Al agregar a los Lagrangianos considerados anteriormente términos de orden superior al cuadrático (términos de interacción), las ecuaciones de movimiento resultan ser no lineales y por ende muchos de los resultados aplicables a la cuantización de los campos libres no aplican. Sin embargo, hay algunas características observadas en las teorías libres que uno espera que subsistan aún en presencia de interacciones. Esto se puede utilizar para enunciar una serie de axiomas que definen lo que es una teoría de campos. En esta guía veremos algunos resultados importantes que pueden probarse usando estos axiomas. Bajo algunas hipótesis adicionales a dichos axiomas, puede garantizarse el fenómeno no intuitivo de que la interacción es *apagada asintóticamente* para $t \to \pm\infty$ en el sentido de que existen estados (llamados asintóticos) que evolucionan (en el picture de Schrödinger) como los de la teoría libre. Esto permite plantear la matriz de Scattering entre estados de la teoría libre. En esta guía veremos también algunos de estos aspectos que resultarán útiles más adelante cuando estudiemos perturbaciones.

Ejemplos de modelos interactuantes

$\boxed{54}$ Considere el caso simple e ilustrativo del Lagrangiano que resulta de agregar un término $-\frac{\lambda_n}{n!}\phi^n$ (con $\lambda_n > 0$ y $n \geq 3$) al Lagrangiano de Klein-Gordon para un campo real.

(a) Halle la ecuación de movimiento y vea que ahora una onda plana no es solución.

(b) ¿Para qué valor de n la constante de acoplamiento es adimensional?

(c) Indicar para qué valores de n el modelo es renormalizable.

✓ Resuelto en la sección 5 de las notas de la práctica.

$\boxed{55}$ La electrodinámica cuántica (QED) es una QFT que describe la interacción electromagnética entre fermiones cargados y los fotones (las partículas portadoras de la fuerza electromagnética). El Lagrangiano de QED está dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi\,, \tag{2}$$

donde $D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$.

(a) Hallar el término de interacción de este modelo. ¿Qué dimensión tiene la constante de acoplamiento?

(b) Hallar las ecuaciones de movimiento e interpretar el resultado.

Axiomas de Wightman

$\boxed{56}$ Revisar el modelo del campo escalar real libre y analizar cuáles de los axiomas de Wightman hemos visto que se cumplen en ese caso.

$\boxed{57}$ * **Teorema de Espín-Estadística.**
La evidencia experimental indica que los sistemas con espín entero obedecen la estadística de Bose-Einstein, y los de espín semientero la de Fermi-Dirac. El teorema de espín-estadística establece que en una QFT que cumple los axiomas de Wightman los campos de espín entero (semientero) no pueden tener un anticonmutador (conmutador) que se anule para separaciones espaciales. Si le interesa puede revisar la demostración de este teorema (puede ver por ejemplo el libro "PCT, Spin and Statistics, and All That" de Wightman y Streater.

58 * **Teorema CPT.**

A partir de la invariancia ante transformaciones de (la parte conectada continuamente conectada con la identidad del grupo de) Poincaré, se puede ver que toda teoría cuántica de campos relativista (en el sentido de Wightman) en $3+1$ dimensiones tiene de yapa una simetría discreta denominada CPT que consiste en la operación simultánea de cambiar partícula por antipartícula (C), invertir la dirección del tiempo (T) y hacer una reflexión espacial (P) (estas operaciones se pueden definir sin hacer alusión a la interpretación de partícula). Si le interesa puede revisar la demostración de esta propiedad, que se conoce como el Teorema CPT (puede ver por ejemplo la demostración para el campo escalar neutro en el libro "PCT, Spin and Statistics, and All That" de Wightman y Streater.

QED en particular es simétrica ante cada operación por separado, pero en el modelo estándar por ejemplo ninguna de estas operaciones por separado es simetría.

59 **Representación de Källen-Lehmann.**

Para un modelo interactuante, la función de dos puntos ya no tiene la forma hallada para el caso del campo libre. Sin embargo, bajo ciertas hipótesis sobre el espectro de la teoría cuántica, puede verse que tendrá la siguiente representación espectral

$$W(x-y) \equiv \langle 0| \phi(x)\phi(y) |0\rangle = \int_0^\infty \rho(s) W_{F,\sqrt{s}}(x-y) ds$$

siendo $W_{F,\sqrt{s}}(x-y)$ la función de dos puntos del campo libre de masa $\sqrt{s}$, y ρ una función de s (que satisfará algunas propiedades generales). Demostrar esta relación enfocándose en el caso de un modelo interactuante de campos (arbitrario) del campo escalar real.

✓ **Resuelto en la sección 5.1.2 de las notas de la práctica.**

60 * **Existencia de Yang-Mills y gap de masa.**

Demostrar que para cualquier grupo de gauge simple y compacto, existe una teoría cuántica de Yang-Mills no trivial sobre $\mathbb{R}^4$ con un gap de masa $\Delta > 0$. La existencia incluye establecer propiedades axiomáticas al menos tan fuertes como las de Wightman. Si demuestra este ejercicio aprueba automáticamente la materia y se lleva un millón de dólares que entrega el Instituto Clay de Matemáticas (`https://www.claymath.org/millennium-problems`).

Matriz de scattering.

61 Para un sistema con Hamiltoniano $\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}^{(1)}$, donde $\hat{H}^{(0)}$ es la parte libre, demostrar que

$$\hat{U}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_n T\left(\hat{H}^{(1)}(t_1) \ldots \hat{H}^{(1)}(t_n)\right),$$

siendo $\hat{U}(t, t_0)$ el operador de Dyson y T el ordenamiento temporal. Dar una expresión análoga para la matriz de scattering S.

62 Para un campo escalar complejo libre calcular $\langle 0| T\{\phi(x)^*\phi(y)\} |0\rangle$ pero utilizando la definición de ordenamiento temporal para fermiones y mostrar que la expresión no es invariante de Lorentz. Esto es un indicio de que la matriz S para partículas de espín entero es invariante de Lorentz si y sólo sí las mismas son bosones.

✓ **Resuelto en la sección 12.4.1 del libro de Schwartz.**