Las integrales de camino, desarrolladas por Richard Feynman en la década de 1940, son una herramienta poderosa en la física teórica que se utiliza para calcular las probabilidades de transición entre estados cuánticos. En la mecánica cuántica no relativista, las integrales de camino se utilizan para calcular la evolución temporal de un sistema cuántico. En la teoría de campos, sirven para hallar las amplitudes de probabilidad de los procesos que involucran interacciones entre partículas. En esta guía veremos algunos aspectos básicos y aplicaciones de las integrales de camino en mecánica cuántica no relativista y en teoría de campos. En particular, utilizaremos el método de integrales de camino para estudiar aspectos perturbativos de ciertos modelos y esto nos llevará naturalmente a la introducción de las reglas de Feynman.

Mecánica cuántica no relativista

63 Obtener una representación mediante una integral de camino para la amplitud de transición $\langle p'', t''| \, p', t' \rangle$, correspondiente a una partícula en una dimensión espacial, tal que su momento a los tiempos t' y t'' es p' y p'', respectivamente.

✓ El resultado es la ecuación 2.283 del libro de Kleinert. Alternativamente, puede llegar a otra expresión equivalente a esta repitiendo la derivación hecha en clases pero utilizando los autoestados de $\hat{p}$ en lugar de los de $\hat{x}$.

64 Considere un Lagrangiano de la forma

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + b(t) x\dot{x} + c(t)x^2 + d(t)\dot{x} + e(t)x + f(t) \, .$$

Definiendo el propagador

$$K(b, a) = \langle q_b, \, t_b | q_a, \, t_a \rangle \theta(t_b - t_a) \, ,$$

demuestre que

$$K(b, a) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{cl.}}[b,a]} F(t_b, t_a) \, ,$$

donde $S_{\text{cl.}}[b, a]$ es la acción evaluada en la trayectoria clásica.

✓ Resuelto en la sección 7.5 de las notas de la práctica.

65 Evaluar la función F del problema anterior para el caso de un oscilador armónico.

✓ Resuelto en la sección 7.5 de las notas de la práctica.

66 Calcular la función de partición de un oscilador armónico utilizando integrales de camino.

✓ Resuelto en la sección 7.6 de las notas de la práctica.

67 Considerar una partícula no relativista cuyo Hamiltoniano es de la forma

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \lambda V(\hat{q}) \, , \tag{3}$$

donde λ es una constante. Partiendo de la serie perturbativa (en λ) para la amplitud de transición $\langle q', t' | \, q, t \rangle$, muestre que $K(q', t' | \, q, t) = \theta(t' - t) \langle q', t' | \, q, t \rangle$ es la función de Green para la ecuación de Schrödinger correspondiente.

✓ La serie perturbativa fue derivada en clases y el resultado es la ecuación (1219) de las notas de la práctica. Para llegar al resultado de este problema se le sugiere pasar al miembro izquierdo de esa ecuación el término entre corchetes y aplicar a ambos lados el operador de Schrödinger.

68 El objetivo de este ejercicio es hallar la amplitud de persistencia del vacío $W[J]$ de un oscilador armónico con Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \,.$$

Para ello:

(a) Probar que para hallar $W[J]$ alcanza con encontrar la solución clásica $q_{\mathrm{Cl.}}$ para el sistema con Lagrangiano $L + Jq$ (notar que este Lagrangiano sigue siendo cuadrático y por lo tanto ya conocemos la expresión para la amplitud de transición).

(b) Expresar $q_{\mathrm{Cl.}} = q^{(0)}_{\mathrm{Cl.}} + \int dt' G(t,t')J(t')$, siendo $q_{\mathrm{Cl.}^{(0)}}$ la solución clásica para el sistema con Lagrangiano L, y hallar la ecuación diferencial y condiciones de contorno para G.

(c) Hallar explícitamente G y utilizar el resultado para calcular $W[J]/W[0]$.

✓ La resolución de este ejercicio fue hecha en clases. Como la derivación es algo complicada les recomendamos que se dediquen a entender la derivación de forma esquemática. Lo más importante para este curso es el resultado de este ejercicio y no tanto la forma a la cual llegamos a él.

69 * Considere una partícula que puede moverse libremente sobre un anillo. Calcule el propagador $K(b,a)$ utilizando el formalismo de Schrödinger. Realice también el cálculo usando integrales funcionales. *Ayuda: Considere trayectorias que van desde la posición inicial a la final dando un número arbitrario de vueltas).*

✓ Resuelto en la sección 6.1 del libro de Kleinert. En ese mismo capítulo puede encontrar otros ejemplos de integrales de camino para sistemas con vínculos topológicos.

70 Considere el Lagrangiano $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + L_{\mathrm{int}}$ con

$$L_{\mathrm{int}} = -\frac{\lambda_3}{3!}q^3 - \frac{\lambda_4}{4!}q^4 \,.$$

(a) Deducir las reglas de Feynman para el cálculo perturbativo del funcional generatriz $W[J]/W[0]$ en potencias de λ_3 y λ_4.

(b) Obtener expresiones para las primeras correcciones no triviales a la función de dos puntos $\langle 0|T\,(q(t_1)q(t_2)|0\rangle$.

(c) Calcular la corrección al valor de la energía del nivel fundamental.

Teoría de campos

__Observación:__ distintos libros/apuntes suelen intercambiar el significado de W y Z, por lo que les recomendamos revisar las definiciones. Para esta práctica seguimos la convención del libro de Greiner.

71 Utilizar integrales de camino para expresar el funcional generatriz $W[J]$ (fijamos $W[0] = 1$ a partir de ahora) para un campo escalar real libre. Utilizar $W[J]$ para calcular la función de Green de dos puntos.

✓ Ver la sección 12.3 del libro de Greiner.

72 Para un campo escalar real libre, utilizar el funcional generatriz para probar que la función

$$\langle 0| T\left\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\right\}|0\rangle$$

se puede escribir en términos de productos y sumas de funciones de dos puntos. Esto es un ejemplo concreto del denominado Teorema de Wick.

✓ **Ver la sección 12.4, ecuación (12.82) del libro de Greiner.**

73 Se define $Z[J]$ a través de $W[J] = e^{iZ[J]}$. Hallar $Z[J]$ para el modelo del campo escalar real libre y probar que las *funciones de Green conectadas*,

$$G_C^{(n)}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{i^{n-1}} \left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)...\delta J(x_n)}\right|_{J=0},$$

son nulas para $n > 2$.

✓ **Resuelto al final de la sección 12.4 del libro de Greiner.**

74 Derivar las reglas de Feynman para las funciones de Green del modelo $\lambda\phi^4$.

✓ **Ver el ejemplo 12.4, página 392 del libro de Greiner.**

75 Calcular explícitamente la función de Green de cuatro puntos del modelo $\lambda\phi^4$ a primer orden en λ. Verificar el resultado utilizando las reglas de Feynman para el modelo.

✓ **La construcción de los diagramas relevantes se encuentra en el ejemplo 12.4, ecuación (24), página 397 del libro de Greiner.**

76 Considere un sistema descripto por dos campos escalares reales ϕ y σ con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}\mu^2\sigma^2 - \lambda\phi^2\sigma\,. \tag{4}$$

Derivar las reglas de Feynman para las funciones de Green.