> Despite the successfully predicting power of Feynman path integral, it lacks mathematical rigor. Trained as a mathematician, I have difficulty accepting the validity of path integral, and for that matter, most of quantum field theory; although as a physicist, I know how to use them and to wave my hands as necessary, deep down I am deeply troubled.
>
> *Ong, Y. C., Note: "Where is the Commutation Relation Hiding in the Path Integral Formulation?"*

Las integrales de camino, desarrolladas por Richard Feynman en la década de 1940, son una herramienta poderosa en la física teórica que se utiliza para calcular amplitudes de transición entre estados cuánticos. En esta guía veremos algunos aspectos básicos y aplicaciones de las integrales de camino en mecánica cuántica no relativista y en teoría de campos. En particular, utilizaremos el método de integrales de camino para estudiar aspectos perturbativos de ciertos modelos y esto nos llevará naturalmente a la introducción de las reglas de Feynman.

Mecánica cuántica no relativista

1 **Integral de caminos en el espacio de configuración.**
Partiendo de la version discreta para la integral de caminos en espacio de fases,

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \approx \int \left(\prod_{n=1}^{N} dq_n \right) \left(\prod_{n=1}^{N+1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\sum_{n=1}^{N+1} p_n \left(q_n - q_{n-1}\right) \varepsilon \sum_{n=1}^{N+1} H\left(q_{n-1}, p_n\right) \right] \right\},$$

probar que si $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon} \right)^{\frac{N+1}{2}} \int \left(\prod_{n=1}^{N} dq_n \right) \exp\left\{ \frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} L\left(q_n, \dot{q}_n\right) \right\} \equiv \\ &\equiv \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt \, L(q,\dot{q})}, \end{aligned}$$

siendo L el Lagrangiano. Esta es la integral de caminos en espacio de configuración.

2 Considere un lagrangiano de la forma $L = \frac{1}{2} f(q)\dot{q}^2 - V(q)$, donde $f(q)$ es una función no constante. Muestre que

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \neq \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt \, L(q,\dot{q})}.$$

3 Hallar la amplitud de transición $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$ para una partícula libre.

4 Considere un oscilador armónico de masa m y frecuencia ω. Probar que

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = g\left(t_f, t_i\right) e^{\frac{i}{\hbar} S[q_{\text{clás.}}]},$$

siendo g una función de t_i y t_f, y

$$S\left[q_{\text{clás.}}\right]=m\omega\left\{\left(q_i^2+q_f^2\right)\cos\left[\omega\left(t_f-t_i\right)\right]-2q_iq_f\right\}/\left\{2\text{sen}\left[\omega\left(t_f-t_i\right)\right]\right\}$$

la acción evaluada en la trayectoria clásica.
Ayuda: escribir $q(t)=q_{\text{clás.}}(t)+\eta(t)$, donde $q_{\text{clás.}}(t)$ es la trayectoria clásica, y expandir la acción hasta segundo orden en η. Notar que como la acción es cuadrática, esta expansión a segundo orden es exacta.

$\boxed{5}$ * Considere una partícula que puede moverse libremente sobre un anillo. Calcule el propagador $K(t_f,q_f|t_i,q_i)=\langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle\,\theta\left(t_f-t_i\right)$ utilizando el formalismo de Schrödinger. Realice también el cálculo usando integrales funcionales. *Ayuda: Considere trayectorias que van desde la posición inicial a la final dando un número arbitrario de vueltas).*

$\boxed{6}$ **Representación de la función de partición con integrales de camino.**
Probar que la función de partición del ensamble canónico,

$$\mathcal{Z}\left(\beta\right)=\operatorname{tr}e^{-\beta H}\,,$$

puede escribirse formalmente como

$$\mathcal{Z}\left(\beta\right)=\int dq\,\left\langle q,-i\hbar\beta\right|\left.q,0\right\rangle\ .$$

Usando la expresión para la amplitud de transición en términos de integrales de camino tenemos entonces

$$\mathcal{Z}\left(\beta\right)=\int dq\int_{q(0)=q}^{q(-i\hbar\beta)=q}\mathcal{D}q\,e^{\frac{i}{\hbar}S}\equiv\int_{q(0)=q(-i\hbar\beta)}\mathcal{D}q\,e^{\frac{i}{\hbar}S}\,.$$

Hallar en particular la función de partición de un oscilador armónico.

$\boxed{7}$ **Integral de caminos y ordenamiento temporal.**
Verificar que, si $t_f>t_i$,

$$\langle q_f,t_f|\mathbf{T}\left(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\right)|q_i,t_i\rangle=\int\mathcal{D}q\,q(t_1)q(t_2)e^{iS/\hbar}\,,$$

donde $\mathbf{T}(...)$ denota el producto temporalmente ordenado. Esto expresa que la integral de caminos ordena temporalmente.

$\boxed{8}$ Para hallar valores de expectación es conveniente introducir una fuente auxiliar J. Definimos:

$$\left\langle q_f,t_f\right|\left.q_i,t_i\right\rangle_J=\int\mathcal{D}q\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[S+\int_{t_i}^{t_f}dt\,J(t)q(t)\right]\right\}=\int\mathcal{D}q\,e^{\frac{i}{\hbar}[S+(J,q)]},$$

donde se usó la notación $(J,q)=\int_{t_i}^{t_f}dt\,J(t)q(t)$. Probar que

$$\langle q_f,t_f|\mathbf{T}\left(\hat{q}(t_1)...\hat{q}(t_n)\right)|q_i,t_i\rangle=\left(\frac{\hbar}{i}\right)^n\frac{\delta^n}{\delta J(t_1)...\delta J(t_n)}\left\langle q_f,t_f\right|\left.q_i,t_i\right\rangle_J\Big|_{J=0}\,.$$

$\boxed{9}$ **Amplitud de persistencia del vacío y funcional generatriz.**
Para hallar valores de expectación en el vacío es conveniente introducir la amplitud de persistencia del vacío

$$\langle 0|0\rangle_J=\int dq''\,dq'\,\langle 0|q'',t''\rangle\,\langle q'',t''|q',t'\rangle_J\,\langle q',t'|0\rangle\,.$$

Probar que la funcional generatriz, definida por

$$Z[J] = \frac{\langle 0|0\rangle_J}{\langle 0|0\rangle_{J=0}},$$

tiene la siguiente representación en términos de integrales de camino

$$Z[J] = \lim_{\substack{t_i \to i\infty \\ t_f \to -i\infty}} \frac{\int_{\substack{q(t_i)=q_i \\ q(t_f)=q_f}} \mathcal{D}q\, e^{\frac{i}{\hbar}[S+(J,q)]}}{\int_{\substack{q(t_i)=q_i \\ q(t_f)=q_f}} \mathcal{D}q\, e^{\frac{i}{\hbar}S}}$$

10 El objetivo de este ejercicio es hallar la funcional generatriz $Z[J]$ de un oscilador armónico con Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2 .$$

Para ello:

(a) Probar que para hallar $\langle 0|0\rangle_J$ alcanza con encontrar la solución clásica $q_{\text{Cl.}}$ para el sistema con Lagrangiano $L + (J, q)$ (notar que este Lagrangiano sigue siendo cuadrático y por lo tanto ya conocemos la expresión para la amplitud de transición).

(b) Expresar $q_{\text{Cl.}} = q^{(0)}_{\text{Cl.}} + \int dt' G(t,t')J(t')$, siendo $q_{\text{Cl.}^{(0)}}$ la solución clásica para el sistema con Lagrangiano L, y hallar la ecuación diferencial y condiciones de contorno para G.

(c) Hallar explícitamente G y utilizar el resultado para calcular $Z[J]$.

11 * **Definición perturbativa de la integral de caminos.**

(a) Considere la siguiente integral Gaussiana,

$$I_0(A, \mathbf{b}) = \int d^n\mathbf{x}\, e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{x}} = C_A e^{\frac{1}{2}\mathbf{b}^T A^{-1}\mathbf{b}},$$

con $C_A = \left[\det\left(\frac{A}{2\pi}\right)\right]^{-1/2}$.

Demuestre que $I_\lambda(A, \mathbf{b}) = \int d^n\mathbf{x}\, e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \lambda V(\mathbf{x}) + \mathbf{b}\cdot\mathbf{x}}$ se puede obtener a partir de I_0:

$$I_\lambda(A, \mathbf{b}) = e^{-\lambda V\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}}\right)} I_0(A, \mathbf{b})$$

(b) Usando la idea del ejercicio anterior, es posible dar una definición perturbativa de la integral de caminos en términos del resultado de la integral de caminos para el caso cuadrático (que sabemos calcular explícitamente). Si la acción total es $S[q] = S_0[q] + S_I[q]$, donde S_0 es la acción cuadrática y S_I un funcional arbitrario, podemos dar la siguiente definición perturbativa para la funcional generatriz (Euclídea):

$$Z[J] = e^{-S_I\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]} Z_0[J],$$

donde $Z_0[J]$ es la funcional generatriz de la acción cuadrática.

Probar que usando esta definición se cumplen las ecuaciones de Schwinger-Dyson

$$\left[\frac{\delta S}{\delta q(\tau)}\left(\frac{\delta}{\delta J}\right) - J(\tau)\right] Z[J] = 0.$$

12 **Reglas de Feynman.**
Considere el Lagrangiano $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + L_{\text{int}}$ con

$$L_{\text{int}} = -\frac{\lambda_3}{3!}q^3 - \frac{\lambda_4}{4!}q^4 \, .$$

(a) Deducir las reglas de Feynman para el cálculo perturbativo del funcional generatriz $W[J]/W[0]$ en potencias de λ_3 y λ_4.

(b) Obtener expresiones para las primeras correcciones no triviales a la función de dos puntos $\langle 0|T\,(q(t_1)q(t_2)|0\rangle$.

Teoría de campos

Observación: distintos libros/apuntes suelen intercambiar el significado de W y Z, por lo que les recomendamos revisar las definiciones.

13 Utilizar integrales de camino para expresar el funcional generatriz para un campo escalar real libre y utilizar el resultado para calcular la función de Green de dos puntos.

14 **Teorema de Wick.**
Para un campo escalar real libre, utilizar el funcional generatriz para probar que la función

$$\langle 0|\, T\,\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\}\,|0\rangle$$

se puede escribir en términos de productos y sumas de funciones de dos puntos. Esto es un ejemplo concreto del denominado Teorema de Wick.

15 **Funcional generatriz para diagramas conectados.**
Se define $W[J]$ a través de $Z[J] = e^{iW[J]}$. Hallar $W[J]$ para el modelo del campo escalar real libre y probar que las *funciones de Green conectadas*,

$$G_C^{(n)}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{i^{n-1}} \left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)...\delta J(x_n)} \right|_{J=0} ,$$

son nulas para $n > 2$.

16 Derivar las reglas de Feynman para las funciones de Green del modelo $\lambda\phi^4$.

17 Calcular explícitamente la función de Green de cuatro puntos del modelo $\lambda\phi^4$ a primer orden en λ. Verificar el resultado utilizando las reglas de Feynman para el modelo.

18 Considere un sistema descripto por dos campos escalares reales ϕ y σ con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}\mu^2\sigma^2 - \lambda\phi^2\sigma \, . \quad (1)$$

Derivar las reglas de Feynman para las funciones de Green.