas de la práctica.**

24 Considere la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -i\psi\partial_t\psi^* - \frac{1}{2m}\nabla\psi^*.\nabla\psi - V\psi\psi^*$$

para un campo ψ con V una función del espacio. Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange para ψ y muestre que es la ecuación de Schrödinger, siendo V el potencial.

25 Considere la densidad Lagrangiana del campo escalar complejo del ejercicio 21.

(a) Halle las corrientes de Noether asociadas a la invariancia ante traslaciones espaciales y temporales.

(b) Halle la expresión de la energía y el momento como integrales de ϕ y sus derivadas.

(c) Escribiendo una solución genérica de la ecuación de Klein-Gordon en términos de ondas planas, reescriba las expresiones anteriores como integrales en los momentos espaciales.

(d) Muestre que la energía es definida positiva para cualquier solución de la ecuación de Klein-Gordon, independientemente del signo de la frecuencia.

✓ **Resuelto en la sección 3.2.1 de las notas de la práctica.**

26 Considere la densidad Lagrangiana $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^* - V(\phi\phi^*)$, siendo V algún polinomio (acotado por debajo).

(a) Halle la modificación que sufren las expresiones de la energía y momento del ejercicio anterior.

(b) Encuentre la corriente y carga de Noether asociada a la simetría $\phi \to e^{i\alpha}\phi$, siendo α una constante real.

27 Considere ahora el Lagrangiano de un campo de Dirac con masa m.

(a) Derive la ecuación de Dirac como ecuación de Euler-Lagrange de este Lagrangiano.

(b) Halle la expresión de la energía y observe su carácter definido positivo o negativo en el subespacio de soluciones con frecuencia positiva y negativa respectivamente.

✓ **Resuelto en la sección 3.1 de las notas de la práctica.**

28 Halle la expresión de la carga conservada asociada a la invariancia ante rotaciones en el caso del Lagrangiano de Klein-Gordon y Dirac. En el último caso distinga la contribución a la carga conservada de la parte orbital e intrínseca (presencia o ausencia respectivamente de derivadas espaciales de los campos).

✓ **Resuelto parcialmente en la sección 3.2.2 de las notas de la práctica.**

29 Considere la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$$

siendo $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

(a) Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange. Muestre que para $m \neq 0$, las ecuaciones de movimiento implican $\partial_\mu A^\mu = 0$.

(b) Halle la expresión de la energía. Para el caso $m = 0$ compare con la expresión conocida en términos del campo eléctrico y magnético (observe la relevancia del signo en el término de masa para el carácter definido positivo de la energía).

(c) ¿Por qué se dice que el campo de Proca ($m \neq 0$) tiene tres grados de libertad mientras que el de Maxwell ($m = 0$) dos?

✓ **Discutido en el video de la práctica subido el 18/05/2020.**

30 * La acción de Einstein-Hilbert está dada por

$$S = \kappa \int d^4x \sqrt{-g}\, R\,,$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo (curvo), R es el escalar de curvatura y κ es una constante. En la aproximación de campo gravitatorio débil, la métrica puede escribirse como una perturbación pequeña de la métrica plana η

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)\,.$$

La perturbación $h_{\mu\nu}(x)$ es un tensor simétrico de rango dos. En esta aproximación, la acción de Einstein-Hilbert se convierte en una acción en espacio plano

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\sigma h_{\mu\nu}\, \partial^\sigma h^{\mu\nu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}\, \partial^\nu h^{\mu\sigma} + \partial_\sigma h^{\mu\sigma} \partial_\mu h - \frac{1}{2}\partial_\mu h\, \partial^\mu h \right)\,,$$

con $h = h^\mu_\mu$. Derivar las ecuaciones de movimiento para $h_{\mu\nu}$. Estas son las *ecuaciones de Einstein linealizadas*. Mostrar que la teoría linealizada es invariante ante

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu\,,$$

donde $\Lambda_\mu(x)$ es un campo cuadrivectorial arbitrario.

✓ **Ejercicio 5.9 del libro de Radovanovic.**