> Gentlemen! The views of space and time which I want to present to you arose from the domain of experimental physics, and therein lies their strength. Their tendency is radical. From now onwards space by itself and time by itself will recede completely to become mere shadows and only a type of union of the two will still stand independently on its own.
>
> *Hermann Minkowski, Space and Time (1908)*

La teoría cuántica de campos que estudiaremos es una teoría invariante ante el grupo de simetrías relativistas. Este grupo es el de Poincaré, el cual contiene al grupo de Lorentz. Gracias al aporte de Minkowski, este grupo puede pensarse como el grupo de transformaciones que deja invariante a una métrica pseudoeuclídea que lleva su nombre. En esta guía veremos aspectos de este grupo y su álgebra, comenzando con su análogo euclídeo. Veremos cómo aparecen los espinores como representación del grupo de Lorentz y cómo las ecuaciones de onda relativistas manifiestan la simetría de Poincaré. Todo el análisis de esta guía es estrictamente clásico, por lo que no debe pensarse a ninguno de los campos de las ecuaciones relativistas como funciones de onda en una teoría cuántica.

Preliminares: grupo Euclídeo

$\boxed{1}$ Considere las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^D$ que dejan invariante la forma cuadrática $x^T x$, siendo $x \in \mathbb{R}^D$.

(a) Muestre que la matriz M que implementa la transformación lineal debe cumplir $M^T M = \mathbb{I}$, y como consecuencia de esto $|\det(M)| = 1$. El grupo de matrices que cumple $M^T M = \mathbb{I}$ se conoce como grupo ortogonal y se lo denota como $O(D)$.

(b) Al subgrupo de matrices de $O(D)$ con determinante $+1$ se lo denomina $SO(D)$ ("S" por "special"). Argumente que para el subgrupo de matrices de $O(D)$ conectadas continuamente con la identidad el determinante debe ser $+1$. (Ocurre que la condición determinante $+1$ garantiza que la matriz se halla en el subgrupo conectado con la identidad, de modo que $SO(D)$ tiene una sola componente conexa que incluye a la identidad).

$\boxed{2}$ El grupo $SU(2)$ está formado por las matrices de 2×2 con coeficientes complejos que son unitarias y tienen determinante 1. Mostrar que los elementos de este grupo se pueden asociar a los puntos de la esfera S^3.

$\boxed{3}$ Una matriz cualquiera M del grupo $SO(D)$ puede escribirse como la exponencial de otra: $M = e^A$. El conjunto de matrices que aparecen en la exponencial forman un álgebra, tomando el corchete como el conmutador entre matrices.

(a) Muestre que esta matriz A debe ser antisimétrica.

(b) Definimos la *dimensión* de un grupo de Lie como la dimensión del espacio vectorial de su álgebra asociada. A partir del inciso anterior, muestre que la dimensión de $SO(D)$ es $D(D-1)/2$.

(c) Los generadores del espacio vectorial de matrices antisimétricas (cuya exponencial genera el grupo) pueden escribirse convenientemente en términos de una colección de matrices Σ_{IJ} (I, $J = 1$, ..., D), siendo por definición $\Sigma_{IJ} = -\Sigma_{JI}$ (note que aquí I y J no son las componentes de la matriz sino un doble índice que etiqueta cada matriz). En términos de estas, la matriz M de $SO(D)$ puede escribirse como:

$$M = e^{\frac{i}{2}\omega^{IJ}\Sigma_{IJ}} ,$$

siendo ω^{IJ} parámetros reales sujetos a la relación $\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$. Para el caso $D = 3$, halle un conjunto de matrices Σ_{IJ} y parámetros ω^{IJ} en términos de los generadores y ángulos usuales de rotación que expresan la rotación en torno a un eje. Relacione el índice IJ con el plano de rotación.

$\boxed{4}$ De las propiedades del grupo $SO(D)$ se puede ver que las matrices Σ_{IJ} satisfacen:

$$[\Sigma_{IJ}, \Sigma_{MN}] = i\left(\delta_{IN}\Sigma_{JM} + \delta_{JM}\Sigma_{IN} - \delta_{IM}\Sigma_{JN} - \delta_{JN}\Sigma_{IM}\right)$$

Verifique en el caso $D = 3$ estas relaciones. Verifique también la antisimetría que debe existir al permutar los índices I, J, M, N.

$\boxed{5}$ Considere ahora una transformación que involucre traslaciones en $\mathbb{R}^D$. Denotando por (M, a) a la transformación $X \to MX + a$, siendo a un vector y M una matriz de rotación:

(a) Halle la ley de composición de dos transformaciones consecutivas $(M_2, a_2) \circ (M_1, a_1)$. Es decir, exprese el resultado de la composición de estas dos como una nueva transformación (M_3, a_3)

(b) Considerando $(M_2, a_2) \circ (M_1, a_1) - (M_1, a_1) \circ (M_2, a_2)$ a primer orden en los parámetros de rotación y traslación, halle las reglas de conmutación entre los generadores de la traslación y rotación.

Una traslación no deja invariante la forma $X^T X$ pero sí la distancia euclídea entre dos puntos: $(X - Y)^T(X - Y)$. Es por eso que al grupo de rotaciones más traslaciones se lo denomina *grupo euclídeo*.

$\boxed{6}$ Las representaciones de $SU(2)$ (que localmente es equivalente a $SO(3)$) se pueden construir a partir de representaciones de otro álgebra, el *álgebra de Clifford*

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}1_{N\times N} ,$$

con $i, j = 1, 2, 3$, siendo γ^i matrices de dimensión $N \times N$. Para el caso $N = 2$ existe una elección única, a menos de cambios de base, para matrices de 2×2, que corresponde a $\gamma_i = \sigma_i$, donde las σ_i ($i = 1$, 2, 3) son las matrices de Pauli.

(a) Muestre que $\Sigma_{ij} \equiv \frac{i}{4}[\sigma_i, \sigma_j]$ son generadores del álgebra $su(2) \approx so(3)$. A esa representación del grupo $SU(2)$ por medio matrices de 2×2 se la denomina *espinorial*.

(b) Un espinor es una representación de $SU(2)$ dada por una 2-upla $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$, en la que la acción del grupo $SU(2)$ es

$$\xi \to e^{i\frac{1}{2}\omega_{ij}\Sigma_{ij}}\xi$$

Verifique que esa es la ley de transformación de espinores que conoce.

Grupo y álgebra de Poincaré

7 Considere una transformación dada por una matriz Λ

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \,,$$

que deje invariante la forma $x^T \eta x$, siendo x la coordenada de un punto del espacio-tiempo 4-dimensional y

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

En componentes, $x^T \eta x = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Al grupo de transformaciones lineales que deja esa forma cuadrática invariante se lo llama *grupo de Lorentz*.

Halle la condición análoga a la del grupo de rotaciones (Ejercicio 1.a) para la matriz Λ. Muestre que la matriz λ definida por $\Lambda = e^\lambda$ satisface $\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}$, siendo $\lambda_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\rho}\lambda^\rho_\nu$. Escriba explícitamente las matrices de la base del álgebra.

8 Para el caso del grupo de Lorentz, la condición determinante igual a 1 no es suficiente para caracterizar la parte conectada continuamente con la identidad. Busque en la literatura cuáles son las 4 componentes conexas del grupo $SO(3,1)$ y cuál de estas esta conectada continuamente con la identidad.

9 Muestre que las relaciones entre los generadores $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ que definen el álgebra de Lorentz

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho})$$

pueden re-escribirse como:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k$$

con $J_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}$ y $K_i \equiv M_{i0}$.

10 Definiendo $\bar{A} = \frac{1}{2}(\bar{J} - i\bar{K})$ y $\bar{B} = \frac{1}{2}(\bar{J} + i\bar{K})$ (siendo J_i y K_i los generadores de las rotaciones y boost respectivamente) muestre que el álgebra de Lorentz es suma directa de dos $su(2)$. De aquí se desprende que las representaciones del grupo de Lorentz se etiquetan por el par de semienteros (j_1, j_2), que corresponden al espín de la representación de cada $su(2)$.

11 El grupo de Poincaré es el análogo lorentziano al grupo Euclídeo definido en el Ejercicio 5. Hallar las relaciones que definen el álgebra de Poincaré evaluando la diferencia al realizar las transformaciones sucesivas (Λ_1, a_1) y (Λ_2, a_2) sobre un cuadrivector permutando el orden entre ellas. La notación (Λ, a) indica la transformación $x^\mu \to \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$.

12 Operadores de Casimir del grupo de Poincaré.

(a) Mostrar que los operadores $P^2 = P^\mu P_\mu$ y $W^2 = W^\mu W_\mu$, siendo $W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma}$ el vector de Pauli-Lubanski, conmutan con todos los generadores del álgebra.

(b) Muestre que, para una representación no masiva (es decir, con $P^2 = m^2 = 0$) en la que $P_i \neq 0$, W^μ es proporcional a P^μ. La constante de proporcionalidad se conoce como *helicidad*.

Ecuaciones de onda relativistas

$\boxed{13}$ Considere la ecuación de (Oskar)Klein - (Walter)Gordon:

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\phi = 0$$

siendo ϕ una función de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{C}$. ϕ puede considerarse como una representación del grupo de Lorentz del tipo $(0,0)$ (ver Ejercicio 10).

(a) Muestre que si ϕ es solución, también lo es $\phi\circ(\Lambda, a)$ (invariancia de Poincaré de la ecuación).

(b) Verifique que esta ecuación es invariante ante el grupo discreto de transformaciones C y P y T, siendo C la operación de conjugar, P la composición con inversión espacial y T la composición con inversión temporal.

$\boxed{14}$ Considere la ecuación de Klein-Gordon para un campo complejo.

(a) Muestre que la cantidad (llamada *corriente*, por su interpretación como corriente conservada que se verá en la guía siguiente) $j_\mu \equiv -\frac{i}{2}(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*)$ satisface la ecuación de continuidad $\partial_u j^u = 0$ si φ satisface la ecuación de Klein-Gordon.

(b) Evalúe la corriente para las soluciones de frecuencia positiva y negativa $\varphi_\pm(x,t) = e^{\mp ikx}$, siendo $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

(c) Muestre que la componente j_0 no es definida positiva (o negativa) en el espacio de soluciones generado por soluciones de frecuencia positiva y negativa.

$\boxed{15}$ Considere ahora la ecuación de Dirac:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0$$

siendo Ψ una función del espacio-tiempo en $\mathbb{C}^4$. Las γ^μ son matrices que cumplen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}1_{4\times 4}$. Por cada solución Ψ de la ecuación de Dirac, es posible generarse otra solución $\tilde{\Psi}$, definida por $\tilde{\Psi}(x) \equiv S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)$, con $S(\Lambda)$ una matriz asociada a la transformación de Lorentz.

(a) Muestre que S debe cumplir: $S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$.

(b) Compruebe que $S \equiv e^{\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$, siendo $\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, satisface la condición previa a primer orden en el parámetro $\omega^{\mu\nu}$ de la transformación de Lorentz Λ.

$\boxed{16}$ Verifique que las matrices Σ satisfacen el álgebra de Lorentz. (Ayuda: use resultados del ejercicio anterior sobre el conmutador $[\gamma_\mu, \Sigma_{\nu\rho}]$ y utilice la identidad de Jacobi).

$\boxed{17}$ Existen distintas elecciones de matrices γ que satisfacen las relaciones $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}1_{4\times 4}$ (*algebra de Clifford*). En dimensión 4 (y en D par en general) todas las distintas elecciones están relacionadas por un cambio de base. Es decir: si se encuentran dos conjuntos de matrices $\{\gamma^\mu\}$ y $\{\tilde{\gamma}^\mu\}$ que satisfacen el algebra de Clifford, existirá una matriz invertible M tal que:

$$\tilde{\gamma}^\mu = M\gamma^\mu M^{-1}\,.$$

Gracias a esta unicidad, en $D = 4$ tenemos una sola ecuación de Dirac. Como ejemplo de estas distintas elecciones, considere la base *estandar* (o *de Dirac*):

$$\gamma^0_{estandar} = \begin{bmatrix} 1_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2\times 2} \end{bmatrix} \qquad \gamma^i_{estandar} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$

y la denominada *quiral* (o *de Weyl*):

$$\gamma^0_{quiral} = \begin{bmatrix} 0 & 1_{2\times 2} \\ 1_{2\times 2} & 0 \end{bmatrix} \qquad \gamma^i_{quiral} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$

(a) Verique que ambos conjuntos satisfacen el algebra de Clifford

(b) Muestre que son equivalentes mediante la siguiente matriz de cambio de base:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1_{2\times 2} & -1_{2\times 2} \\ 1_{2\times 2} & 1_{2\times 2} \end{bmatrix}$$

$\boxed{18}$ Encuentre las propiedades de transformación ante el grupo de Lorentz de las formas bilineales $\bar{\Psi}\Psi$ y $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$.

$\boxed{19}$ La representación del grupo de Lorentz (incluyendo paridad) de dimensión más baja es una suma directa de representaciones de espín $\frac{1}{2}$: $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Esta es la representación *espinorial.* A fin de ver esto, considere la representación quiral de las matrices de Dirac.

(a) Muestre que una transformación de Lorentz preserva espinores de la forma $\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix}$.

(b) Calcule los generadores A y B del Ejercicio 10 en esta representación y verifique que los dos tipos de espinores del inciso anterior corresponden a la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$.

$\boxed{20}$ Probar que las soluciones de la ecuación de Dirac tienen la forma

$$\begin{aligned} \psi^+_p(x) &= u^s(p)\, e^{-ipx}, \ \text{ con } p^2 = m^2 \text{ y } p^0 > 0; \\ \psi^-_p(x) &= v^s(p)\, e^{+ipx}, \ \text{ con } p^2 = m^2 \text{ y } p^0 > 0, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} u^s(p) &= \frac{1}{\sqrt{2(p^0+m)}} \begin{bmatrix} (p^0 + m + p_i\sigma^i)\,\xi^s \\ (p^0 + m - p_i\sigma^i)\,\xi^s \end{bmatrix} \\ v^s(p) &= \frac{1}{\sqrt{2(p^0+m)}} \begin{bmatrix} (p^0 + m + p_i\sigma^i)\,\eta^s \\ -(p^0 + m - p_i\sigma^i)\,\eta^s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$(s = 1, 2)$, donde ξ^1 y ξ^2, y η^1 y η^2 son bases ortonormales de espinores de dimensión 2.

$\boxed{21}$ Mostrar que

$$\sum_{s=1,2} u^s(p)\bar{u}^s(p) = \left(\not{p} + m\right)\,, \quad \sum_{s=1,2} v^s(p)\bar{v}^s(p) = \left(\not{p} - m\right)\,,$$

donde $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ (en general, un cuadrivector tachado representa la contracción del mismo con las matrices γ).

$\boxed{22}$ Muestre que $\sum_{s=1}^2 u^s(p)\bar{u}^s(p)$ y $-\sum_{s=1}^2 v^s(p)\bar{v}^s(p)$ son proyectores en el subespacio de energías positivas y negativas respectivamente.

$\boxed{23}$ Al querer usar a las soluciones de la ecuación de Dirac con energía positiva como una función de onda que, mediante alguna combinación cuadratica, nos dé la probabilidad de encontrar una partícula en un cierto rango de posiciones uno se topa con dificultades relacionadas con la localización espacial, que discutiremos más adelante en la guía 3. El problema radica en que el subespacio de soluciones con frecuencia definida (positiva o negativa) no es lo suficientemente grande para poder describir funciones localizadas de manera general. A fin de ilustrar este punto, considere una solución de la ecuación de Dirac (en la base de Dirac) cuya forma a $t = 0$ sea la del paquete Gaussiano

$$\Psi(\vec{r}, 0) = (\pi d^2)^{-3/4} e^{-\frac{r^2}{2d^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siendo que la ecuación de Dirac es de primer orden, esta condición inicial determina su evolución temporal.

(a) Muestre que para formar dicho paquete es necesario incluir soluciones de energía negativa. Para ello, use los proyectores de energía positiva y negativa del ejercicio anterior.

(b) Muestre que el peso de las soluciones de energía negativa es comparable a las de energía positiva si $d \leq 1/m$. En las unidades naturales que estamos usando ($\hbar = c = 1$), $1/m$ es la longitud de Compton.