

# Teoría de Campos 2024

Esteban Calzetta

12 de noviembre de 2024

# Índice general

<b>1. Métodos Lagrangianos y Hamiltonianos</b>	<b>1</b>
1.1. Métodos Lagrangianos . . . . .	1
1.2. Métodos Hamiltonianos . . . . .	3
1.3. Teoría clásica de campos . . . . .	4
1.4. Campos relativistas . . . . .	5
1.5. El campo de Klein-Gordon . . . . .	8
<b>2. La ecuación de Dirac</b>	<b>10</b>
2.1. Una generalización relativista de la ecuación de Schrödinger . . . . .	10
2.2. Covariancia de la ecuación de Dirac . . . . .	11
2.3. El spin del espinor . . . . .	12
2.4. Formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana . . . . .	12
<b>3. Cuantificación canónica</b>	<b>14</b>
3.1. El oscilador armónico . . . . .	14
3.2. El campo de Klein-Gordon . . . . .	16
3.2.1. El efecto Casimir . . . . .	18
3.2.2. La invariancia, bien gracias . . . . .	18
3.3. El campo de Klein-Gordon complejo: partículas y antipartículas. . . . .	19
3.4. El campo de Dirac . . . . .	19
3.4.1. Construyendo la base . . . . .	21
3.5. El espinor de Majorana . . . . .	21
<b>4. Matriz de Scattering y fórmula LSZ</b>	<b>23</b>
4.1. Matriz de Scattering . . . . .	23
4.2. La fórmula de reducción LSZ . . . . .	24
4.2.1. El próximo paso . . . . .	25
4.3. La fórmula LSZ para fermiones . . . . .	25
4.4. El propagador de Feynman . . . . .	27
4.4.1. El propagador de Feynman del campo de Klein-Gordon . . . . .	27
4.4.2. El propagador de Feynman del campo de Dirac . . . . .	29
4.4.3. La representación de Lehmann . . . . .	30
<b>5. Integrales de Camino</b>	<b>32</b>
5.1. Integrales de camino en mecánica cuántica no relativista . . . . .	32
5.2. La integral de camino ordena temporalmente . . . . .	33
5.3. La integral euclídea y las condiciones de contorno . . . . .	34
5.4. Integrales Gaussianas . . . . .	35
<b>6. Reglas de Feynman y métodos funcionales</b>	<b>38</b>
6.1. Las reglas de Feynman . . . . .	38
6.2. Diagramas con patas externas . . . . .	40
6.3. El funcional generador . . . . .	42
6.4. Elementos de matriz irreducibles . . . . .	43

<b>7. La acción efectiva</b>	<b>45</b>
7.1. El desarrollo en loops . . . . .	47
7.2. Cálculo de la acción efectiva . . . . .	49
7.2.1. El tadpole . . . . .	49
7.2.2. El fish . . . . .	52
7.2.3. La parte imaginaria del fish . . . . .	53
7.3. Apéndice: Parámetros de Feynman . . . . .	54
<b>8. Renormalización.</b>	<b>56</b>
8.1. Divergencia de diagramas de Feynman . . . . .	56
8.2. La acción efectiva . . . . .	58
<b>9. El grupo de renormalización.</b>	<b>60</b>
9.1. El grupo de renormalización . . . . .	60
9.2. Aplicación: los exponentes críticos de la transición ferromagnética . . . . .	62
9.2.1. La teoría de campo medio . . . . .	63
9.2.2. Los exponentes críticos y la función de correlación . . . . .	64
9.3. Los exponentes críticos y el grupo de renormalización . . . . .	65
9.4. La aproximación de $N$ grande . . . . .	65
9.5. Acerca de la literatura . . . . .	68
9.6. Apéndice: desigualdades termodinámicas . . . . .	68



# Capítulo 1

## Métodos Lagrangianos y Hamiltonianos

### 1.1. Métodos Lagrangianos

La descripción más básica de la dinámica de un sistema físico está dada por las leyes de Newton. Supongamos que tenemos un sistema de  $M$  partículas con coordenadas  $x_{\alpha i}$ ,  $1 \leq \alpha \leq M$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Entonces la dinámica del sistema está determinada por las ecuaciones

$$m_{\alpha} \ddot{x}_{\alpha i} = f_{\alpha i} \quad (1.1)$$

donde  $m_{\alpha}$  es la *masa* y  $f_{\alpha i}$  la componente  $i$  de la *fuerza* sobre la partícula  $\alpha$  (para más detalles acerca de estos conceptos ver el libro de Roederer). Si además el sistema es *conservativo*, existe un *potencial*  $V = V(x_{11}, \dots, x_{M3})$ , entonces

$$f_{\alpha i} = -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}} V \quad (1.2)$$

y el sistema completo de ecuaciones resulta

$$m_{\alpha} \ddot{x}_{\alpha i} = -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}} V \quad (1.3)$$

Una consecuencia de estas ecuaciones es que la cantidad

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, i} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha i}^2 + V \quad (1.4)$$

permanece constante en el tiempo, ya que

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{\alpha, i} \dot{x}_{\alpha i} \left[ m_{\alpha} \ddot{x}_{\alpha i} + \frac{\partial V}{\partial x_{\alpha i}} \right] = 0 \quad (1.5)$$

Llamamos a  $E$  la *energía*. La ecuación 1.4 nos induce a dividir la energía en dos contribuciones,  $E = T + V$ , donde  $V$  es la *energía potencial*, y  $T$  es la *energía cinética*

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, i} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha i}^2 \quad (1.6)$$

Desde que los griegos inventaron la filosofía natural, varios observadores creyeron ver que la Naturaleza operaba bajo un principio de máxima eficiencia (o de mínimo esfuerzo), de manera que encontrar la forma en que se despliega un proceso dado se reduce a un problema de optimización. El problema es encontrar qué es lo que hay que optimizar. Así, en óptica encontramos el Principio de Fermat, un rayo de luz adopta la forma que minimiza el camino (óptico) entre dos puntos. En teoría de circuitos encontramos la Ley de Kirchhoff (las corrientes se distribuyen en un circuito de manera de minimizar el calor disipado), etc.

En mecánica el problema de optimización adecuado lo encontró Lagrange. La formulación es similar a la del Principio de Fermat: queremos saber cómo hace el sistema para pasar de una configuración  $(x_{11}^0, \dots, x_{N3}^0)$  en el tiempo  $t_0$  a la configuración  $(x_{11}^1, \dots, x_{M3}^1)$  en el tiempo  $t_1$ . Es importante que los tiempos y estados iniciales y finales son conocidos y están fijos. Lagrange descubrió que el sistema adopta una trayectoria que es un extremo de la *acción*

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt L \quad (1.7)$$

donde  $L$  es el Lagrangiano

$$L = T - V \quad (1.8)$$

cuya propiedad más importante probablemente sea que *no* es la energía, salvo para un sistema de partículas libres (y por lo tanto no es necesariamente constante sobre la trayectoria). El extremo se toma comparando todas las trayectorias que interpolan entre los extremos dados en los tiempos prefijados.

Supongamos que la trayectoria que extremiza la acción está dada por funciones  $\bar{x}_{i\alpha}(t)$ , y comparemos la acción evaluada sobre esta trayectoria con la acción evaluada sobre una trayectoria vecina

$$x_{i\alpha}(t) = \bar{x}_{i\alpha}(t) + \epsilon \delta x_{i\alpha}(t) \quad (1.9)$$

La acción resultará alguna función de  $\epsilon$ , y podemos desarrollar

$$S = S_0 + \epsilon S_1 + \frac{1}{2} \epsilon^2 S_2 + \dots \quad (1.10)$$

Pero si la trayectoria base es un extremo, entonces debe ser  $S_1 = 0$ , ya que de otro modo podríamos aumentar o disminuir  $S$  eligiendo convenientemente el signo de  $\epsilon$ . Para calcular  $S_1$ , debemos tener en cuenta que al pasar de una trayectoria a la otra no sólo cambian las coordenadas, sino también las velocidades, ya que en la nueva trayectoria

$$x_{i\alpha,t}(t) = \bar{x}_{i\alpha,t}(t) + \epsilon \delta x_{i\alpha,t}(t) \quad (1.11)$$

dicho de otra manera

$$\delta \frac{d}{dt} x_{i\alpha} = \frac{d}{dt} \delta x_{i\alpha} \quad (1.12)$$

Entonces

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} \delta \dot{x}_{i\alpha} + \frac{\partial L}{\partial x_{i\alpha}} \delta x_{i\alpha} \right\} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} \frac{d}{dt} \delta x_{i\alpha} + \frac{\partial L}{\partial x_{i\alpha}} \delta x_{i\alpha} \right\} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Una integración por partes no arroja un término integrado, ya que  $\delta x_{i\alpha}$  se anula en los extremos, de manera que podemos escribir

$$S_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt \delta x_{i\alpha} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_{i\alpha}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} \right\} \quad (1.14)$$

y ya que debe ser  $S_1 = 0$  cualquiera sea  $\delta x_{i\alpha}$ , obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} \right|_{x_{i\alpha}=\bar{x}_{i\alpha}} = \left. \frac{\partial L}{\partial x_{i\alpha}} \right|_{x_{i\alpha}=\bar{x}_{i\alpha}} \quad (1.15)$$

Incidentalmente, cuando encontramos una expresión del tipo 1.14

$$\delta S = \int dt (\text{algo}) \delta x_{i\alpha}(t) \quad (1.16)$$

decimos que “algo” es la *derivada variacional* de  $S$  respecto de las  $x_{i\alpha}$ , y lo escribimos como

$$\text{algo} = \frac{\delta S}{\delta x_{i\alpha}(t)} \quad (1.17)$$

En nuestro caso

$$\frac{\delta S}{\delta x_{i\alpha}(t)} = \frac{\partial L}{\partial x_{i\alpha}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} \quad (1.18)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange afirman que

$$\left. \frac{\delta S}{\delta x_{\alpha i}}(t) \right|_{x_{i\alpha}=\bar{x}_{i\alpha}} = 0 \quad (1.19)$$

Si la energía cinética está dada por la ecuación 1.6, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} &= m_{\alpha} \dot{x}_{i\alpha} \\ \frac{\partial L}{\partial x_{i\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}} V \end{aligned} \quad (1.20)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange reproducen las ecuaciones de Newton 1.3. La superioridad del método de Lagrange consiste en que nos libera de las coordenadas cartesianas; en vez de las  $x_{i\alpha}$  podemos usar cualquier sistema de *coordenadas generalizadas*  $(q_1, \dots, q_N)$ , provisto que conociendo las  $q$ 's podamos calcular unívocamente las  $x$ 's. Por lo tanto, escribimos

$$S = \int dt L[q_j, \dot{q}_j, t] \quad (1.21)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange afirman que

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right|_{q_j=\bar{q}_j} = \left. \frac{\partial L}{\partial q_j} \right|_{q_j=\bar{q}_j} \quad (1.22)$$

Una propiedad importante de estas ecuaciones es que si  $q_j$  ocurre ser una *coordenada cíclica*

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (1.23)$$

automáticamente encontramos una ley de conservación, ya que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (1.24)$$

Probablemente el uso más intensivo que se hace de la formulación Lagrangiana es para identificar las leyes de conservación relevantes en un sistema dado; éste va a ser un tema importante en el desarrollo del curso.

## 1.2. Métodos Hamiltonianos

Un problema de la formulación Lagrangiana es que las velocidades generalizadas  $\dot{q}_j$  juegan dos roles a la vez. Por un lado son variables de las que depende el Lagrangiano, pero no son realmente independientes, ya que  $\delta \dot{q}_j = (\delta q_j)_{,t}$ . Es interesante separar esos dos roles.

Para eso, al escribir el Lagrangiano reemplazamos las velocidades  $\dot{q}_j$  por nuevas variables  $v_j$ , que pensamos como independientes de las  $q_j$ . Pero al calcular la acción consideramos solamente aquellas trayectorias en que resulta ser  $v = \dot{q}_j$ . Eso lo logramos agregando un multiplicador de Lagrange  $p_j$ , que también variamos independientemente de  $q_j$  y  $v_j$ . La acción es

$$S = \int dt \left\{ L[q_j, v_j, t] + \sum_j p_j (\dot{q}_j - v_j) \right\} \quad (1.25)$$

y las variaciones respecto a  $q_j, p_j$  y  $v_j$  dan, respectivamente, las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{p}_j &= \frac{\partial L}{\partial q_j} \\ \dot{q}_j &= v_j \\ p_j &= \frac{\partial L}{\partial v_j} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Reconocemos que las dos primeras son las ecuaciones de movimiento, y la tercera una relación constitutiva que cierra el sistema. El principio variacional 1.25 se puede reescribir como

$$S = \int dt \left\{ \sum_j p_j \dot{q}_j - H \right\} \quad (1.27)$$

donde, reemplazando en todas partes  $v_j$  por  $\dot{q}_j$ ,

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \quad (1.28)$$

es el *Hamiltoniano* del sistema. Matemáticamente, la transformación que nos permite pasar de  $L$  a  $H$  es una *transformación de Legendre*, que ya han encontrado múltiples veces en física 3 y 4. En la ecuación 1.28  $\dot{q}_j$  no se concibe como una variable independiente, sino como una función de  $q_j$  y  $p_j$  que se obtiene de invertir la tercera de las ecuaciones 1.26. Ahora encontramos

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} \left[ p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] = \dot{q}_j \quad (1.29)$$

y con un argumento similar

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \quad (1.30)$$

Las ecuaciones 1.29 y 1.30 son las ecuaciones de movimiento en el formalismo Hamiltoniano. Las mismas ecuaciones se pueden encontrar variando la acción 1.27 *independientemente* respecto de  $q_j$  y  $p_j$ .

### 1.3. Teoría clásica de campos

La trasposición de los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano de la mecánica a la teoría clásica de campos es inmediata, simplemente reemplazamos las  $x_{\alpha i}$  por las variables  $\phi^A(\mathbf{x}, t)$ ,  $1 \leq A \leq n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  que definen la configuración del campo en un instante dado. Por ejemplo, para un campo de temperaturas (Física 4)  $n = 1$  y  $\phi = T$ ; para un campo de velocidades (Estructura 1),  $n = 3$  y  $\phi^j = v^j$ . El sistema tiene un Lagrangiano  $\mathcal{L}$ . Para mantener la complejidad bajo control vamos a asumir que la teoría es *local*. Eso quiere decir que el Lagrangiano se obtiene de la integral de una *densidad Lagrangiana*

$$\mathcal{L} = \int d^3x L \quad (1.31)$$

que en cada punto es función solamente de las  $\phi^A$  y sus derivadas primeras en ese punto. Por lo tanto la acción

$$S = \int d^4x L \quad (1.32)$$

$d^4x = d^3x dt$ , y calculando las derivadas variacionales de la misma manera que lo hicimos antes, obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange (asumimos que las variaciones en cuestión se anulan en el infinito espacial, así como en los tiempos inicial y final)

$$\partial_t \frac{\partial L}{\partial \phi^A_{,t}} + \partial_j \frac{\partial L}{\partial \phi^A_{,j}} = \frac{\partial L}{\partial \phi^A} \quad (1.33)$$

Desde ahora y hasta el Big Crunch adoptamos la convención de Einstein. Para que las ecuaciones 1.33 sean de segundo orden respecto del tiempo (¡prejuicio Newtoniano!) la densidad Lagrangiana debe ser cuadrática en las derivadas temporales de las  $\phi^A$ .

Para pasar al formalismo Hamiltoniano, asociamos a cada componente del campo su momento conjugado

$$\pi_A = \frac{\partial L}{\partial \phi^A_{,t}} \quad (1.34)$$

Entonces el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \left( \int d^3x \pi_A \dot{\phi}^A \right) - \mathcal{L} \quad (1.35)$$

Si la teoría es local, también

$$\mathcal{H} = \int d^3x H \quad (1.36)$$

con

$$H = \pi_A \dot{\phi}^A - L \quad (1.37)$$

y las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^A &= \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_A} = \frac{dH}{d\pi_A} \\ \dot{\pi}_A &= -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi^A} = -\left[ \frac{dH}{d\phi^A} - \partial_j \frac{dH}{d\phi_{,j}^A} \right] \end{aligned} \quad (1.38)$$

Nótese que  $L$  o  $H$  son funciones ordinarias de los campos y sus derivadas primeras en un punto, mientras que  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{H}$  dependen de toda la configuración de los campos y sus derivadas en una superficie de tiempo constante. Para reforzar esta distinción, decimos que  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{H}$  son *funcionales*.

## 1.4. Campos relativistas

La cosa se complica si pedimos que la teoría que estamos construyendo sea invariante relativista. Para ver porqué, tenemos que empezar por discutir qué es la invariancia relativista.

El espacio-tiempo de Minkowski es un  $\mathbb{R}^4$  donde el Teorema de Pitágoras toma la forma

$$s^2 = -x^{02} + x^{12} + x^{22} + x^{32} \quad (1.39)$$

donde  $x^0 = ct$ ,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío y  $t$  el tiempo. Es habitual introducir la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

y escribir el Teorema de Pitágoras como

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (1.41)$$

Es usual escribir la inversa de la métrica de Minkowski como  $\eta^{\mu\nu}$ , aunque de hecho son la misma matriz,  $\eta^{\mu\rho} \eta_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu$ . Como en Teoría 1, un índice “arriba” denota un índice contravariante, un índice “abajo” denota un índice covariante, y se pasa de uno al otro “contrayendo” con la métrica o con su inversa, según corresponda. La diferencia es que ante un cambio de coordenadas en que  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ , un vector contravariante transforma como las coordenadas, es decir

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) \quad (1.42)$$

mientras que uno covariante transforma como las derivadas de una función

$$A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) \quad (1.43)$$

La métrica nos permite convertir índices covariantes en contravariantes y a la inversa

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu; \quad A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu \quad (1.44)$$

Una transformación de Lorentz es una transformación lineal que deja invariante la forma del Teorema de Pitágoras, es decir, si  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ , entonces

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \quad (1.45)$$

con la misma matriz  $\eta_{\mu\nu}$ . Ejemplos de transformaciones de Lorentz son

- Una rotación ordinaria.
- Un cambio de referencial (“boost”), por ejemplo,

$$\begin{aligned} t \rightarrow t' &= \frac{t + \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; & x \rightarrow x' &= \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y \rightarrow y' &= y; & z \rightarrow z' &= z \end{aligned} \quad (1.46)$$

- La inversión temporal  $t \rightarrow -t$ , las otras coordenadas invariantes, y
- La inversión espacial  $x \rightarrow -x$ , las otras coordenadas invariantes.

Cualquier transformación de Lorentz es una composición de estas cuatro transformaciones básicas. Si sólo se usan rotaciones y cambios de referencial, hablamos de una transformación de Lorentz *propia*. El grupo de Lorentz es un grupo continuo, y las transformaciones propias son una componente conexa de la variedad del grupo de Lorentz, de hecho la componente conexa que contiene a la identidad. Eso quiere decir que cualquier transformación de Lorentz propia es composición de transformaciones infinitesimales. Bajo una transformación infinitesimal

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \omega_\nu^\mu x^\nu \quad (1.47)$$

A primer orden en los  $\omega_\nu^\mu$

$$\eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = s^2 + 2\omega_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (1.48)$$

donde  $\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \omega_\nu^\rho$ . Por lo tanto, la condición para que 1.47 sea una transformación de Lorentz es que la matriz  $\omega_{\mu\nu}$  sea antisimétrica.

Por ejemplo, una rotación infinitesimal está definida por

$$t' = t; \quad x'^i = x^i + \epsilon^i_{jk} \omega^j x^k \quad (1.49)$$

Comparando con 1.47, vemos que

$$\omega_\nu^0 = \omega_0^\mu = 0; \quad \omega_j^i = \epsilon^i_{kj} \omega^k \quad (1.50)$$

En cambio, para un boost infinitesimal

$$t' = t + v_i x^i; \quad x'^i = x^i + v^i t \quad (1.51)$$

de donde

$$\omega_i^0 = v_i; \quad \omega_0^i = v^i; \quad \omega_j^i = 0 \quad (1.52)$$

(por lo que  $\omega^{0i} = v^i = -\omega^{i0}$ , como debe ser)

Conviene separar los “parámetros” de la transformación de los “generadores” del (álgebra del) grupo de Lorentz. Para eso, escribimos 1.47 como

$$x'^\mu = x^\mu + \frac{i}{2} [L_{\rho\sigma}]_\nu^\mu \omega^{\rho\sigma} x^\nu \quad (1.53)$$

$\omega^{\rho\sigma} = \eta^{\rho\lambda} \eta^{\sigma\tau} \omega_{\lambda\tau}$  también es antisimétrica. Las matrices

$$[L_{\rho\sigma}]_\nu^\mu = (-i) [\delta_\rho^\mu \eta_{\sigma\nu} - \delta_\sigma^\mu \eta_{\rho\nu}] \quad (1.54)$$

definen el álgebra del Grupo de Lorentz

$$[L_{\rho\sigma}, L_{\lambda\tau}] = i [\eta_{\sigma\tau} L_{\rho\lambda} - \eta_{\sigma\lambda} L_{\rho\tau} - \eta_{\rho\tau} L_{\sigma\lambda} + \eta_{\rho\lambda} L_{\sigma\tau}] \quad (1.55)$$

En términos la ecuación 1.53, una rotación infinitesimal se escribe como

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \frac{i}{2} [L_{ij}]_{\nu}^{\mu} \epsilon_k^{ij} \omega^k x^{\nu} \quad (1.56)$$

O sea que los operadores

$$J_k = -\frac{1}{2} \epsilon_k^{ij} L_{ij} \quad (1.57)$$

son los generadores de las rotaciones ordinarias. Efectivamente,

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k \quad (1.58)$$

De la misma manera, los  $L_{0i}$  son los generadores de boosts. Ahora

$$[L_{0i}, L_{0j}] = i \epsilon_{ijk} J_k \quad (1.59)$$

que es el origen de la precesión de Thomas.

En este curso vamos a estudiar campos que ante una transformación de Lorentz se transforman de la forma

$$\phi'^A(x'^{\mu}) = \Lambda_B^A \phi^B(x^{\mu}) \quad (1.60)$$

Las matrices  $\Lambda_B^A$  se construyen componiendo transformaciones infinitesimales, para las cuales

$$\Lambda_B^A = \delta_B^A + \frac{i}{2} [S_{\rho\sigma}]_B^A \omega^{\rho\sigma} \quad (1.61)$$

y los generadores  $S_{\rho\sigma}$  obedecen el álgebra del grupo de Lorentz 1.55. La ley 1.60 conecta los campos original y transformado en dos valores distintos de sus argumentos, pero si la transformación es infinitesimal podemos escribir

$$\phi'^A(x'^{\mu}) = \phi'^A(x^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu} x^{\nu}) \approx \phi'^A(x^{\mu}) + \omega^{\mu\nu} x_{\nu} \phi_{,\mu}^A \quad (1.62)$$

Entonces

$$\phi'^A(x^{\mu}) = \phi^A(x^{\mu}) + \frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} \left[ \delta_B^A (x_{\rho} (-i) \partial_{\sigma} - x_{\sigma} (-i) \partial_{\rho}) + [S_{\rho\sigma}]_B^A \right] \phi^B(x^{\mu}) \quad (1.63)$$

Vemos que la transformación de los campos tiene una parte “orbital” y una parte de “spin”, tema a desarrollar en las próximas clases. Obviamente, la representación más simple del grupo de Lorentz es la que tiene todos los  $S_{\rho\sigma} = 0$ . Decimos que un campo que se transforma de esta manera es un *escalar*.

Ahora podemos ver cómo construir teorías que sean invariantes Lorentz. Lo que queremos es que los campos pertenezcan a representaciones del grupo de Lorentz, y que cada vez que una trayectoria extrema la acción en un referencial, la transformada de esa trayectoria extrema la transformada de la acción en cualquier otro referencial. Como el volumen en el espacio tiempo es invariante Lorentz (para una transformación infinitesimal eso se deduce de que  $\omega_{\mu}^{\mu} = 0$ ), el problema se reduce a mostrar que bajo una transformación de Lorentz,

$$L'(x') = L(x) + \partial_{\mu} J^{\mu} \quad (1.64)$$

El caso más simple, que cubre todos los casos que vamos a ver en el curso, es cuando  $J^{\mu} = 0$  y la densidad Lagrangiana se transforma como un escalar. Para enfatizar la invariancia relativista, reescribimos las ecuaciones de Euler-Lagrange 1.33 de la manera explícitamente covariante

$$\partial_{\mu} \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}^A} = \frac{\partial L}{\partial \phi^A} \quad (1.65)$$

Cuando pasamos al formalismo Hamiltoniano encontramos un problema imprevisto. Las derivadas  $\phi_{,\mu}^A$  generalmente pertenecen a una representación definida del grupo de Lorentz, pero para separar la derivada temporal de las otras (como en las ecuaciones 1.38) tenemos que romper la invariancia Lorentz y atarnos a un referencial determinado.

En otras palabras, el formalismo Hamiltoniano no es *explícitamente* invariante Lorentz, aunque la teoría sí lo es, lo que podemos chequear en cualquier momento regresando al formalismo Lagrangiano.

## 1.5. El campo de Klein-Gordon

Como habíamos dicho, la teoría de campos más simple es la de un campo escalar real. Si  $\phi$  es un escalar, sus derivadas  $\phi_{,\mu}$  definen un vector. Existe un único escalar cuadrático en las derivadas,  $\eta^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}$ . Por otro lado, cualquier función  $V[\phi(x)]$  define igualmente un escalar, por lo cual, adoptando la convención de que la energía cinética sea definida positiva, cualquier acción del tipo

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - V[\phi(x)] \right\} \quad (1.66)$$

define una teoría invariante Lorentz, donde el término entre paréntesis es la densidad Lagrangiana. Ahora

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi_{,t}} &= \frac{1}{c^2}\dot{\phi} \\ \frac{\partial L}{\partial \phi_{,j}} &= -\phi_{,j} \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} &= -V'[\phi(x)] \end{aligned} \quad (1.67)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange 1.33 resultan en

$$-\square\phi + V'[\phi(x)] = 0 \quad (1.68)$$

donde  $\square$  es el D'Alambertiano

$$\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \frac{-1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \quad (1.69)$$

Si la función  $V$  es cuadrática,  $V = (1/2)m^2\phi^2$ , obtenemos la *ecuación de Klein-Gordon*

$$-\square\phi + m^2\phi = 0 \quad (1.70)$$

Por razones dimensionales vemos que  $m^2$  es la inversa del cuadrado de una longitud.

De la primer ecuación 1.67 vemos que el momento conjugado a  $\phi$  es

$$\pi = \frac{1}{c^2}\dot{\phi} \quad (1.71)$$

Por lo tanto, la densidad Hamiltoniana

$$H = \pi\dot{\phi} - L = \frac{1}{2}c^2\pi^2 + \frac{1}{2}\nabla\phi^2 + V[\phi(x)] \quad (1.72)$$

y las ecuaciones de movimiento en forma Hamiltoniana son

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= c^2\pi \\ \dot{\pi} &= \Delta\phi - V'[\phi(x)] \end{aligned} \quad (1.73)$$

Como esperábamos, ni 4.43 ni 4.48 son explícitamente invariantes Lorentz, aunque son evidentemente equivalentes a 1.68, que sí lo es.

Es posible extender la teoría al caso en que el campo  $\phi$  es complejo. Como queremos que la acción sea real, escribimos la densidad Lagrangiana

$$L = -\eta^{\mu\nu}\phi_{,\mu}^*\phi_{,\nu} - V[|\phi|^2(x)] \quad (1.74)$$

Nótese que desapareció el 1/2. Si escribimos  $\phi$  en términos de su parte real e imaginaria,

$$\phi = \frac{\xi + i\zeta}{\sqrt{2}} \quad (1.75)$$

revertimos a una teoría de dos campos escalares reales. Sin embargo, es más conveniente pensar a  $\phi$  y  $\phi^*$  como dos variables independientes. La variación de la acción respecto de  $\phi^*$  da la ecuación de movimiento para  $\phi$

$$-\square\phi + V' [|\phi|^2] \phi(x) = 0 \quad (1.76)$$

La teoría del campo complejo admite una cantidad conservada

$$J_\mu = i [\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*] \quad (1.77)$$

que es trivial para un campo real. La densidad  $J^0$  no es definida positiva, por lo tanto no es posible asociar a  $J^\mu$  con una corriente de probabilidad. Como veremos más adelante, se la asocia con la corriente de carga.

Si  $V(x) = m^2 x$  recuperamos la ecuación de Klein-Gordon. El momento conjugado a  $\phi$  es  $\pi = \dot{\phi}^*/c^2$  y el momento conjugado a  $\phi^*$  es  $\pi^* = \dot{\phi}/c^2$ , por lo que la densidad Hamiltoniana es

$$H = \pi^* \pi + \nabla \phi^* \nabla \phi - V [|\phi|^2] \quad (1.78)$$

La ecuación de Klein-Gordon 4.38 es lineal y admite como solución ondas planas

$$f_{\mathbf{k}} = e^{i[\mathbf{k}\mathbf{x} \pm \omega_{\mathbf{k}} t]} \quad (1.79)$$

con la relación de dispersión

$$\omega = \pm c \sqrt{k^2 + m^2} \quad (1.80)$$

Obsérvese que la velocidad de fase  $\omega/k \geq c$  para todo  $k$ , pero la velocidad de grupo  $d\omega/dk$  es sublumínica. Obsérvese también la aparición de *frecuencias negativas*. En mecánica cuántica no relativista, una frecuencia negativa estaría asociada a una energía negativa, y por lo tanto un sistema con frecuencias negativas arbitrariamente grandes no tendría un estado fundamental. Por lo tanto, vamos a tener que discutir en detalle porqué aparecen y qué significan las frecuencias negativas en la teoría relativista.

## Capítulo 2

# La ecuación de Dirac

### 2.1. Una generalización relativista de la ecuación de Schrödinger

La ecuación de Klein-Gordon no fue considerada una base aceptable para una mecánica cuántica relativista porque era de segundo orden respecto del tiempo, y no permitía definir una corriente conservada con una densidad definida positiva, que se pudiera interpretar como una corriente de probabilidad. Eso motivó a Dirac a buscar una solución del problema desde cero.

Dirac buscaba una generalización relativista de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (2.1)$$

Puesto que la ecuación era de primer orden respecto del tiempo, supuso que también debía ser de primer orden en las derivadas espaciales

$$H = -i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi + mc^2 \beta \psi \quad (2.2)$$

$\vec{\alpha}$  y  $\beta$  son cuatro objetos cuya naturaleza es por ahora desconocida. La densidad de probabilidad se asocia con  $\rho = \psi^\dagger \psi$ , y efectivamente

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger \psi = \psi^\dagger \left[ -c\vec{\alpha} \cdot \nabla \psi - i\frac{mc^2}{\hbar} \beta \psi \right] + \left[ -c\nabla \psi^\dagger \cdot \vec{\alpha}^\dagger - i\frac{mc^2}{\hbar} \psi^\dagger \beta^\dagger \right] \psi \quad (2.3)$$

de manera que si  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^\dagger$  y  $\beta^\dagger = \beta$ , efectivamente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j} \quad (2.4)$$

$$\vec{j} = c\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi \quad (2.5)$$

El próximo paso es obtener la relación de dispersión. Si escribimos

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi + \frac{imc}{\hbar} \beta \psi = 0 \quad (2.6)$$

y operamos a derecha con

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha} \cdot \nabla - \frac{imc}{\hbar} \beta \quad (2.7)$$

obtenemos

$$0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \{ \alpha^j, \alpha^k \} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{imc}{\hbar} \{ \alpha^k, \beta \} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \beta^2 \psi = 0 \quad (2.8)$$

Querriamos que ésto se reduzca a una ecuación tipo Klein-Gordon, para lo cual pedimos

$$\begin{aligned}\{\alpha^j, \alpha^k\} &= 2\delta^{jk} \mathbf{1} \\ \{\alpha^k, \beta\} &= 0 \\ \beta^2 &= \mathbf{1}\end{aligned}\tag{2.9}$$

Esto muestra que las  $\alpha^j$  y  $\beta$  no pueden ser números reales o complejos, pero todavía pueden ser matrices.

Se puede demostrar [1] que estas matrices deben ser de dimensión par. En dos dimensiones están las matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\tag{2.10}$$

que cumplen la primer condición, pero no podemos completar el problema encontrando la matriz  $\beta$ . En cuatro dimensiones, como vamos a ver, hay solución. Si hay una solución, hay infinitas, porque la transformación  $\beta \rightarrow S^{-1}\beta S$ , etc., respeta estas condiciones. En cuatro dimensiones, dos realizaciones de estas matrices siempre están relacionadas entre sí de esta manera.

Es posible dar a la ecuación para  $\psi$  una apariencia covariante definiendo

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \beta \\ \gamma^j &= \beta\alpha^j\end{aligned}\tag{2.11}$$

Entonces

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0\tag{2.12}$$

que es la *ecuación de Dirac*. Las matrices gama satisfacen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1}\tag{2.13}$$

## 2.2. Covariancia de la ecuación de Dirac

Ahora pedimos que la ecuación de Dirac sea *invariante de forma* bajo transformaciones de Lorentz. Es decir, que si bajo una transformación de Lorentz tenemos que  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ , entonces también

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \Lambda\psi(x)\tag{2.14}$$

de tal manera que

$$i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\psi' - mc\psi' = 0\tag{2.15}$$

con las mismas matrices gama. Usando la ley de transformación, encontramos que esto requiere que

$$\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\gamma^\nu\tag{2.16}$$

Si sólo consideramos transformaciones de Lorentz propias, basta verificar esto para una transformación infinitesimal, donde

$$\begin{aligned}x'^\mu &= x^\mu + \omega_\nu^\mu x^\nu \\ \Lambda &= \mathbf{1} + \frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\end{aligned}\tag{2.17}$$

Entonces

$$-\frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}[S^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = \omega_\nu^\mu\gamma^\nu\tag{2.18}$$

o

$$[S^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = i [\eta^{\mu\rho} \delta_{\sigma\lambda} - \eta^{\mu\sigma} \delta_{\rho\lambda}] \gamma^\lambda \quad (2.19)$$

con solución

$$S^{\rho\sigma} = \frac{i}{4} [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] \quad (2.20)$$

Decimos que el objeto  $\psi$  que se transforma de esta manera es un *espinor*.

### 2.3. El spin del espinor

En cuatro dimensiones podemos dar una representación explícita de las matrices  $\gamma$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

como se verifica a partir de la ley de multiplicación

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} \mathbf{1} + i \epsilon_{jkl} \sigma^l \quad (2.22)$$

Por otro lado, sabemos que

$$J_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kjl} S^{jl} \quad (2.23)$$

son los generadores de rotaciones ordinarias del espinor. Explícitamente

$$J_k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Pero las matrices  $\sigma^k/2$  generan el grupo  $SU(2)$ . De manera que dado un espinor de cuatro componentes, en la representación que estamos considerando, las dos primeras componentes por un lado, y las otras dos por otro, representan partículas de spin  $1/2$ .

Los generadores de boosts son

$$S^{0k} = -S^{k0} = \frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^k] = \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Los dos espinores de Weyl se transforman independientemente también bajo boosts.

### 2.4. Formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana

Para poder escribir un Lagrangiano para la ecuación de Dirac, necesitamos formar invariantes cuadráticos a partir del espinor  $\psi$ . Es decir, necesitamos un objeto  $\phi$  que se transforme bajo una transformación de Lorentz como

$$\phi'(x') = \phi(x) \Lambda^{-1} \quad (2.26)$$

de manera que  $\phi\psi$  se transforme como un escalar.

No esperamos que  $\psi^\dagger$  sirva porque  $\rho = \psi^\dagger\psi$  debería transformarse como la componente 0 de un tetravector, no como un escalar. Efectivamente, consideremos una transformación infinitesimal. Entonces

$$\psi'^\dagger(x') = \psi^\dagger(x) \left[ \mathbf{1} - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} S^{\dagger\rho\sigma} \right] \quad (2.27)$$

Para que esta sea la transformación buscada debería ser  $S^{\dagger\rho\sigma} = S^{\rho\sigma}$ , lo cual es cierto para los  $S^{jk}$ , pero no para los  $S^{0i}$ , que satisfacen  $S^{\dagger 0i} = -S^{0i}$ .

El objeto que estamos buscando es el *espinor adjunto* (o “adjunto de Pauli”)

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (2.28)$$

que se transforma como

$$\bar{\psi}'(x') = \psi^\dagger(x) \left[ \mathbf{1} - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} S^{\dagger\rho\sigma} \right] \gamma^0 \quad (2.29)$$

y funciona porque  $\gamma^0$  conmuta con los  $S^{jk}$  y anticonmuta con los  $S^{0i}$ . Ahora encontramos que  $\bar{\psi}\psi$  es un escalar, y  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  es un vector, por lo cual  $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$  también es un escalar.

Con estos datos, escribimos la densidad lagrangiana

$$L = i\hbar\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\bar{\psi}\psi \quad (2.30)$$

Es obvio que variando la acción respecto de  $\bar{\psi}$  obtenemos la ecuación de Dirac. Por otro lado, el momento conjugado a  $\psi$  es

$$\pi = \frac{i\hbar}{c}\psi^\dagger \quad (2.31)$$

Por lo cual el Hamiltoniano es

$$H = -ic\pi\gamma^0 \left[ -i\gamma^k\partial_k + \frac{mc}{\hbar} \right] \psi \quad (2.32)$$

Escribamos un espinor de Dirac en términos de dos espinores de Weyl

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Entonces

$$\bar{\psi} = \left( \psi_R^\dagger \quad \psi_L^\dagger \right) \quad (2.34)$$

y el lagrangiano se convierte en

$$i\hbar\psi_R^\dagger \left[ \frac{1}{c}\dot{\psi}_R + \sigma^k\partial_k\psi_R \right] + i\hbar\psi_L^\dagger \left[ \frac{1}{c}\dot{\psi}_L - \sigma^k\partial_k\psi_L \right] - mc \left[ \psi_R^\dagger\psi_L + \psi_L^\dagger\psi_R \right] \quad (2.35)$$

Vemos que sólo en el caso de campos con masa  $m = 0$  podemos desacoplar los dos espinores de Weyl.

En este caso vemos que para un espinor derecho una onda plana toma la forma

$$\frac{\omega}{c}\psi_R = k\hat{k} \cdot \sigma^k\psi_R \quad (2.36)$$

El operador  $\hat{k} \cdot \sigma^k$  es la *helicidad*. Por lo tanto, el espinor tiene helicidad 1 si es de frecuencia positiva, y  $-1$  si es de frecuencia negativa. En cambio, para un espinor izquierdo

$$\frac{\omega}{c}\psi_L = -k\hat{k} \cdot \sigma^k\psi_L \quad (2.37)$$

Por lo que la solución de frecuencia positiva tiene helicidad  $-1$  y la de frecuencia negativa  $+1$ . Estas soluciones se obtienen tomando el límite  $v \rightarrow c$  de la solución general, para frecuencia positiva, o  $v \rightarrow -c$  para frecuencia negativa.

## Capítulo 3

# Cuantificación canónica

### 3.1. El oscilador armónico

La manera habitual de encarar problemas en mecánica cuántica es mediante la *representación de Schrödinger*. El estado del sistema está descrito por un ket  $|\psi\rangle$  que evoluciona en el tiempo de acuerdo con la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad (3.1)$$

Si  $H$  es independiente del tiempo esta ecuación admite la solución formal

$$|\psi\rangle (t) = U (t) |\psi\rangle (0) \quad (3.2)$$

donde

$$U (t) = e^{-iHt/\hbar} \quad (3.3)$$

En teoría de campos es más común trabajar en representación de Heisenberg, donde el estado se define como  $|\psi\rangle (0)$  y no evoluciona, pero en cambio sí evolucionan los operadores asociados con observables, de acuerdo con la ley

$$A (t) = U^\dagger (t) A (0) U (t) \quad (3.4)$$

Lo cual conduce a la ecuación de movimiento, si  $A$  no depende explícitamente del tiempo

$$\dot{A} = \frac{i}{\hbar} [H, A] \quad (3.5)$$

Por ejemplo consideremos un oscilador armónico. El Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (3.6)$$

$p$  y  $q$  obedecen las reglas de conmutación canónicas

$$[p, q] = -i\hbar \quad (3.7)$$

Como el Hamiltoniano es cuadrático, las ecuaciones de Heisenberg son formalmente las mismas que las ecuaciones clásicas, lo cual es el Teorema de Ehrenfest. Eso nos permite escribir directamente la solución

$$q (t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}] \quad (3.8)$$

y puesto que  $p = m\dot{q}$

$$p (t) = (-i) \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} [ae^{-i\omega t} - a^\dagger e^{i\omega t}] \quad (3.9)$$

Nótese que naturalmente aparece una componente de *frecuencia negativa*. Por ahora llamemos

$$a (t) = ae^{-i\omega t} \quad (3.10)$$

Entonces escribimos simplemente

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [a + a^\dagger] \\ p &= (-i) \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} [a - a^\dagger] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Invirtiendo

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} q + i \sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} p \\ a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} q - i \sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} p \end{aligned} \quad (3.12)$$

Lo cual conduce a la ley de conmutación

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (3.13)$$

Reemplazando  $p$  y  $q$  en el Hamiltoniano y usando esta ley de conmutación obtenemos

$$H = \hbar\omega \left[ a^\dagger a + \frac{1}{2} \right] \quad (3.14)$$

En esta representación, vemos que los autoestados del Hamiltoniano se pueden pensar como estados de muchas partículas. El estado fundamental es el *vacío*

$$a |0\rangle = 0 \quad (3.15)$$

que tiene una *energía de punto cero*  $E_0 = \hbar\omega/2$ . Los estados excitados se encuentran actuando con  $a^\dagger$  sobre el estado de vacío

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{\dagger n} |0\rangle \quad (3.16)$$

y tienen una energía

$$E_n = E_0 + n\hbar\omega \quad (3.17)$$

Decimos que  $n$  es el *número de fonones*, y que  $N = a^\dagger a$  es el *operador número de fonones*.

Finalmente,

$$\dot{a} = \frac{i}{\hbar} [H, a] = -i\omega a \quad (3.18)$$

de donde recuperamos 3.10. Nótese que  $a^\dagger$  agrega un fonón al estado del sistema. El orden en que se agregan los fonones es irrelevante, por lo cual concluimos que los fonones son partículas indistinguibles, y obedecen la estadística de Bose-Einstein. Decimos que  $a^\dagger$  es el *operador de creación*.

En cambio,  $a$  retira un fonón del sistema, ya que

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (3.19)$$

Decimos que  $a$  es el *operador de destrucción*.

Resumiendo

- $q$  se descompone en una onda de frecuencia positiva y otra de frecuencia negativa.
- La componente de frecuencia positiva define al operador de *destrucción*.
- Existe una base de estados en que los elementos de la base tienen número de fonones bien definido
- El estado fundamental es el estado que carece de fonones, y tiene una energía no nula.
- Los fonones son partículas indistinguibles y obedecen la estadística de Bose-Einstein.

La base que diagonaliza el número de fonones es la *base de Fock*.

### 3.2. El campo de Klein-Gordon

Finalmente encontramos la primer teoría cuántica de campos en el curso. La elegida es la teoría del campo real de Klein-Gordon.

La teoría proviene de la acción

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^3x \left\{ -c^2 \eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \phi^2 \right\} \quad (3.20)$$

que conduce a la ecuación de Klein-Gordon

$$-c^2 \square \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0 \quad (3.21)$$

Hemos normalizado la energía de tal manera que las unidades de  $\phi$  son  $[\phi] = [\sqrt{\hbar/V}] T^{1/2}$ .

El momento canónico conjugado a  $\phi(x)$  es

$$\pi = \dot{\phi} \quad (3.22)$$

Por lo tanto el Hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \int d^3x \frac{1}{2} \left\{ \pi^2 + c^2 (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \phi^2 \right\} \quad (3.23)$$

Para las manipulaciones que siguen, es más cómodo hacer una descomposición de Fourier. Introducimos las soluciones de ondas planas de *frecuencia positiva* de la ecuación de Klein-Gordon

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{e^{ik_{\mu}x^{\mu}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} = \frac{e^{i[\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t]}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \quad (3.24)$$

donde

$$k^0 = \frac{1}{c} \omega_{\mathbf{k}} \quad (3.25)$$

y

$$\omega_{\mathbf{k}} = +\sqrt{c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} \quad (3.26)$$

La normalización se elige para que las  $f_{\mathbf{k}}$  sean ortogonales respecto al producto de Klein-Gordon

$$(g, f) = i \int d^3x \left\{ g^* \dot{f} - \dot{g} f^* \right\} \quad (3.27)$$

Efectivamente

$$\begin{aligned} (f_{\mathbf{k}'}, f_{\mathbf{k}}) &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ (f_{\mathbf{k}'}, f_{\mathbf{k}}^*) &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Como nos restringimos a frecuencia positiva, las  $f_{\mathbf{k}}$  no son una base completa de soluciones; para que lo sea, debemos agregar las soluciones de *frecuencia negativa*  $f_{\mathbf{k}}^*$ . Como de todas formas el campo  $\phi$  debe ser hermítico, escribimos

$$\phi = \sqrt{\hbar} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ a_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} f_{\mathbf{k}}^* \right] \quad (3.29)$$

Por las unidades de  $\phi$  deducimos que los operadores  $a$  y  $a^{\dagger}$  tienen unidades  $[a] = [a^{\dagger}] = \sqrt{V}$ . Además, la descomposición del campo se puede invertir utilizando el producto de Klein-Gordon

$$\sqrt{\hbar} a_{\mathbf{k}} = (f_{\mathbf{k}}, \phi) \quad (3.30)$$

Similarmente

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\hbar} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (-i\omega_k) \left[ a_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} - a_{\mathbf{k}}^\dagger f_{\mathbf{k}}^* \right] \quad (3.31)$$

El Hamiltoniano se convierte en

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} \hbar \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \\ & \left\{ [-\omega_k \omega_{k'} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'] \left[ a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'} \int d^3x f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'} - a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger \int d^3x f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'}^* - a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} \int d^3x f_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{k}'} + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}^\dagger \int d^3x f_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{k}'}^* \right] \right. \\ & \left. + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \left[ a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'} \int d^3x f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger \int d^3x f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'}^* + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} \int d^3x f_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{k}'} + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}^\dagger \int d^3x f_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{k}'}^* \right] \right\} \quad (3.32) \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \int d^3x f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'}^* &= \int d^3x f_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{k}'} = \frac{(2\pi)^3}{2\omega_k} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ \int d^3x f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'} &= \frac{(2\pi)^3}{2\omega_k} e^{-2i\omega_k t} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \\ \int d^3x f_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{k}'}^* &= \frac{(2\pi)^3}{2\omega_k} e^{2i\omega_k t} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (3.33) \end{aligned}$$

de manera que

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hbar \omega_k \left[ a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \right] \quad (3.34)$$

Vemos que podemos reducir ésto a una forma definida positiva imponiendo relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] &= [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \quad (3.35) \end{aligned}$$

de manera que el hamiltoniano deviene

$$\mathcal{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hbar \omega_k a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} \hbar \omega_k \quad (3.36)$$

donde hemos identificado  $\delta(\mathbf{k})|_{\mathbf{k}=0}$  con el volumen de la caja que contiene al campo (que, por supuesto, es infinito).

Vemos que efectivamente  $a_{\mathbf{k}}$  puede interpretarse como el operador que destruye una partícula de momento  $\hbar \mathbf{k}$ , mientras que  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  es el operador de creación correspondiente. Como los  $a_{\mathbf{k}}$  conmutan entre sí, todos comparten el mismo autovector nulo

$$a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k} \quad (3.37)$$

que es el estado fundamental de la teoría. Como el orden en que los fonones son agregados al sistema es irrelevante, y podemos agregar una cantidad arbitraria de fonones en cada modo, encontramos que los fonones son partículas indistinguibles que obedecen la estadística de Bose-Einstein.

De las relaciones de conmutación para los operadores de creación y de destrucción deducimos que  $\phi$  y  $\pi$  son operadores hermíticos satisfaciendo la regla de conmutación

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = -i\hbar \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.38)$$

Con

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = 0 \quad (3.39)$$

### 3.2.1. El efecto Casimir

Supongamos que discretizamos los modos del campo imponiendo condiciones de contorno nulas sobre las tapas de la susodicha caja. Entonces la energía de punto cero

$$E_0 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \quad (3.40)$$

es violentamente divergente (¡nuestro primer infinito!). Una estaría tentada de barrerla bajo la alfombra argumentando que la energía está definida a menos de una constante aditiva en todo caso, pero eso sería incorrecto, porque la energía de punto cero es distinta para distintas periodicidades  $L$ . De manera que uno podría usar ese argumento para descartar la energía de punto cero, por ejemplo, en el límite  $L \rightarrow \infty$ , pero debe lidiar con ella si  $L$  permanece finito.

Un problema similar, pero más tratable, es cuando un campo sin masa está confinado entre dos placas paralelas a distancia  $L$ , con condiciones de contorno nulas sobre las placas. En este caso, sorprendentemente, es posible evaluar la diferencia de las energías de punto cero entre el caso en que  $L$  es finito y el límite  $L \rightarrow \infty$  [5], es decir

$$\Delta E_0 = \int \frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2} \left\{ \sum_n \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + k_y^2 + k_z^2} - \int \frac{dk_x}{2\pi i} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right\} \quad (3.41)$$

Sin hacer las cuentas, es razonable esperar que la energía residual  $\Delta E_0$  sea negativa (al aumentar  $L$  aparecen modos que antes no estaban), y que sea proporcional al área de las placas, ya que la energía es aditiva. Con las condiciones de contorno nulas, ninguna propiedad de las placas entra en el problema, excepto la distancia entre ellas. Por lo tanto la energía sólo puede depender del área  $A$  de las placas, la distancia  $L$ , y las constantes universales  $\hbar$  y  $c$ . Por análisis dimensional encontramos

$$\Delta E_0 = -\alpha \frac{\hbar c}{L^3} A \quad (3.42)$$

con  $\alpha$  un coeficiente numérico. Pero entonces aparece una fuerza atractiva entre las placas

$$F = -\frac{d\Delta E_0}{dL} = -\alpha \frac{\hbar c}{L^4} A \quad (3.43)$$

La aparición de esta fuerza es el *efecto Casimir*, y ha sido verificada experimentalmente.

### 3.2.2. La invariancia, bien gracias

Una característica notable de la cuantificación canónica es que, desde la adopción de las reglas de conmutación 3.38, todo intento de hacer explícita la invariancia Lorentz de la teoría es tirado por la borda, y sin embargo la teoría es invariante Lorentz. Sin pretender una demostración formal, vamos a hacer este enunciado más verosímil calculando el conmutador de los campos en dos eventos arbitrarios  $(\mathbf{x}, t)$  y  $(\mathbf{x}', t')$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t')] = (2\pi) \hbar \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta\left(-c^2 k^2 - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}\right) \theta(k^0) \left[ e^{ik_\mu(x-x')^\mu} - e^{-ik_\mu(x-x')^\mu} \right] \quad (3.44)$$

esta expresión es explícitamente invariante frente a transformaciones de Lorentz propias. Si  $x - x'$  es espacial, siempre podemos elegir un referencial en que  $t = t'$  y el conmutador se anula. Esto muestra que  $\phi(\mathbf{x}, t)$  y  $\phi(\mathbf{x}', t')$  siempre conmutan (y pueden observarse simultáneamente) si un evento está fuera del cono de la luz del otro.

Si  $x - x'$  es temporal, siempre podemos elegir un referencial donde  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ . Supongamos que  $s = t - t' > 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t')] &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}} (e^{-i\omega_{\mathbf{k}} s} - e^{i\omega_{\mathbf{k}} s}) \\ &= \frac{\hbar}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega_{\mathbf{k}}} (e^{-i\omega_{\mathbf{k}} s} - e^{i\omega_{\mathbf{k}} s}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

La integral se puede expresar en términos de funciones de Bessel, pero no vale la pena continuar ahora, porque más adelante vamos a ver una manera más eficiente de llegar al mismo resultado.

### 3.3. El campo de Klein-Gordon complejo: partículas y antipartículas.

Ahora consideramos el campo de Klein-Gordon complejo. La acción

$$S = \int d^4x \left\{ -c^2 \eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu}^* \phi_{,\nu} - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \phi^* \phi \right\} \quad (3.46)$$

Los momentos conjugados son

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow \pi &= \phi_{,0}^* \\ \phi^* \rightarrow \pi^* &= \phi_{,0} \end{aligned} \quad (3.47)$$

El Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \int d^3x \left\{ \phi_{,t}^* \phi_{,t} + c^2 \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \phi^* \phi \right\} \quad (3.48)$$

Como antes, desarrollamos el campo en ondas planas

$$\phi = \sqrt{\hbar} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ a_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger f_{\mathbf{k}}^* \right] \quad (3.49)$$

sólo que ahora, como  $\phi$  no es hermítico, pensamos a  $a_{\mathbf{k}}$  y  $b_{\mathbf{k}}$  como operadores independientes. Desarrollando y usando las integrales ec. (3.33) obtenemos

$$\mathcal{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left[ a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger \right] \quad (3.50)$$

que se reduce a orden normal (los operadores de creación a la izquierda de los operadores de destrucción) con las reglas de conmutación

$$\left[ a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger \right] = \left[ b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^\dagger \right] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (3.51)$$

y todas las otras cero, de manera que tenemos dos tipos de partículas distintas, ambas bosónicas, sin spin y con la misma masa, unas destruidas por  $a_{\mathbf{k}}$  y las otras por  $b_{\mathbf{k}}$ . Para ver en qué se diferencian calculamos la carga

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x (i) \left[ \phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi}^* \phi \right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hbar \left[ a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} - b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

Lo que diferencia a las dos partículas es que sus cargas son opuestas. Decimos que una es la antipartícula de la otra.

El hecho de que cada partícula deba tener una antipartícula es una consecuencia directa de la invariancia Lorentz. Un campo de Klein-Gordon real es su propia antipartícula, decimos que es una partícula *realmente neutra*.

### 3.4. El campo de Dirac

Finalmente consideramos el campo de Dirac. La acción

$$S = \int d^4x \bar{\psi} \{ i \hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m c^2 \psi \} \quad (3.53)$$

El momento conjugado a  $\psi$  es

$$\pi = i \hbar \bar{\psi} \gamma^0 \quad (3.54)$$

De modo que el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \int d^3x \bar{\psi} \{ -i \hbar \gamma^k \partial_k \psi + m c^2 \bar{\psi} \psi \} \quad (3.55)$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0$$

Para continuar necesitamos una base de soluciones de la ecuación de Dirac. Como la ecuación de Dirac es invariante frente a traslaciones, buscamos una base de ondas planas, parametrizadas por un vector  $\mathbf{k}$  y obedeciendo la relación de dispersión  $k^0 = \pm\omega_{\mathbf{k}} = \pm\sqrt{c^2\mathbf{k}^2 + m^2c^4/\hbar^2}$ . Como un espinor de Dirac tiene cuatro componentes, esperamos que para cada valor  $\mathbf{k}$  habrá cuatro soluciones linealmente independientes. Dos de estas soluciones corresponden a ondas de frecuencia positiva

$$u_{s\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}} \quad (3.56)$$

donde las  $f$ 's son las ondas planas definidas en la ec. (3.24) y  $u_{s\mathbf{k}}$  es un espinor constante, y dos corresponden a soluciones de frecuencia negativa

$$v_{s\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}}^* \quad (3.57)$$

Entonces escribimos

$$\psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \left[ a_{s\mathbf{k}}u_{s\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}} + b_{s\mathbf{k}}^\dagger v_{s\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}}^* \right] \quad (3.58)$$

Para escribir el Hamiltoniano, observamos que

$$\begin{aligned} \{-i\gamma^k\partial_k\psi + mc\psi\} f_{\mathbf{k}}u_{s\mathbf{k}} &= i\gamma^0\partial_t f_{\mathbf{k}}u_{s\mathbf{k}} = \gamma^0\omega_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}}u_{s\mathbf{k}} \\ \{-i\gamma^k\partial_k\psi + mc\psi\} f_{\mathbf{k}}^*v_{s\mathbf{k}} &= i\gamma^0\partial_t f_{\mathbf{k}}^*v_{s\mathbf{k}} = -\gamma^0\omega_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}}^*v_{s\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Además, normalizamos los espinores  $u, v$  de manera que

$$\begin{aligned} u_{s'\mathbf{k}}^\dagger u_{s\mathbf{k}} &= v_{s'\mathbf{k}}^\dagger v_{s\mathbf{k}} = 2\omega_{\mathbf{k}}\delta_{s's} \\ u_{s'\mathbf{k}}^\dagger v_{s\mathbf{k}} &= v_{s'\mathbf{k}}^\dagger u_{s\mathbf{k}} = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

El Hamiltoniano se convierte es

$$\mathcal{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left[ a_{\mathbf{k}}^{s\dagger} a_{\mathbf{k}}^s - b_{\mathbf{k}}^s b_{\mathbf{k}}^{s\dagger} \right] \quad (3.61)$$

Y vemos que asumir relaciones de conmutación entre los operadores de creación y destrucción conduce a una energía que no es definida positiva. La alternativa es asumir reglas de *anticomutación*

$$\left\{ a_{\mathbf{k}'}^{s'\dagger}, a_{\mathbf{k}}^s \right\} = \left\{ b_{\mathbf{k}'}^{s'\dagger}, b_{\mathbf{k}}^s \right\} = \delta^{s's} \delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} \quad (3.62)$$

y todos los otros anticonmutadores iguales a cero.

Una consecuencia de las relaciones de anticonmutación es que un estado de muchas partículas depende del orden en que las partículas fueron creadas

$$a_{\mathbf{k}'}^{s'\dagger} a_{\mathbf{k}}^{s\dagger} |0\rangle = -a_{\mathbf{k}}^{s\dagger} a_{\mathbf{k}'}^{s'\dagger} |0\rangle \quad (3.63)$$

por lo cual estas partículas obedecen la estadística de Fermi-Dirac. En particular, se cumple el *principio de Pauli*: no es posible crear una partícula en un estado que ya está ocupado.

Las partículas que crean los  $b_{\mathbf{k}}^{s\dagger}$  son las antipartículas de las que crean los  $a_{\mathbf{k}}^{s\dagger}$ , como puede verse calculando la carga total

$$Q = \int d^3x \bar{\psi}\gamma^0\psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \hbar \left\{ a_{\mathbf{k}}^{s\dagger} a_{\mathbf{k}}^s - b_{\mathbf{k}}^{s\dagger} b_{\mathbf{k}}^s \right\} \quad (3.64)$$

donde hemos descartado una “carga de punto cero” divergente.

Los dos casos de cuantización que hemos estudiado, el campo de Klein-Gordon y el campo de Dirac, son casos simples de un resultado más general, el *Teorema de Spin-Estadística*, que dice que campos de spin entero describen bosones, y campos de spin semientero describen fermiones. Para más detalles, ver [6].

### 3.4.1. Construyendo la base

En el argumento anterior asumimos que podíamos normalizar los espinores de la base según 3.60, pero en realidad hay que demostrarlo.

Si descomponemos el espinor de Dirac en dos espinores de Weyl

$$u = \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

Entonces la ecuación para la amplitud es

$$\begin{aligned} [\omega_k - c\mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}] u_R &= \frac{mc^2}{\hbar} u_L \\ [\omega_k + c\mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}] u_L &= \frac{mc^2}{\hbar} u_R \end{aligned} \quad (3.66)$$

Mientras valga la relación de dispersión

$$\omega_k^2 - c^2 k^2 = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \quad (3.67)$$

estas ecuaciones son equivalentes. Por lo tanto, podemos escoger arbitrariamente  $u_L$  y determinar  $u_R$  a partir de las ecuaciones.

Las matrices  $\omega_k \pm c\mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}$  son definidas positivas y por lo tanto poseen matrices cuadradas. Entonces podemos escribir ( $s = \pm 1$ )

$$u_{L\mathbf{k}}^s = \sqrt{\omega_k - c\mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w^s \quad (3.68)$$

donde  $w^s$  es una base de espinores de Weyl. Asumimos que  $w^{s'\dagger} w^s = \delta^{s's}$ . Entonces

$$u_{R\mathbf{k}}^s = \sqrt{\omega_k + c\mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w^s \quad (3.69)$$

Es fácil ver que efectivamente  $w_{s'\mathbf{k}}^\dagger u_{s\mathbf{k}} = 2\omega_k \delta_{s's}$ .

Las soluciones de frecuencia negativa dependen de la posición como  $f_{\mathbf{k}}^* v_{s\mathbf{k}}$  y por lo tanto la ecuación para las amplitudes es

$$\begin{aligned} [\omega_k - c\mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}] v_R &= -\frac{mc^2}{\hbar} v_L \\ [\omega_k + c\mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}] v_L &= -\frac{mc^2}{\hbar} v_R \end{aligned} \quad (3.70)$$

De manera que ahora escribimos

$$v_{L\mathbf{k}}^s = \sqrt{\omega_k - c\mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w'^s \quad (3.71)$$

donde  $w'^s$  es otra base normalizada de espinores de Weyl, y entonces

$$v_{R\mathbf{k}}^s = -\sqrt{\omega_k + c\mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w'^s \quad (3.72)$$

Otra vez es fácil ver que  $v_{s'\mathbf{k}}^\dagger v_{s\mathbf{k}} = 2\omega_k \delta_{s's}$ , y también que se satisfacen las restantes condiciones 3.60.

## 3.5. El espinor de Majorana

Un espinor de Majorana  $\nu$  es a un espinor de Dirac lo que un campo de Klein-Gordon real es a un campo de Klein-Gordon complejo.

Si  $\psi_L$  es un espinor de Weyl izquierdo, entonces  $\sigma_2 \psi_L^*$  es un espinor de Weyl derecho. El espinor de Majorana es “real” en el sentido que

$$\nu_R = i\sigma_2 \nu_L^* \quad (3.73)$$

En términos de operadores de creación y destrucción

$$\begin{aligned}
\nu_L &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \frac{\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{c} - \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}}}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ e^{ik_\mu x^\mu} a_{\mathbf{k}}^s w^s + e^{-ik_\mu x^\mu} b_{\mathbf{k}}^{s\dagger} w'^s \right] \\
\nu_R &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \frac{\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{c} + \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}}}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ e^{ik_\mu x^\mu} a_{\mathbf{k}}^s w^s - e^{-ik_\mu x^\mu} b_{\mathbf{k}}^{s\dagger} w'^s \right]
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Por lo tanto

$$\nu_L^* = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \frac{\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{c} - \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}^*}}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ e^{-ik_\mu x^\mu} a_{\mathbf{k}}^{s\dagger} w^{s*} + e^{ik_\mu x^\mu} b_{\mathbf{k}}^s w'^{s*} \right] \tag{3.75}$$

De manera que, si

$$w^s = i\sigma_2 w'^{s*} \tag{3.76}$$

(que implica que  $w'^{s*} = -i\sigma_2 w^{s*}$ ), en esta representación un espinor de Majorana es un espinor de Dirac con  $b_{\mathbf{k}}^s = a_{\mathbf{k}}^s$ . Este espinor tiene masa pero es eléctricamente neutro.

Los espinores de Majorana son interesantes porque

- La historia de Majorana es interesante, ver [7].
- Los spinores de Majorana dan la oportunidad de describir campos masivos de spin 1/2 para los cuales partículas y antipartículas son la misma partícula. Eso es interesante en el caso del neutrino, que tiene masa y sin embargo sólo se conocen sus componentes izquierdas. Si el neutrino fuese un spinor de Dirac, sería necesario explicar porqué no se han observado neutrinos derechos hasta hoy, ver [8].
- En materiales como el grafeno aparecen excitaciones colectivas que no obedecen ecuaciones de ondas sino ecuaciones lineales en la energía y el impulso. Estas excitaciones (aunque son no-relativistas) se podrían describir como espinores de Majorana, ver [9].

## Capítulo 4

# Matriz de Scattering y fórmula LSZ

### 4.1. Matriz de Scattering

Para fijar ideas, vamos a considerar un campo escalar, pero ahora aceptando la posibilidad de autointeracciones y/o de la acción de fuerzas externas. En esas condiciones, el operador de campo en representación de Heisenberg ya no obedece la ecuación de Klein-Gordon. Sin embargo, vamos a asumir que sí es posible aproximar al verdadero operados de Heisenberg por un campo libre cuando  $t \rightarrow -\infty$ , y por (otro) campo libre cuando  $t \rightarrow \infty$ . De esa manera encontramos dos campos libres, que vamos a llamar *IN* y *OUT*, respectivamente, a partir de los cuales vamos a poder introducir dos modelos de partículas

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ a_{IN\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(x) + a_{IN\mathbf{k}}^\dagger f_{\mathbf{k}}^*(x) \right] \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ a_{OUT\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(x) + a_{OUT\mathbf{k}}^\dagger f_{\mathbf{k}}^*(x) \right]\end{aligned}\quad (4.1)$$

con

$$f_{\mathbf{k}}(x) = \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \quad (4.2)$$

$\omega_{\mathbf{k}} = k^0 > 0$ ,  $-k^2 = m^2$ . Como en el caso de Klein-Gordon, los operadores de destrucción se recuperan tomando producto de Klein-Gordon entre las funciones de la base con el operador de campo. La diferencia es que mientras que para un verdadero campo libre el producto se puede tomar en cualquier momento, ahora sólo tiene sentido en la zona asintótica correspondiente

$$\begin{aligned}a_{IN\mathbf{k}} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x i (f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t) \partial_t \phi(\mathbf{x}, t) - \phi(\mathbf{x}, t) \partial_t f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t)) \\ a_{OUT\mathbf{k}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3x i (f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t) \partial_t \phi(\mathbf{x}, t) - \phi(\mathbf{x}, t) \partial_t f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t))\end{aligned}\quad (4.3)$$

Cada modelo de partículas va a contener un estado de vacío

$$a_{IN\mathbf{k}} |0 IN\rangle = a_{OUT\mathbf{k}} |0 OUT\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k} \quad (4.4)$$

Podemos construir dos bases de Fock operando sobre los vacíos con los operadores de creación de cada modelo.

$$\begin{aligned}|\{n_{\mathbf{k}}\} IN\rangle &= \prod_{\mathbf{k}} \left[ \frac{(a_{IN\mathbf{k}}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k}}!}} \right] |0 IN\rangle \\ |\{m_{\mathbf{k}}\} OUT\rangle &= \prod_{\mathbf{k}} \left[ \frac{(a_{OUT\mathbf{k}}^\dagger)^{m_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{m_{\mathbf{k}}!}} \right] |0 OUT\rangle\end{aligned}\quad (4.5)$$

La *matriz de scattering* es la matriz de las amplitudes de transición de un dado estado IN a otro dado estado out

$$S_{\{m_{\mathbf{k}}\},\{n_{\mathbf{k}}\}} = \langle \{m_{\mathbf{k}}\} OUT | \{n_{\mathbf{k}}\} IN \rangle \quad (4.6)$$

El objetivo de la teoría cuántica de campos es desarrollar herramientas para calcular la matriz de scattering en situaciones concretas.

## 4.2. La fórmula de reducción LSZ

Un paso fundamental en el cálculo de la matriz de scattering está dado por la *fórmula de reducción LSZ* (por Lehmann, Symanzik y Zimmerman). La idea es encontrar una fórmula de recurrencia que permite calcular un elemento dado de la matriz de scattering en términos de amplitudes de transición que involucran un número menor de partículas.

Supongamos que queremos calcular la amplitud de transición entre un estado que tiene  $n$  partículas IN en el modo  $\mathbf{k}$  y otro que tiene  $m$  partículas OUT en el mismo modo;  $m$  puede ser cero. Para simplificar, vamos a ignorar los otros modos del campo. Ahora

$$\begin{aligned} \langle m OUT | n IN \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} \langle m OUT | a_{IN\mathbf{k}}^\dagger | n-1 IN \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \langle m OUT | a_{OUT\mathbf{k}}^\dagger + a_{IN\mathbf{k}}^\dagger - a_{OUT\mathbf{k}}^\dagger | n-1 IN \rangle \\ &= \sqrt{\frac{m}{n}} \langle m-1 OUT | n-1 IN \rangle + \frac{1}{\sqrt{n}} \langle m OUT | a_{IN\mathbf{k}}^\dagger - a_{OUT\mathbf{k}}^\dagger | n-1 IN \rangle \end{aligned} \quad (4.7)$$

El primer término representa un proceso en el que la partícula en cuestión simplemente atraviesa la zona de interacción y emerge en la zona OUT; no vamos a analizarlo más en detalle. En el otro término observamos que

$$\begin{aligned} a_{OUT\mathbf{k}}^\dagger - a_{IN\mathbf{k}}^\dagger &= (-i) \int d^3x [f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \infty) \partial_t \phi(\mathbf{x}, \infty) - \phi(\mathbf{x}, \infty) \partial_t f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \infty) \\ &\quad - f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, -\infty) \partial_t \phi(\mathbf{x}, -\infty) + \phi(\mathbf{x}, -\infty) \partial_t f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, -\infty)] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Que usando el Teorema Fundamental del Cálculo se convierte en

$$\begin{aligned} a_{OUT\mathbf{k}}^\dagger - a_{IN\mathbf{k}}^\dagger &= (-i) \int d^4x \partial_t [f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) \partial_t \phi(\mathbf{x}, t) - \phi(\mathbf{x}, t) \partial_t f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)] \\ &= (-i) \int d^4x [f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) \partial_t^2 \phi(\mathbf{x}, t) - \phi(\mathbf{x}, t) \partial_t^2 f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ahora,  $f_{\mathbf{k}}$  es una solución de Klein-Gordon, de manera que

$$\partial_t^2 f_{\mathbf{k}} = [\Delta - m^2] f_{\mathbf{k}} \quad (4.10)$$

Integrando por partes las derivadas espaciales, encontramos que

$$a_{OUT\mathbf{k}}^\dagger - a_{IN\mathbf{k}}^\dagger = (-i) \int d^4x f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) [-\square + m^2] \phi(\mathbf{x}, t) \quad (4.11)$$

que por supuesto valdría cero si  $\phi$  fuese un campo libre. En resumen, el resultado hasta ahora es que

$$\begin{aligned} \langle m OUT | n IN \rangle &= \sqrt{\frac{m}{n}} \langle m-1 OUT | n-1 IN \rangle \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{n}} \int d^4x f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) [-\square + m^2] \langle m OUT | \phi(\mathbf{x}, t) | n-1 IN \rangle \end{aligned} \quad (4.12)$$

### 4.2.1. El próximo paso

Ahora tenemos que mostrar que podemos simplificar objetos de la forma

$$\langle m \text{ OUT} | \phi(\mathbf{x}, t) | n \text{ IN} \rangle \quad (4.13)$$

de una manera similar.

Para variar, supongamos que nuestro objetivo es reducir el número de partículas en la zona OUT. Entonces, decimos que

$$\begin{aligned} \langle m \text{ OUT} | \phi(\mathbf{x}, t) | n \text{ IN} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{m}} \langle m-1 \text{ OUT} | a_{OUT\mathbf{k}} \phi(\mathbf{x}, t) | n \text{ IN} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{m}} \langle m-1 \text{ OUT} | \phi(\mathbf{x}, t) a_{IN\mathbf{k}} | n \text{ IN} \rangle \\ &+ \frac{1}{\sqrt{m}} \langle m-1 \text{ OUT} | a_{OUT\mathbf{k}} \phi(\mathbf{x}, t) - \phi(\mathbf{x}, t) a_{IN\mathbf{k}} | n \text{ IN} \rangle \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nuevamente, el primer término describe un proceso en el que una partícula simplemente pasa de largo por la zona de interacción. En cuando al segundo, tenemos que

$$\begin{aligned} a_{OUT\mathbf{k}} \phi(\mathbf{x}, t) - \phi(\mathbf{x}, t) a_{IN\mathbf{k}} &= i \int d^3x' [f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}', \infty) \partial_t \phi(\mathbf{x}', \infty) \phi(\mathbf{x}, t) - \partial_t f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}', \infty) \phi(\mathbf{x}', \infty) \phi(\mathbf{x}, t) \\ &- f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}', -\infty) \phi(\mathbf{x}, t) \partial_t \phi(\mathbf{x}', -\infty) + \partial_t f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}', -\infty) \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}', -\infty)] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Si definimos el *producto ordenado temporalmente*

$$\begin{aligned} T(\phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}', t')) &= \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}', t') \theta(t-t') \\ &+ \phi(\mathbf{x}', t') \phi(\mathbf{x}, t) \theta(t'-t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

y repetimos los pasos anteriores, llegamos a

$$a_{OUT\mathbf{k}} \phi(\mathbf{x}, t) - \phi(\mathbf{x}, t) a_{IN\mathbf{k}} = i \int d^4x' f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}', t') [-\square' + m^2] T(\phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}', t')) \quad (4.17)$$

De esta manera vemos que es posible eliminar una por una todas las partículas en los estados inicial y final. La amplitud de scattering va a ser una suma de términos en los que algunas partículas pasan de largo, mientras que la parte no trivial se va a expresar en términos del elemento de matriz del producto de operadores de campo ordenados temporalmente (uno por cada partícula en los estados inicial y final que no siga de largo) entre los *vacíos IN* y *OUT*.

## 4.3. La fórmula LSZ para fermiones

El campo de Dirac puede desarrollarse en términos de operadores de creación y destrucción como

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_s [a_{s\mathbf{k}} U_{s\mathbf{k}}(x) + b_{s\mathbf{k}}^\dagger V_{s\mathbf{k}}(x)] \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_s [a_{s\mathbf{k}}^\dagger \bar{U}_{s\mathbf{k}}(x) + b_{s\mathbf{k}} \bar{V}_{s\mathbf{k}}(x)] \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde

$$U_{s\mathbf{k}}(x) = e^{ik_\mu x^\mu} u_{s\mathbf{k}} \quad (4.19)$$

representan las soluciones de frecuencia positiva, y

$$V_{s\mathbf{k}}(x) = e^{-ik_\mu x^\mu} v_{s\mathbf{k}} \quad (4.20)$$

las de frecuencia negativa. Introduciendo un producto interno

$$(\psi', \psi) = \int d^3x \psi'^{\dagger} \psi = \int d^3x \bar{\psi}' \gamma^0 \psi \quad (4.21)$$

Los espinores de la base obedecen la normalización

$$\begin{aligned} (U_{s'\mathbf{k}'}, U_{s\mathbf{k}}) &= (V_{s'\mathbf{k}'}, V_{s\mathbf{k}}) = \delta_{s's} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \\ (V_{s'\mathbf{k}'}, U_{s\mathbf{k}}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

de donde podemos recuperar

$$a_{s\mathbf{k}} = (U_{s\mathbf{k}}, \psi) \quad (4.23)$$

Etc.

La introducción de los modelos *IN* y *OUT* es similar a lo que hemos hecho para el campo escalar. Ahora, por supuesto, los números de ocupación solo pueden ser 0 o 1. Por ejemplo, para eliminar una partícula del estado final hacemos

$$\begin{aligned} \langle 1 \text{ OUT} | n \text{ IN} \rangle &= \langle 0 \text{ OUT} | a_{s\mathbf{k}\text{OUT}} | n \text{ IN} \rangle \\ &= \langle 0 \text{ OUT} | a_{s\mathbf{k}\text{IN}} + a_{s\mathbf{k}\text{OUT}} - a_{s\mathbf{k}\text{IN}} | n \text{ IN} \rangle \\ &= \sqrt{n} \langle 0 \text{ OUT} | n - 1 \text{ IN} \rangle + \langle 0 \text{ OUT} | a_{s\mathbf{k}\text{OUT}} - a_{s\mathbf{k}\text{IN}} | n \text{ IN} \rangle \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ahora

$$\begin{aligned} a_{s\mathbf{k}\text{OUT}} - a_{s\mathbf{k}\text{IN}} &= \int d^3x [\bar{U}_{s\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \infty) \gamma^0 \psi(\mathbf{x}, \infty) - \bar{U}_{s\mathbf{k}}(\mathbf{x}, -\infty) \gamma^0 \psi(\mathbf{x}, -\infty)] \\ &= \int d^4x \partial_t [\bar{U}_{s\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) \gamma^0 \psi(\mathbf{x}, t)] \\ &= (-i) \int d^4x \bar{U}_{s\mathbf{k}} [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \psi \end{aligned} \quad (4.25)$$

En una segunda iteración, vamos a querer calcular valores de expectación del tipo

$$\langle m \text{ OUT} | \psi(\mathbf{x}, t) | 1 \text{ IN} \rangle \quad (4.26)$$

Y por nuestra experiencia con el campo de Klein-Gordon, esperamos relacionarlo con un producto ordenado temporalmente, que para fermiones se define como

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\psi(\mathbf{x}, t) \bar{\psi}(\mathbf{x}', t')) &= \psi(\mathbf{x}, t) \bar{\psi}(\mathbf{x}', t') \theta(t - t') \\ &\quad - \bar{\psi}(\mathbf{x}', t') \psi(\mathbf{x}, t) \theta(t' - t) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Entonces escribimos

$$\begin{aligned} \langle m \text{ OUT} | \psi(\mathbf{x}, t) | 1 \text{ IN} \rangle &= \langle m \text{ OUT} | \psi(\mathbf{x}, t) a_{s\mathbf{k}\text{IN}}^\dagger | 0 \text{ IN} \rangle \\ &= \langle m \text{ OUT} | -a_{s\mathbf{k}\text{OUT}}^\dagger \psi(\mathbf{x}, t) + a_{s\mathbf{k}\text{OUT}}^\dagger \psi(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t) a_{s\mathbf{k}\text{IN}}^\dagger | 0 \text{ IN} \rangle \end{aligned} \quad (4.28)$$

El primer término corresponde a la partícula emergiendo sin haber sido dispersada, y en los otros dos

$$\begin{aligned} a_{s\mathbf{k}\text{OUT}}^\dagger \psi(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t) a_{s\mathbf{k}\text{IN}}^\dagger &= \int d^3x' [\bar{\psi}(\mathbf{x}', \infty) \gamma^0 U_{s\mathbf{k}}(\mathbf{x}', \infty) \psi(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t) \bar{\psi}(\mathbf{x}', -\infty) \gamma^0 U_{s\mathbf{k}}(\mathbf{x}', -\infty)] \\ &= \int d^4x' \partial_{t'} [\mathbb{T}(\bar{\psi}(\mathbf{x}', t') \psi(\mathbf{x}, t)) \gamma^0 U_{s\mathbf{k}}(\mathbf{x}', t')] \\ &= (-i) \int d^4x' \mathbb{T}(\psi(\mathbf{x}, t) \bar{\psi}(\mathbf{x}', t')) \left[ -i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m \right] U_{s\mathbf{k}}(\mathbf{x}', t') \end{aligned} \quad (4.29)$$

## 4.4. El propagador de Feynman

Ya que hemos visto que calcular elementos de matriz de productos ordenados temporalmente es la clave para poder evaluar la matriz de scattering, vamos a deternernos a jugar un poco con estos objetos en su expresión más simple, es decir, el producto binario de operadores de campos libres (en cuyo caso, por supuesto, los vacíos *IN* y *OUT* coinciden), empezando por el caso del campo de Klein-Gordon real.

### 4.4.1. El propagador de Feynman del campo de Klein-Gordon

Queremos evaluar

$$D_F(x, x') = \langle 0 | T(\phi(x) \phi(x')) | 0 \rangle \quad (4.30)$$

Nótese que también

$$D_F(x, x') = \frac{1}{2} [D_1(x, x') + D(x, x') \text{sign}(t - t')] \quad (4.31)$$

donde

$$\begin{aligned} D_1(x, x') &= \langle 0 | \{\phi(x), \phi(x')\} | 0 \rangle \\ D(x, x') &= \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.32)$$

son los propagadores de Hadamard y de Jordan, respectivamente. Fuera del cono de la luz  $D = 0$  y  $D_F$  es real.

Como  $D_F$  es obviamente una función par, no hay pérdida de generalidad en asumir  $t \geq t'$ . Asumiendo un campo real, desarrollamos

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_k t} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega_k t} \right] \quad (4.33)$$

Entonces

$$D_F(x, x') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'}}{\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{-i\omega_k t} e^{i\omega_{k'} t'} \langle 0 | a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}'}^\dagger | 0 \rangle \quad (4.34)$$

que usando las reglas de conmutación se convierte en

$$D_F(x, x') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{2\omega_k} e^{-i\omega_k(t-t')} \quad (4.35)$$

En el caso general

$$D_F(x, x') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{2\omega_k} \left[ e^{-i\omega_k(t-t')} \theta(t-t') + e^{i\omega_k(t-t')} \theta(t'-t) \right] \quad (4.36)$$

Haciendo la integral por residuos, vemos que

$$D_F(x, x') = i \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} \frac{e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - \omega(t-t')]}{\omega^2 - \omega_k^2 + i\epsilon} \quad (4.37)$$

La ecuación 4.37 muestra que

$$[\square - m^2] D_F(x, x') = i\delta(x - x') \quad (4.38)$$

cosa que podemos verificar fácilmente. Por un lado vemos que

$$\partial_t T(\phi(x) \phi(x')) = \partial_t \phi(x) \phi(x') \theta(t-t') + \phi(x') \partial_t \phi(x) \theta(t'-t) \quad (4.39)$$

pero entonces

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \mathbb{T}(\phi(x)\phi(x')) &= \partial_t^2 \phi(x)\phi(x')\theta(t-t') + \phi(x')\partial_t^2 \phi(x)\theta(t'-t) \\ &+ [\partial_t \phi(\mathbf{x}, t)\phi(\mathbf{x}', t) - \phi(\mathbf{x}', t)\partial_t \phi(\mathbf{x}, t)]\delta(t-t') \end{aligned} \quad (4.40)$$

Por las reglas de conmutación canónicas

$$\partial_t \phi(\mathbf{x}, t)\phi(\mathbf{x}', t) - \phi(\mathbf{x}', t)\partial_t \phi(\mathbf{x}, t) = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.41)$$

*QED*

Para un campo de Klein-Gordon complejo debe ser  $\langle 0 | \mathbb{T}(\phi(x)\phi(x')) | 0 \rangle = 0$ , que es el único valor compatible con la invariancia de fase de la teoría. El único propagador de Feynman no trivial es  $\langle 0 | \mathbb{T}(\phi(x)\phi^\dagger(x')) | 0 \rangle$ , que es precisamente  $D_F$ .

### La rotación de Wick

La ecuación 4.38 no define unívocamente al propagador de Feynman, ya que la ecuación de Klein-Gordon admite soluciones homogéneas. Sin embargo, si definimos el *tiempo euclídeo*

$$\tau = it \quad (4.42)$$

la ecuación 4.38 se convierte en la *ecuación de Klein-Gordon euclídea*

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \Delta - m^2 \right] D_F((\mathbf{x}, \tau), (\mathbf{x}', \tau')) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(\tau - \tau') \quad (4.43)$$

que sí tiene solución única

$$D_F((\mathbf{x}, \tau), (\mathbf{x}', \tau')) = \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \frac{e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \omega(\tau-\tau')]}{\omega^2 + k^2 + m^2} \quad (4.44)$$

calculando la integral por residuos vemos que

$$D_F(x, x') = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{2\omega_k} \left[ e^{-\omega_k(\tau-\tau')}\theta(\tau-\tau') + e^{i\omega_k(\tau-\tau')}\theta(\tau'-\tau) \right] \quad (4.45)$$

Vemos que si continuamos analíticamente el propagador euclídeo de vuelta al espacio de Minkowski recuperamos el propagador de Feynman, de manera que es posible definir al propagador de Feynman como la continuación analítica al tiempo real de la única solución fundamental de la ecuación de Klein-Gordon euclídea.

### Solución explícita para el propagador

Vamos a demostrar la potencia de esta observación encontrando la forma explícita del propagador.

Las condiciones de contorno son que  $D_F(x) \rightarrow 0$  cuando  $x^2 \rightarrow \infty$ , y que el flujo del gradiente de  $D_F$  sobre una esfera infinitesimal alrededor del origen debe ser  $-1$ . Es obvio que  $D_F$  tiene simetría de rotaciones en el espacio euclídeo de cuatro dimensiones, de manera que, introduciendo

$$\sigma = \sqrt{\tau^2 + \mathbf{x}^2} \quad (4.46)$$

No hay pérdida de generalidad en escribir

$$D_F = D_F(\sigma) \quad (4.47)$$

y la ecuación de Klein-Gordon euclídea se convierte, para  $\sigma \neq 0$ , en

$$\frac{1}{\sigma^3} \partial_\sigma \sigma^3 \partial_\sigma D_F - m^2 D_F = 0 \quad (4.48)$$

Si escribimos

$$D_F = \frac{F}{\sigma} \quad (4.49)$$

para  $\sigma \neq 0$   $F$  satisface una ecuación de Bessel

$$F'' + \frac{1}{\sigma} F' - \left( m^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right) F = 0 \quad (4.50)$$

La condición de que  $F \approx e^{-m\sigma}$  cuando  $\sigma \rightarrow \infty$  determina que la solución debe ser

$$F = \frac{m}{4\pi^2} K_1 [m\sigma] \quad (4.51)$$

$K_1$  es una función de Bessel modificada. La normalización surge de la condición de contorno en el origen,  $2\pi^2\sigma^3\partial_\sigma D_F \rightarrow -1$  cuando  $\sigma \rightarrow 0$ . Observamos que en ese límite  $K_1 [m\sigma] \approx 1/m\sigma$ .

El propagador en el espacio de Minkowski se obtiene reemplazando  $\sigma$  por  $s = \sqrt{-t^2 + \mathbf{x}^2}$ . Fuera del cono de la luz  $s$  es real y  $D_F$  también lo es, como ya sabíamos. En el cono de la luz  $s$  es imaginario y vale que [10]

$$K_1 (iz) = -\frac{\pi}{2} H_{-1}^{(2)} (z) \quad (4.52)$$

$H_{-1}^{(2)}$  es una función de Hankel.

#### 4.4.2. El propagador de Feynman del campo de Dirac

##### Preámbulo: las relaciones de anticonmutación del campo de Dirac

Recordemos que en cuantificación canónica el campo de Dirac se escribe como

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_s \left[ a_{\mathbf{k}s} f_{\mathbf{k}}(x) u_{\mathbf{k},s} + b_{\mathbf{k}s}^\dagger f_{\mathbf{k}}^*(x) v_{\mathbf{k},s} \right] \quad (4.53)$$

donde las  $f$  son ondas planas

$$f_{\mathbf{k}}(x) = \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \quad (4.54)$$

$k^0 = \omega_{\mathbf{k}} > 0$ ,  $-k^2 = m^2$ ;  $a_{\mathbf{k}s}$  y  $b_{\mathbf{k}s}^\dagger$  son operadores de destrucción y de creación satisfaciendo relaciones de anticonmutación

$$\left\{ a_{\mathbf{k}s}, a_{\mathbf{k}'s'}^\dagger \right\} = \left\{ b_{\mathbf{k}s}, b_{\mathbf{k}'s'}^\dagger \right\} = \delta_{s's} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \quad (4.55)$$

todas las otras cero, y finalmente los  $u_{\mathbf{k},s}$  y  $v_{\mathbf{k},s}$  son una base de espinores de Dirac

$$u_{\mathbf{k},s} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w_s \\ \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w_s \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

$$v_{\mathbf{k},s} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w'_s \\ -\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w'_s \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

donde los  $w_s$  y  $w'_s$  son bases de espinores de Weyl

$$\sum_s w_s w_s^\dagger = \sum_s w'_s w'^{\dagger}_s = \mathbf{1} \quad (4.58)$$

dadas las relaciones de anticonmutación de los operadores de creación y destrucción, está claro que

$$\{\psi(x), \psi(x')\} = 0 \quad (4.59)$$

La única relación no trivial es la que involucra a  $\psi(x)$  y  $\bar{\psi}(x')$ . En particular, a tiempos iguales encontramos

$$\begin{aligned} \{\psi(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}(\mathbf{x}', t)\} &= \frac{1}{V} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_s \left[ \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{2\omega_{\mathbf{k}}} u_{\mathbf{k},s} \bar{u}_{\mathbf{k},s} + \frac{e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{2\omega_{\mathbf{k}}} v_{\mathbf{k},s} \bar{v}_{\mathbf{k},s} \right] \\ &= \frac{1}{V} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_s \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{2\omega_{\mathbf{k}}} [u_{\mathbf{k},s} \bar{u}_{\mathbf{k},s} + v_{-\mathbf{k},s} \bar{v}_{-\mathbf{k},s}] \end{aligned} \quad (4.60)$$

Ahora

$$\begin{aligned} \sum_s u_{\mathbf{k},s} u_{\mathbf{k},s}^\dagger &= \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w_s \\ \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w_s^\dagger & \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w_s^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma} & m \\ m & \omega_{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} \\ \sum_s v_{-\mathbf{k},s} v_{-\mathbf{k},s}^\dagger &= \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w'_s \\ -\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w'_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w'_s{}^\dagger & -\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma}} w'_s{}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma} & -m \\ -m & \omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Finalmente

$$\{\psi(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}(\mathbf{x}', t)\} = \gamma^0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.62)$$

### Los propagadores de Feynman

Por los mismos motivos que para un campo de Klein-Gordon complejo, un propagador de la forma  $\langle 0 | \psi(x) \psi(x') | 0 \rangle = 0$ , por lo cual el único propagador de Feynman no trivial es

$$S_F = \langle 0 | T(\psi(\mathbf{x}, t) \bar{\psi}(\mathbf{x}', t')) | 0 \rangle \quad (4.63)$$

con el producto ordenado temporalmente de fermiones definido en 4.27. Es fácil ver que

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m] S_F = i\gamma^0 \langle 0 | \{\psi(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}(\mathbf{x}', t)\} | 0 \rangle \delta(t - t') \quad (4.64)$$

Pero a tiempos iguales podemos usar las reglas de anticonmutación, de manera que

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m] S_F = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \quad (4.65)$$

Operando a ambos lados con  $i\gamma^\mu \partial_\mu + m$  encontramos que

$$[\square - m^2] S_F = i[i\gamma^\mu \partial_\mu + m] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.66)$$

cuya solución es

$$S_F = [i\gamma^\mu \partial_\mu + m] D_F \quad (4.67)$$

### 4.4.3. La representación de Lehmann

Hasta ahora sólo vimos el propagador de Feynman de campos libres. La *representación de Lehmann* nos dice qué podemos esperar acerca de la estructura del propagador de Feynman de un campo interactuante, en ausencia de campos externos. Por sencillez vamos a considerar sólo el caso de un campo escalar.

Consideremos un valor de expectación

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle \quad (4.68)$$

Esto lo podemos pensar como el bracket entre el estado

$$\phi(x) | 0 \rangle \quad (4.69)$$

y el estado correspondiente con  $x'$  en vez de  $x$ . Este estado se puede pensar como el resultado de haber trasladado el estado

$$\phi(0) | 0 \rangle \quad (4.70)$$

desde el origen hasta  $x$ . Como la teoría es invariante Poincaré, existen operadores de impulso  $P^\mu$  que son los generadores de las traslaciones

$$\phi(x) | 0 \rangle = e^{-iP_\mu x^\mu} \phi(0) | 0 \rangle \quad (4.71)$$

Insertando una base completa de estados de impulso bien definido

$$\phi(x)|0\rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu x^\mu} |p^\mu\rangle \langle p^\mu | \phi(0)|0\rangle \quad (4.72)$$

Analizando el ket en  $x'$  de la misma manera, llegamos a

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu(x-x')^\mu} |\langle p^\mu | \phi(0)|0\rangle|^2 \quad (4.73)$$

Por invariancia Lorentz,  $|\langle p^\mu | \phi(0)|0\rangle|^2$  sólo puede ser función de  $-p^2 = \sigma^2$ . Por causalidad debe ser  $\sigma^2 \geq 0$ , y para que la energía sea positiva debe ser  $p^0 > 0$ . De manera que tomando  $\sigma^2$  como variable independiente en vez de  $p^0$  encontramos

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle = \int_0^\infty d\sigma^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{ip_\mu(x-x')^\mu}}{2\omega_\sigma} \rho[\sigma^2] \quad (4.74)$$

donde hemos definido

$$|\langle p^\mu | \phi(0)|0\rangle|^2 = \pi \rho[-p^2] \quad (4.75)$$

y  $\omega_\sigma = p^0 = \sqrt{\sigma^2 + \mathbf{p}^2}$ . Si en vez de este propagador “de frecuencia positiva” tomamos el propagador ordenado temporalmente, vemos que

$$\langle 0 | \mathbb{T}(\phi(x) \phi(x')) | 0 \rangle = \int_0^\infty d\sigma^2 \rho[\sigma^2] D_F(x, x'; \sigma^2) \quad (4.76)$$

donde  $D_F(x, x'; \sigma^2)$  es el propagador de un campo libre con “masa”  $\sigma^2$ .

# Capítulo 5

## Integrales de Camino

### 5.1. Integrales de camino en mecánica cuántica no relativista

Consideremos la teoría de una partícula cuántica en representación de Schrödinger

$$\begin{aligned}i\hbar\partial_t|\psi\rangle &= H|\psi\rangle \\ H &= K + V \\ V &= V[X] \\ K &= \frac{P^2}{2m}\end{aligned}\tag{5.1}$$

El operador posición tiene autovectores  $|x\rangle$

$$X|x\rangle = x|x\rangle\tag{5.2}$$

Similarmente el operador momento

$$P|p\rangle = p|p\rangle\tag{5.3}$$

con

$$\langle x|p\rangle = e^{ipx/\hbar}\tag{5.4}$$

Un estado inicial  $|\psi_i\rangle$  evoluciona según el operador evolución

$$|\psi\rangle(t) = e^{-iHt/\hbar}|\psi_i\rangle\tag{5.5}$$

Queremos calcular los elementos de matriz del operador evolución en el tiempo  $T$

$$\langle\psi_f|e^{-iHT/\hbar}|\psi_i\rangle\tag{5.6}$$

El problema es que en general *no* es cierto que

$$e^{-iHT/\hbar} = e^{-iKT/\hbar}e^{-iVT/\hbar}\tag{5.7}$$

Pero esta fórmula es aproximadamente correcta cuando  $T \rightarrow 0$ , ya que el error es de orden  $(T/\hbar)^2$ . Entonces escribimos

$$\begin{aligned}\langle\psi_f|e^{-iHT/\hbar}|\psi_i\rangle &= \langle\psi_f|\left(e^{-iHT/N\hbar}\right)^N|\psi_i\rangle \\ &\approx \langle\psi_f|\left(e^{-iKT/N\hbar}e^{-iVT/N\hbar}\right)^N|\psi_i\rangle \\ &= \langle\psi_f|\prod_{j=1}^N\left(e^{-iK(t_j-t_{j-1})/\hbar}e^{-iV(t_j-t_{j-1})/\hbar}\right)|\psi_i\rangle\end{aligned}\tag{5.8}$$

donde  $t_0 = 0$  y  $t_j = t_{j-1} + T/N$ . Insertando identidades escribimos ésto como

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | e^{-iHT/\hbar} | \psi_i \rangle &= \int \prod_{j=0}^{N-1} dx_j \langle \psi_f | \prod_{j=1}^N \left( e^{-iK(t_j-t_{j-1})/\hbar} e^{-iV(t_j-t_{j-1})/\hbar} |x_{j-1}\rangle \langle x_{j-1}| \right) | \psi_i \rangle \\ &= \int \prod_{j=0}^{N-1} dx_j e^{-i \sum_{j=0}^{N-1} V(x_j)(t_j-t_{j-1})/\hbar} \langle \psi_f | \prod_{j=1}^N \left( e^{-iK(t_j-t_{j-1})/\hbar} |x_{j-1}\rangle \langle x_{j-1}| \right) | \psi_i \rangle \end{aligned} \quad (5.9)$$

Insertamos una nueva serie de identidades

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | e^{-iHT/\hbar} | \psi_i \rangle &= \int \prod_{j=0}^{N-1} dx_j \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{-i \sum_{j=0}^{N-1} V(x_j)(t_j-t_{j-1})/\hbar} \\ &\quad \langle \psi_f | \prod_{j=1}^N \left( e^{-iK(t_j-t_{j-1})/\hbar} |p_{j-1}\rangle \langle p_{j-1}|x_{j-1}\rangle \langle x_{j-1}| \right) | \psi_i \rangle \\ &= \int \prod_{j=0}^N dx_j \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{-i \sum_{j=0}^{N-1} [(p_j^2/2m) + V(x_j)](t_j-t_{j-1})/\hbar} e^{i \sum_{j=0}^{N-1} p_j(x_{j+1}-x_j)/\hbar} \langle \psi_f | x_N \rangle \langle x_0 | \psi_i \rangle \end{aligned} \quad (5.10)$$

Pasando al límite  $N \rightarrow \infty$ , la poligonal que pasa por los puntos  $(t_j, x_j)$  deviene una trayectoria continua que interpola entre  $x_i$  en  $t = 0$  y  $x_f$  en  $t = T$ , y vemos que

$$\langle x_f | e^{-iHT/\hbar} | x_i \rangle = \int_{x(0)=x_i, x(T)=x_f} Dx Dp e^{iS/\hbar} \quad (5.11)$$

donde  $S$  es la acción

$$\begin{aligned} S &= \int_0^T dt L \\ L &= p\dot{x} - H \end{aligned} \quad (5.12)$$

Las integrales gaussianas sobre los impulsos se pueden hacer explícitamente, por lo que podemos escribir de manera equivalente

$$\begin{aligned} \langle x_f | e^{-iHT/\hbar} | x_i \rangle &= \int_{x(0)=x_i, x(T)=x_f} Dx e^{iS/\hbar} \\ L &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V[x] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Nótese que todas las trayectorias que estamos considerando son continuas y tienen la *propiedad heracliteana* de que no vuelven para atrás en el tiempo.

Es posible verificar que el error cometido al usar la fórmula 5.7 desaparece en el límite  $N \rightarrow \infty$ .

En el límite  $\hbar \rightarrow 0$ , la integral está dominada por la trayectoria que hace estacionaria a la acción, que por supuesto es la trayectoria clásica.

## 5.2. La integral de camino ordena temporalmente

En representación de Schrödinger, los estados definidos en el tiempo inicial  $t_i$  son los estados IN, mientras que los estados definidos en el tiempo final  $t_f$  son los estados OUT. En representación de Heisenberg, todos los estados se definen en el tiempo inicial. Por lo tanto, identificamos al estado  $|x \text{ OUT}\rangle$  como el estado definido en  $t_i$ , que en representación de Schrödinger deviene el estado  $|x\rangle$  en el tiempo final

$$|x \text{ OUT}\rangle = e^{iH(t_f-t_i)/\hbar} |x \text{ IN}\rangle \quad (5.14)$$

De modo que

$$\int_{x(t_i)=x_i, x(t_f)=x_f} Dx e^{iS/\hbar} = \langle x_f | e^{-iH(t_f-t_i)/\hbar} | x_i \rangle = \langle x_f OUT | x_i IN \rangle \quad (5.15)$$

Ahora consideremos la integral

$$\langle X \rangle (t) = \int_{x(t_i)=x_i, x(t_f)=x_f} Dx e^{iS/\hbar} x(t) \quad (5.16)$$

con  $t_i \leq t \leq t_f$ . Partimos la integral en dos

$$\begin{aligned} \langle X \rangle (t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' x' \int_{x(t_i)=x_i, x(t)=x'} Dx e^{iS/\hbar} \int_{x(t)=x', x(t_f)=x_f} Dx e^{iS/\hbar} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' x' \langle x_f | e^{-iH(t_f-t)/\hbar} | x' \rangle \langle x' | e^{-iH(t-t_i)/\hbar} | x_i \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x_f | e^{-iH(t_f-t)/\hbar} X | x' \rangle \langle x' | e^{-iH(t-t_i)/\hbar} | x_i \rangle \\ &= \langle x_f OUT | \hat{X}(t) | x_i IN \rangle \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde  $\hat{X}(t)$  es el operador posición en representación de Heisenberg.

El próximo paso es mirar la integral

$$\langle X \rangle (t, t') = \int_{x(t_i)=x_i, x(t_f)=x_f} Dx e^{iS/\hbar} x(t) x(t') \quad (5.18)$$

con  $t_i \leq t \leq t_f$  y  $t_i \leq t' \leq t_f$ , pero sin presuponer un orden dado entre  $t$  y  $t'$ . Llamamos  $t_> = \max(t, t')$  y  $t_< = \min(t, t')$  y partimos la integral en tres

$$\begin{aligned} \langle X \rangle (t, t') &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' dx'' x' x'' \\ &\int_{x(t_i)=x_i, x(t_<)=x''} Dx e^{iS/\hbar} \int_{x(t_<)=x'', x(t_>)=x'} Dx e^{iS/\hbar} \int_{x(t_>)=x', x(t_f)=x_f} Dx e^{iS/\hbar} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Repitiendo los pasos anteriores llegamos a que

$$\langle X \rangle (t, t') = \langle x_f OUT | \hat{X}(t_>) \hat{X}(t_<) | x_i IN \rangle \quad (5.20)$$

Vemos que la integral de camino automáticamente produce productos ordenados temporalmente.

### 5.3. La integral euclídea y las condiciones de contorno

La integral de Feynman sufre de severos problemas de convergencia. Un objeto mucho mejor definido es la *integral euclídea*, que se obtiene de la integral de Feynman por la rotación de Wick  $t = -i\tau$ . Por ejemplo, si la acción es

$$S = \int dt \left\{ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right\} \quad (5.21)$$

bajo la rotación de Wick se convierte en

$$S = iS_E \quad (5.22)$$

donde  $S_E$  es la *acción euclídea*

$$S_E = \int dt \left\{ \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right\} \quad (5.23)$$

y la integral de Feynman deviene la *integral de Wiener*

$$\int_{x(t_i)=x_i, x(t_f)=x_f} Dx e^{-S_E/\hbar} \quad (5.24)$$

Supongamos que queremos calcular un elemento de matriz de algún operador

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O} \rangle (t) &= \langle x_f OUT | \hat{\mathcal{O}}(t) | x_i IN \rangle \\ &= \langle x_f | e^{-iH(t_f-t)/\hbar} \hat{\mathcal{O}} e^{-iH(t-t_i)/\hbar} | x_i \rangle \end{aligned} \quad (5.25)$$

Intercalando los autoestados del Hamiltoniano

$$H |E\rangle = E |E\rangle \quad (5.26)$$

obtenemos

$$\langle \mathcal{O} \rangle (t) = \sum_{E, E'} \langle x_f | E \rangle e^{-iE(t_f-t)/\hbar} \langle E | \hat{\mathcal{O}} | E' \rangle e^{-iE'(t-t_i)/\hbar} \langle E' | x_i \rangle \quad (5.27)$$

Si hacemos la rotación de Wick encontramos

$$\langle \mathcal{O} \rangle (\tau) = \sum_{E, E'} \langle x_f | E \rangle e^{-E(\tau_f-\tau)/\hbar} \langle E | \hat{\mathcal{O}} | E' \rangle e^{-E'(\tau-\tau_i)/\hbar} \langle E' | x_i \rangle \quad (5.28)$$

Si ahora tomamos el límite  $\tau_f \rightarrow \infty, \tau_i \rightarrow -\infty$ , ambas sumas están dominadas por el estado fundamental, y

$$\langle \mathcal{O} \rangle (\tau) \approx \langle x_f | 0 OUT \rangle \langle 0 IN | x_i \rangle e^{-E_0(\tau_f-\tau_i)/\hbar} \langle 0 OUT | \hat{\mathcal{O}} | 0 IN \rangle \quad (5.29)$$

Vemos que salvo constantes, la integral euclídea produce elementos de matriz entre los vacíos *IN* y *OUT*.

## 5.4. Integrales Gaussianas

De lejos el tipo de integral más importante que vamos a encontrar son las *integrales Gaussianas*, es decir, integrales de la exponenciación de una función cuadrática. La integral Gaussiana prototípica es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = 1 \quad (5.30)$$

Si conocemos 5.30, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha x^2/2} \quad (5.31)$$

se resuelve mediante el cambio de variables  $x = y/\sqrt{\alpha}$ , de donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (5.32)$$

Ahora consideremos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha x^2/2} x^n \quad (5.33)$$

Si  $n$  es impar, la integral se anula por paridad. Pongamos  $n = 2k$ . Entonces, decimos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha x^2/2} x^{2k} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha x^2/2} x^{2k-1} \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{d}{dx} e^{-\alpha x^2/2} \right) x^{2k-1} \\ &= \frac{(2k-1)}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha x^2/2} x^{2(k-1)} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Iterando este resultado obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha x^2/2} x^{2k} = \frac{(2k-1)!!}{\alpha^k} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (5.35)$$

donde  $n!!$  es el producto de todos los números *impares* menores o iguales que  $n$

$$(2k)!! = \frac{(2k)!}{2^k k!} \quad (5.36)$$

5.35 tiene una interpretación gráfica interesante, porque  $(2k-1)!!$  cuenta las formas de agrupar  $2k$  objetos de a pares. Entonces la idea es que agrupo las  $x$  en la integral 5.33 de a pares de todas las formas posibles, asigno a cada par el valor  $1/\alpha$  y lo saco de la integral, hasta que quede una sola  $x$  (y la integral vale cero) o ninguna (y entonces uso 5.31).

Todo lo que dijimos para la integral Gaussiana en una dimensión vale para la integral en  $d$  dimensiones

$$\int_{\mathbf{R}^d} \frac{d^d x}{(2\pi)^{d/2}} e^{-x^j M_{jk} x^k / 2} \quad (5.37)$$

Donde  $M$  es una matriz simétrica y definida positiva. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{d^d x}{(2\pi)^{d/2}} e^{-x^j M_{jk} x^k / 2} x^p x^q &= -[M^{-1}]^{pr} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{d^d x}{(2\pi)^{d/2}} \left( \frac{\partial}{\partial x^r} e^{-x^j M_{jk} x^k / 2} \right) x^q \\ &= [M^{-1}]^{pq} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{d^d x}{(2\pi)^{d/2}} e^{-x^j M_{jk} x^k / 2} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Vemos que el truco de agrupar las variables en el factor pre-exponencial de a pares sigue valiendo, pero ahora el par  $x^p x^q$  “vale”  $[M^{-1}]^{pq}$ ; decimos que  $M^{-1}$  es la *matriz de covariancias*. En cuanto a la integral 5.37, la manera más fácil de calcularla es pasar a las coordenadas  $z^j$  en que la matriz  $M$  es diagonal

$$x^j M_{jk} x^k = \sum_{l=1}^d m_l (z^l)^2 \quad (5.39)$$

La integral 5.37 factoriza en  $d$  integrales tipo 5.31, y el resultado es

$$\int_{\mathbf{R}^d} \frac{d^d x}{(2\pi)^{d/2}} e^{-x^j M_{jk} x^k / 2} = \frac{1}{\sqrt{\det M}} \quad (5.40)$$

Nótese que esta fórmula vale en cualquier base, de manera que no es realmente necesario diagonalizar  $M$ , basta calcular su determinante.

Cuando uno tiene una variable aleatoria  $X$  y quiere conocer los “momentos” de la distribución de probabilidad, es decir, los valores de expectación  $\langle X^n \rangle$ , es generalmente útil definir la *función de partición*

$$Z[J] = \langle e^{JX} \rangle \quad (5.41)$$

donde  $J$  es una variable auxiliar, porque entonces

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle X^n \rangle J^n \quad (5.42)$$

es decir, los momentos de la distribución son los coeficientes del desarrollo de Taylor de la función de partición alrededor del origen. También conviene introducir el *funcional generador*

$$Z[J] = e^{W[J]} \quad (5.43)$$

Obviamente si tenemos  $Z$  podemos calcular  $W$  y viceversa, pero en general  $W$  es un objeto mucho más sencillo que  $Z$ . Por ejemplo, para una variable Gaussiana, con la función de distribución

$$f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} e^{-\alpha x^2/2} \quad (5.44)$$

Los momentos de la distribución se calculan como en 5.35, y resulta

$$Z[J] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k)!} \left(\frac{J^2}{\alpha}\right)^k \quad (5.45)$$

pero también

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha x^2/2} e^{Jx} \\ &= \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha[(x-J/\alpha)^2 - (J/\alpha)^2]/2} \\ &= e^{J^2/(2\alpha)} \end{aligned} \quad (5.46)$$

(esta fórmula también se puede obtener sumando la serie 5.45) de manera que

$$W[J] = \frac{J^2}{2\alpha} \quad (5.47)$$

es una simple parábola. La Gaussiana es un caso extremo, pero que el funcional generador es un objeto más simple que la función de partición es un resultado general.

Nótese que no hemos usado ninguna propiedad específica de la dimensionalidad  $d$ , por lo cual podemos tomar el límite  $d \rightarrow \infty$ , en cuyo caso todo lo que dijimos es aplicable a integrales de camino.

## Capítulo 6

# Reglas de Feynman y métodos funcionales

### 6.1. Las reglas de Feynman

Con lo que vimos la clase pasada, tenemos las herramientas para calcular una integral del tipo

$$\int D\Phi e^{iS[\Phi]/\hbar} \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) = \langle 0 \text{ OUT} | T [\Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)] | 0 \text{ IN} \rangle \quad (6.1)$$

Para una teoría libre, la integral se calcula usando el teorema de Wick, y resulta la suma de todas las contracciones posibles de a dos campos. Cuando sólo hay dos campos,

$$\int D\Phi e^{iS[\Phi]/\hbar} \Phi(x_1) \Phi(x_2) = \langle 0 \text{ OUT} | T [\Phi(x_1) \Phi(x_2)] | 0 \text{ IN} \rangle = G_F(x_1, x_2) \quad (6.2)$$

Por lo tanto, cada par contraído debe reemplazarse por un propagador de Feynman. Si la teoría no es libre, hay que utilizar métodos perturbativos. Nosotros vamos a considerar el caso de una teoría  $\lambda\Phi^4$ , donde

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \Phi^4 \right\} \quad (6.3)$$

Entonces, si  $S_0$  es la parte cuadrática de la acción,

$$\begin{aligned} \int D\Phi e^{iS[\Phi]/\hbar} \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) &= \int D\Phi e^{iS_0[\Phi]/\hbar} \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) \\ &\left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!\hbar} \int d^4x \Phi^4(x) + \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!\hbar} \int d^4x \Phi^4(x) \right)^2 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (6.4)$$

De esta manera, el elemento de matriz de la teoría interactuante se convierte en una serie de elementos de matriz de una teoría libre, de complejidad creciente.

En la práctica, la serie perturbativa sería inmanejable si no fuera por una técnica desarrollada por Feynman para representar gráficamente cada término [11]. De esta manera, el problema de encontrar todas las contracciones posibles se reduce a dibujar todos los gráficos posibles con ciertas características.

Empecemos con el caso

$$\int D\Phi e^{iS[\Phi]/\hbar} = \int D\Phi e^{iS_0[\Phi]/\hbar} \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!\hbar} \int d^4x \Phi^4(x) + \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!\hbar} \int d^4x \Phi^4(x) \right)^2 + \dots \right\} \quad (6.5)$$

El primer término es simplemente una integral Gaussiana, y por lo tanto es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del determinante del operador en el exponente, que es

$$K[x, x'] = \frac{i}{\hbar} [-\square + m^2] \delta[x, x'] = G_F^{-1}[x, x'] \quad (6.6)$$

Por lo tanto, el primer término resulta en

$$\sqrt{\text{Det } G_F} \quad (6.7)$$

No vamos a indagar más qué quiere decir este determinante funcional. Observamos que este término de hecho va a ser un factor común en todos los términos de la serie, y vamos a sobreentenderlo hasta nuevo aviso.

El segundo término de la serie es

$$\int D\Phi e^{iS_0[\Phi]/\hbar} \left(-\frac{i\lambda}{4!\hbar}\right) \int d^4x \Phi^4(x) = 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!\hbar}\right) \int d^4x G_F^2(x, x) \quad (6.8)$$

Representamos este diagrama de la siguiente manera

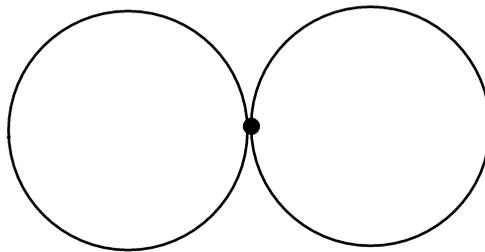


Figura 6.1: Double bubble

El punto (“nodo” o “vértice”) representa el factor

$$\left(-\frac{i\lambda}{4!\hbar}\right) \int d^4x \quad (6.9)$$

Cada línea está asociada con un factor  $G_F$ . Cuando una línea conecta dos vértices, como en este caso, decimos que es una “línea interna”. Como en este caso cada línea conecta al único vértice consigo mismo, los propagadores están evaluados en el límite de coincidencia. Observamos que cada línea, al cerrarse sobre sí misma, define un circuito cerrado, que llamamos un “lazo” o “loop”. El factor 3, que representa el número de contracciones posibles, es la “multiplicidad” del diagrama.

Ahora consideramos el término de segundo orden

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{i\lambda}{4!\hbar}\right)^2 \int d^4x d^4x' \Phi^4(x) \Phi^4(x') \quad (6.10)$$

Ahora tenemos dos vértices, uno asociado con la posición  $x$  y el otro con  $x'$ , con cuatro líneas convergiendo en cada uno. Uniendo estas líneas de todas las maneras posibles, obtenemos los siguientes diagramas:

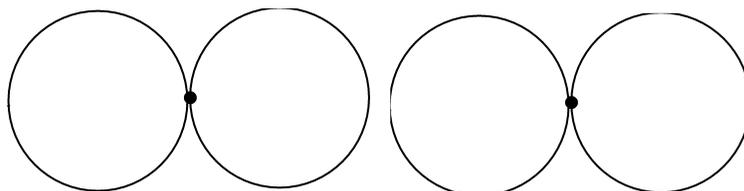


Figura 6.2: Double bubble al cuadrado.

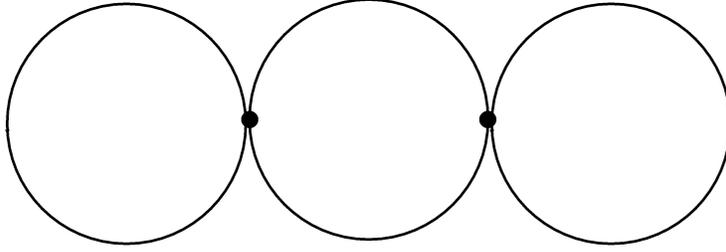


Figura 6.3: Triple bubble.

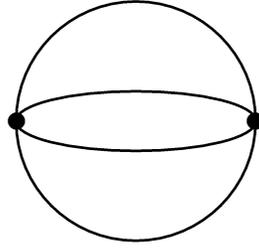


Figura 6.4: Basketball.

Es evidente que la multiplicidad del primero es  $3^2 = 9$ . Para calcular la multiplicidad del segundo, vemos que hay 6 maneras de elegir la línea que se cierra sobre sí misma en cada vértice, y 2 maneras de unir las líneas que unen los vértices, de manera que la multiplicidad es  $6 \times 6 \times 2 = 72$ . La multiplicidad del basketball es  $4 \times 3 \times 2 = 24$ . El número total de contracciones posibles es  $105 = 7!!$ , como corresponde a las contracciones de 7 elementos.

Es notorio que el gráfico de la fig. 6.2 es simplemente dos copias del de la figura 6.1 una al lado de la otra. Un gráfico con estas características se dice “inconexo”. Todos los otros gráficos son “conexos”.

Estos gráficos corresponden a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
 \text{double bubble}^2 &= \left( \int d^4x G_F^2(x, x) \right)^2 \\
 \text{triple bubble} &= \int d^4x d^4x' G_F(x, x) G_F^2(x, x') G_F(x', x') \\
 \text{basketball} &= \int d^4x d^4x' G_F^4(x, x')
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Resumiendo lo visto hasta ahora

$$\begin{aligned}
 \int D\Phi e^{iS[\Phi]/\hbar} &= 1 + \left( \frac{-i\lambda}{4!\hbar} \right) 3 \left( \text{diagrama de 2 burbujas} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!\hbar} \right)^2 \left[ 9 \left( \text{diagrama de 3 burbujas} \right) + 72 \left( \text{diagrama de triple bubble} \right) + 24 \left( \text{diagrama de basketball} \right) \right] + O(\lambda^3)
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

## 6.2. Diagramas con patas externas

Ahora consideremos el caso

$$\begin{aligned}
 &\int D\Phi e^{iS[\Phi]/\hbar} \Phi(x) \Phi(x') = \\
 &\int D\Phi e^{iS_0[\Phi]/\hbar} \Phi(x) \Phi(x') \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!\hbar} \int d^4x_1 \Phi^4(x_1) + \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!\hbar} \int d^4x_1 \Phi^4(x_1) \right)^2 + \dots \right\}
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Al calcular las distintas contracciones, siempre está la posibilidad de contraer al campo en  $x$  directamente con el campo en  $x'$ . Eso reproduce los gráficos de la sección anterior, con sus multiplicidades, multiplicados por el factor  $G_F(x, x')$ , que representamos diagramáticamente como una única línea

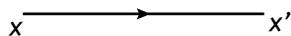


Figura 6.5: Representación diagramática del propagador de Feynman.

Consideremos ahora los otros términos. El término de primer orden da como resultado

$$12 \left( -\frac{i\lambda}{4! \hbar} \right) \int d^4 x_1 G_F(x, x_1) G_F(x_1, x_1) G_F(x_1, x') \tag{6.14}$$

Cuya representación gráfica es el “tadpole”

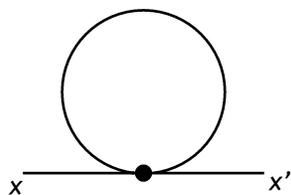


Figura 6.6: Tadpole.

Una línea que conecta un vértice con uno de los argumentos libres del diagrama es una “línea externa”. Si conecta dos vértices es una “línea interna”. Un diagrama sin líneas externas es una “burbuja de vacío”.

Los términos de segundo orden poseen dos líneas externas y dos vértices. Tenemos la alternativa de que ambas líneas externas pueden conectar con el mismo vértice, o cada una en un vértice distinto. En el primer caso podemos obtener un diagrama inconexo

$$72 \cdot \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \circ \tag{6.15}$$

y uno conexo

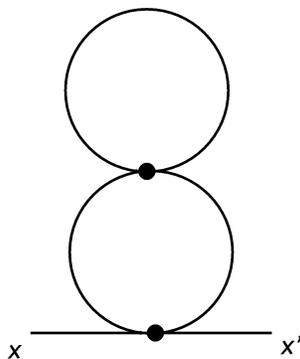


Figura 6.7: Bubble tadpole.

Cuya multiplicidad es 288. Cuando cada línea externa conecta a un vértice distinto también hay dos posibilidades, a saber dos tadpoles en serie

cuya multiplicidad es 288, y el “setting sun”

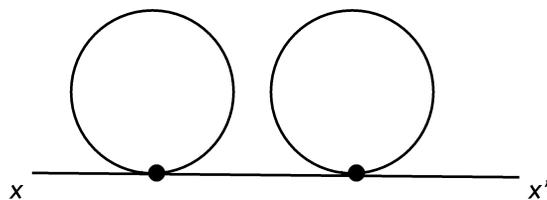


Figura 6.8: Double tadpole.

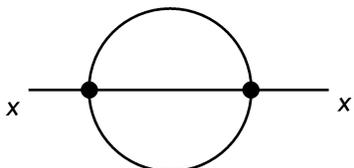


Figura 6.9: Setting sun.

cuya multiplicidad es 192. En total encontramos  $105 + 72 + 288 + 288 + 192 = 945 = 9!!$  diagramas.

### 6.3. El funcional generador

En mecánica estadística se suele introducir la *función de partición*

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad (6.16)$$

La potencia de la función de partición es que permite calcular cantidades termodinámicas mediante derivación, como por ejemplo la energía media

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (6.17)$$

En teoría de campos se introduce un objeto similar,

$$Z[J] = \int D\Phi e^{i(S[\Phi] + J\Phi)/\hbar} \quad (6.18)$$

donde

$$J\Phi = \int d^4x J(x) \Phi(x) \quad (6.19)$$

de modo tal que

$$\langle 0 \text{ OUT} | T [\Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)] | 0 \text{ IN} \rangle = (-i\hbar)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (6.20)$$

El cálculo de la función de partición 6.18 se reduce a una serie de integrales gaussianas mediante un doble desarrollo en  $\lambda$  y en  $J$ . Con lo que ya hemos visto podemos escribir los términos más bajos

$$\begin{aligned}
Z[J] &= 1 + \left(\frac{-i\lambda}{4!\hbar}\right) 3 \text{ (diagrama de 2 círculos)} \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{-i\lambda}{4!\hbar}\right)^2 \left[ 9 \text{ (diagrama de 4 círculos)} + 72 \text{ (diagrama de 3 círculos)} + 24 \text{ (diagrama de 2 círculos)} \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int d^4x d^4x' J(x) J(x') \left\{ x \longrightarrow x' \times \left[ 1 + \left(\frac{-i\lambda}{4!\hbar}\right) 3 \text{ (diagrama de 2 círculos)} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{1}{2} \left(\frac{-i\lambda}{4!\hbar}\right)^2 \left[ 9 \text{ (diagrama de 4 círculos)} + 72 \text{ (diagrama de 3 círculos)} + 24 \text{ (diagrama de 2 círculos)} \right] \right\} \\
&+ \left. \left(\frac{-i\lambda}{4!\hbar}\right) 12 \text{ (diagrama de 1 círculo)} + \frac{1}{2} \left(\frac{-i\lambda}{4!\hbar}\right)^2 \left[ 72 \text{ (diagrama de 2 círculos)} + 288 \text{ (diagrama de 1 círculo)} + 288 \text{ (diagrama de 2 círculos)} + 192 \text{ (diagrama de 1 círculo)} \right] \right\} + (6.21)
\end{aligned}$$

En mecánica estadística el paso siguiente es introducir la *energía libre*

$$Z = e^{-\beta F} \quad (6.22)$$

que contiene la misma información que  $Z$  pero de una manera más eficiente. Análogamente, definimos el *funcional generador*

$$Z[J] = e^{iW[J]/\hbar} = 1 + \frac{i}{\hbar}W + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar}W\right)^2 + \dots \quad (6.23)$$

Comparando los desarrollos de  $Z$  y  $W$  vemos que

$$\begin{aligned}
W[J] &= \left(\frac{-\lambda}{4!}\right) 3 \text{ (diagrama de 2 círculos)} + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar}\right) \left(\frac{-\lambda}{4!}\right)^2 \left[ 72 \text{ (diagrama de 3 círculos)} + 24 \text{ (diagrama de 2 círculos)} \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar}\right) \int d^4x d^4x' J(x) J(x') \left\{ x \longrightarrow x' + \left(\frac{-i\lambda}{4!\hbar}\right) 12 \text{ (diagrama de 1 círculo)} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \left(\frac{-i\lambda}{4!\hbar}\right)^2 \left[ 288 \text{ (diagrama de 1 círculo)} + 288 \text{ (diagrama de 2 círculos)} + 192 \text{ (diagrama de 1 círculo)} \right] \right\} + \dots \quad (6.24)
\end{aligned}$$

Es decir, en el desarrollo de  $W$  sólo quedan los diagramas conexos, con los mismos pesos con que aparecen en el desarrollo de  $Z$ .

El *linked cluster theorem* afirma que la cancelación de los diagramas inconexos ocurre a todo orden en teoría de perturbaciones [12]. Por supuesto, cuando  $\lambda = 0$  encontramos

$$W_0[J] = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar}\right) \int d^4x d^4x' J(x) G_F(x, x') J(x') \quad (6.25)$$

que es simplemente el resultado de la integración gaussiana.

## 6.4. Elementos de matriz irreducibles

Ya sabemos que las derivadas de  $Z$  son los elementos de matriz del producto ordenado temporalmente de operadores de campo. Es interesante calcular las derivadas de  $W$ . Tenemos

$$e^{iW[J]/\hbar} = Z[J] = \langle 0 \text{ OUT} | 0 \text{ IN} \rangle_J \quad (6.26)$$

No estamos tomando  $J = 0$ , por lo cual el bracket no es trivial. Entonces

$$\frac{i}{\hbar} \frac{\delta W[J]}{\delta J_1} e^{iW[J]/\hbar} = \frac{\delta Z[J]}{\delta J_1} = \frac{i}{\hbar} \langle 0 OUT | \Phi_1 | 0 IN \rangle_J \quad (6.27)$$

O sea

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J_1} = \phi_1 = \frac{\langle 0 OUT | \Phi_1 | 0 IN \rangle_J}{\langle 0 OUT | 0 IN \rangle_J} \quad (6.28)$$

Para una teoría  $\lambda\Phi^4$ ,  $\phi[J=0] = 0$ .

Tomando una nueva derivada en 6.27

$$\left[ \frac{i}{\hbar} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_1 \delta J_2} + \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 \frac{\delta W[J]}{\delta J_1} \frac{\delta W[J]}{\delta J_2} \right] e^{iW[J]/\hbar} = \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_1 \delta J_2} = \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 \langle 0 OUT | T(\Phi_1 \Phi_2) | 0 IN \rangle_J \quad (6.29)$$

Entonces

$$\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_1 \delta J_2} = \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\langle 0 OUT | T(\Phi_1 \Phi_2) | 0 IN \rangle_J}{\langle 0 OUT | 0 IN \rangle_J} - \phi_1 \phi_2 \right] \quad (6.30)$$

Pasar de los momentos de  $Z$  a los de  $W$  es como pasar de  $\langle x^2 \rangle$  a la varianza. Decimos que los momentos generados por  $W$  son los momentos *irreducibles* o *cumulantes* (que no son los momentos *centrados*).

# Capítulo 7

## La acción efectiva

El paso de  $Z$  a  $W$  implica una simplificación significativa de la serie perturbativa, ya que no es necesario calcular diagramas inconexos. El paso siguiente es reemplazar a  $W$  por la *acción efectiva*  $\Gamma$ . El desarrollo perturbativo de la acción efectiva contiene solamente diagramas *irreducibles de una partícula* (*one-particle irreducible*, 1PI). Estos son diagramas que son conexos y siguen siendo conexos aunque se corte una línea interna cualquiera.

La acción efectiva es la transformada de Legendre del funcional generador respecto del campo de fondo. Es decir, si

$$\frac{\delta W}{\delta J} = \phi \quad (7.1)$$

Entonces

$$\Gamma[\phi] = W[J] - \int d^4x J\phi \quad (7.2)$$

En la ecuación 7.2 se entiende que  $J$  es la función de  $\phi$  que resulta de invertir la relación 7.1. El sentido físico de  $\phi$  es que es el elemento de matriz del operador de campo  $\Phi$  entre los vacíos IN y OUT en presencia de la fuente  $J$ . El valor de expectación físico se obtiene cuando  $J = 0$ , en cuyo caso los vacíos IN y OUT coinciden.

Por las propiedades de la transformación de Legendre obtenemos que

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi} = -J \quad (7.3)$$

Derivando la ecuación 7.1 respecto de  $\phi$  y usando 7.3 obtenemos

$$\int d^4x'' \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi(x) \delta \phi(x'')} \frac{\delta^2 W}{\delta J(x'') \delta J(x')} = -\delta(x - x') \quad (7.4)$$

Esta ecuación demuestra que el Hessiano de la acción efectiva es invertible, y su inversa es precisamente el propagador de Feynman. Además, si  $W$  depende de algún parámetro  $\lambda$  además de la fuente externa  $J$ , entonces

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \lambda} \right|_J = \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda} \right|_\phi \quad (7.5)$$

Para calcular  $\Gamma$ , vamos a utilizar el *método de campo de fondo* (*background field method*). Para simplificar la discusión, vamos a asumir que ya hemos hecho la rotación de Wick  $t = -i\tau$  y vamos a trabajar directamente sobre la integral de camino euclídea.

Exponenciando la ecuación 7.2 y utilizando 7.3 obtenemos

$$e^{-\Gamma[\phi]/\hbar} = \int D\phi e^{-(1/\hbar)[S[\Phi] - \int (\delta\Gamma/\delta\phi)(\Phi - \phi)]} \quad (7.6)$$

que puede considerarse una ecuación, un tanto formal, para  $\Gamma$ . La idea es obtener una solución perturbativa para esta ecuación. Para eso escribimos

$$\begin{aligned} \Phi &= \phi + \varphi \\ \Gamma &= S + \hbar\Gamma_1 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Entonces

$$e^{-\Gamma_1[\phi]} = \int D\phi e^{-(1/\hbar)[S[\phi+\varphi]-S[\phi]-(\delta S/\delta\phi)\varphi-\hbar\int(\delta\Gamma_1/\delta\phi)\varphi]} \quad (7.8)$$

Por ejemplo, para una  $\lambda\Phi^4$  tenemos

$$S[\phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 \right\} \quad (7.9)$$

y

$$S[\phi+\varphi] - S[\phi] - (\delta S/\delta\phi)\varphi = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda(6\phi^2\varphi^2 + 4\phi\varphi^3 + \varphi^4) \right\} \quad (7.10)$$

La corrección  $\Gamma_1$  es el funcional generador de la acción definida por el funcional 7.10. Para ver para qué valor de la fuente externa es necesario calcular este funcional generador, observamos que, si  $\Phi = \phi + \varphi$  y  $\phi = \langle\Phi\rangle$ , entonces debe ser  $\langle\varphi\rangle = 0$ .

Se deduce que  $\Gamma_1$  es la suma de todos los diagramas conexos de la acción 7.10, con patas externas que se conectan a la fuente que hace que  $\langle\varphi\rangle = 0$ . Ahora vamos a ver que sólo necesitamos calcular los diagramas que son  $1PI$ ; en particular, ningún diagrama con patas externas puede ser  $1PI$ , ya que se desconecta al cortar la pata externa. Por lo tanto, el valor preciso de la fuente externa es irrelevante: su única función es contribuir a la cancelación de los diagramas que no son  $1PI$ .

Para ver cómo funciona esto, tomemos un diagrama cualquiera que no sea  $1PI$ , por ejemplo, el de la figura 7.1

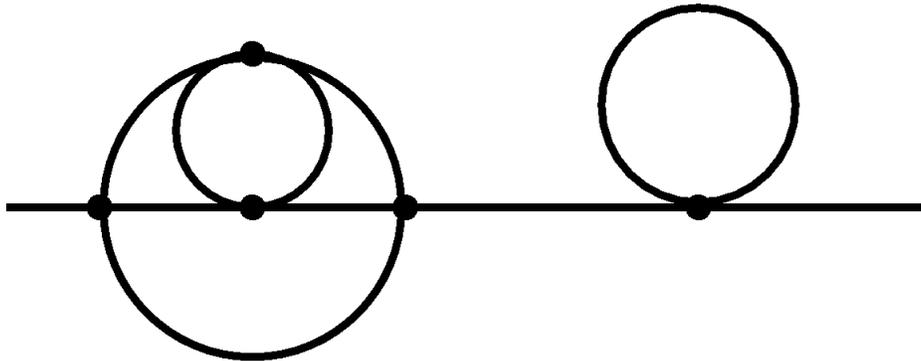


Figura 7.1: Un diagrama de Feynman que *no* es  $1PI$ .

Este diagrama se puede pensar como la inserción del diagrama  $B$  (ver la figura 7.2) en el diagrama  $A$  a través de la línea  $c$ .

Ahora imaginemos que reemplazamos  $B$  por todos los diagramas posibles que terminan en la línea  $c$ , y sumemos los diagramas resultantes. La suma de todos los diagramas que terminan en un vértice dado es el valor de expectación del campo evaluado en la posición que indica el vértice. Pero cuando calculamos  $\Gamma_1$ , el campo en cuestión es  $\varphi$ , y ya sabemos que el valor de expectación de  $\varphi$  se anula. Por lo tanto, podemos descartar el diagrama de la figura 7.1, no porque sea cero, sino porque se cancela al considerar todos los otros diagramas que podríamos colgar de la línea  $c$  (ver la figura 7.3).

Para una presentación más formal del método del campo de fondo ver [13].

El interés de la acción efectiva para nosotros es la simplificación que conlleva poder descartar de entrada los diagramas que no son  $1PI$ , pero además la acción efectiva  $\Gamma$  tiene un interés intrínseco. En particular, una de sus aplicaciones más importantes es usar la ecuación 7.3, con  $J = 0$ , para detectar si la teoría admite estados de vacío con valores de expectación del campo no nulos. Si esto ocurre, indica un rompimiento espontáneo de simetría (es decir, una transición de fase), similar al rompimiento de simetría señalado por la aparición de una magnetización no nula en un material ferromagnético.

Como estamos considerando el caso sin fuentes externas, el valor de expectación del campo es necesariamente constante. Para una discusión de porqué la ecuación 7.3 no puede considerarse una verdadera “ecuación de movimiento” para el valor de expectación del campo, y cuál es entonces esa ecuación de movimiento, ver [13].

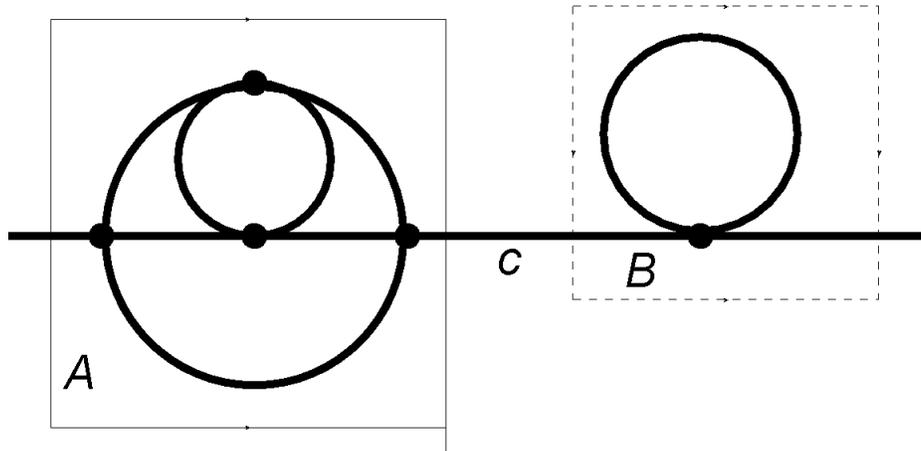


Figura 7.2: El diagrama de la figura 7.1 se puede pensar como la inserción del diagrama B en el diagrama A a través de la línea c.

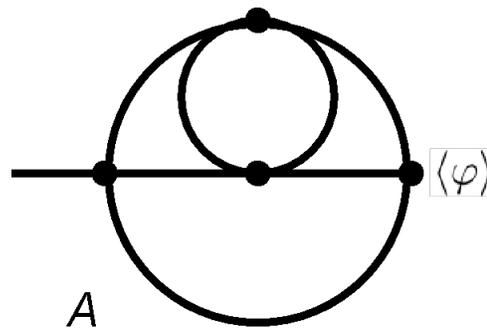


Figura 7.3: La suma de todos los diagramas que terminan en la línea c es el valor de expectación del campo  $\varphi$ , que vale cero.

### 7.1. El desarrollo en loops

Como las únicas integrales de camino que realmente sabemos calcular son los momentos de una medida Gaussiana, si realmente queremos calcular  $\Gamma_1$  a partir de la ecuación 7.8, lo que podemos hacer es separar la acción “libre”

$$S_{libre}[\varphi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right\} \tag{7.11}$$

y desarrollar todo lo demás en serie de potencias. El resultado va a ser una serie de diagramas de Feynman (de los que sólo retenemos los que son 1PI) en los que las líneas internas llevan un propagador de Feynman del campo  $\varphi$ . En estos diagramas encontramos vértices en los que entran cuatro líneas internas, o tres y un campo  $\phi$ , o dos y dos campos  $\phi$ . Es más cómodo pensar que los campos de fondo  $\phi$  se insertan en el diagrama a través de líneas externas, pero, a diferencia de lo que ocurre en el cálculo del funcional generador, estas líneas externas no llevan propagadores.

Consideremos un diagrama de Feynman cualquiera, por ejemplo la doble burbuja de la figura 7.4.

La expresión que representa este diagrama es

$$DB = \int d^4x d^4x' d^4x'' \phi^2(x) \phi^2(x'') G(x, x')^2 G(x', x'')^2 \tag{7.12}$$

Si reemplazamos cada propagador por su transformada de Fourier (recordemos que estamos trabajando en la teoría euclídea)

$$G(x, x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2 + m^2} \tag{7.13}$$

Obtenemos

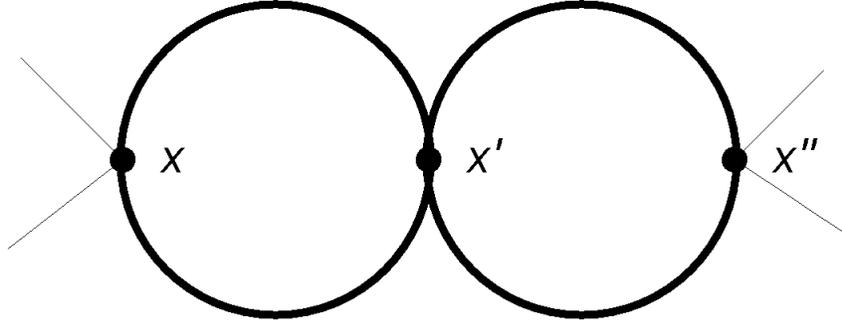


Figura 7.4: La doble burbuja.

$$DB = \int d^4x d^4x' d^4x'' \phi^2(x) \phi^2(x'') \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \frac{e^{i[(p_1+p_2)(x-x')+(p_3+p_4)(x'-x'')]} (7.14)$$

Es posible realizar explícitamente la integral sobre  $x'$ , resultando

$$DB = \int d^4x d^4x'' \phi^2(x) \phi^2(x'') \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \frac{e^{i[(p_1+p_2)x-(p_3+p_4)x'']}}{(p_1^2+m^2)(p_2^2+m^2)(p_3^2+m^2)(p_4^2+m^2)} (2\pi)^4 \delta(p_3+p_4-p_1-p_2) (7.15)$$

En otras palabras, le asignamos a cada línea interna un valor del impulso (con un signo arbitrario) y entonces la integral sobre cada vértice conduce a una ley análoga a la Ley de Kichhoff de las corrientes de Física 3: la suma algebraica de los impulsos que entran a un vértice se anulan. Esta ley expresa la conservación del impulso en las interacciones. Lo mismo vale para los vértices asociados a líneas externas, en este caso tenemos que transformar Fourier los campos de fondo.

Entonces, a cada línea interna le corresponde un impulso, sobre el cual es necesario integrar, pero las integrales sobre las posiciones de los vértices imponen vínculos sobre estos impulsos, por lo cual podríamos eliminar algunas de estas integraciones (por ejemplo, podríamos hacer explícitamente la integral sobre  $p_4$  en la expresión 7.15, aprovechando la presencia de la delta). Ahora, mientras que el impulso de una línea externa entra o sale de un único vértice, el impulso de una línea interna sale de un vértice y entra en otro, de manera que aparece en las sumas respectivas con signos opuestos. Por lo tanto, si sumamos los vínculos de todos los vértices, nos queda un único vínculo que expresa la cancelación de la suma de los impulsos externos, y que por lo tanto no dice nada sobre los impulsos en las líneas internas. En otras palabras, si tenemos  $V$  vértices, sólo vamos a poder cancelar  $V - 1$  integrales; el último vínculo es la conservación del impulso total, y no interpela a los impulsos que circulan dentro del diagrama.

Como en Física 3, la manera de satisfacer automáticamente la Ley de Kirchhoff es asignar impulsos no a cada línea, sino a los lazos del diagrama. Como un lazo es un camino que entra y sale de cada vértice que atraviesa, el impulso correspondiente no afecta la conservación del impulso.

Si yo tengo un diagrama de  $I$  líneas internas, e impongo  $V - 1$  vínculos, el número de integrales independientes sobre impulsos es

$$L = I - V + 1 (7.16)$$

Este es el número de lazos o *loops* (estamos asumiendo un diagrama conexo, si no, se conserva el impulso en cada componente conexa independientemente, y hay que reemplazar el 1 por el número de componentes conexas).

Ahora, contemos el “número de líneas que entran a vértices”. El número total de líneas entrando en los vértices es  $4V$ . Cada línea externa entra en un único vértice, y cada línea interna entra en dos. Por lo tanto

$$4V = 2I + E (7.17)$$

donde  $E$  es el número de patas externas (que debe ser par). Por lo tanto

$$\begin{aligned}
I &= 2(L-1) + \frac{E}{2} \\
V &= L-1 + \frac{E}{2}
\end{aligned}
\tag{7.18}$$

Nótese que existe un número finito de diagramas con un número de loops y un número de líneas externas dados.

Por otro lado, cada línea interna lleva un propagador de Feynman, que es proporcional a  $\hbar$ , mientras que cada vértice lleva un factor de  $\lambda/\hbar$ . Debemos multiplicar por un factor global de  $\hbar$ , ya que el desarrollo perturbativo define a  $\Gamma/\hbar$ . De esa manera vemos que cada diagrama de Feynman lleva un factor de  $\hbar^L$ . Eso sugiere agrupar los diagramas de Feynman no por la potencia de  $\lambda$ , sino por el número de lazos. Aumentando el número de lazos accedemos a procesos de mayor complejidad.

En particular, en el límite  $\hbar \rightarrow 0$  sólo quedan los “diagramas de árbol”, que son diagramas conexos sin lazos. Pero ninguno de estos diagramas son 1PI, salvo los diagramas formados por una única línea o por un único vértice. De hecho, en el límite  $\hbar \rightarrow 0$ ,  $\Gamma$  se reduce a la acción clásica [13], que es otra motivación para el nombre de “acción efectiva”:  $\Gamma$  es una manera efectiva de incorporar correcciones cuánticas en la acción. Para la parte cuadrática, esto se puede verificar con los resultados de la sección anterior.

## 7.2. Cálculo de la acción efectiva

Como ya hemos visto, los coeficientes del desarrollo de la acción efectiva en potencias del “campo medio”  $\phi$  al orden  $\hbar^\ell$  son los diagramas de Feynman 1PI de  $\ell$  loops, sin propagadores en las líneas externas. Al orden cero por lo tanto debemos mirar diagramas de árbol, y por la condición de que los diagramas deben ser 1PI la acción efectiva se reduce a la acción clásica.

A un loop ya encontramos un número infinito de diagramas con  $V = I = E/2$ , estos diagramas tienen la forma de la figura 7.5

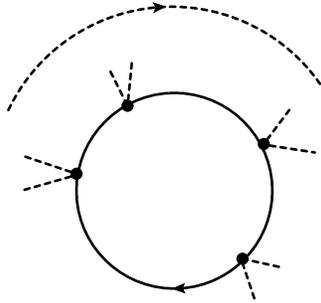


Figura 7.5: Un diagrama de Feynman de 1 loop genérico.

Como ejemplo vamos a calcular los diagramas de dos y cuatro patas externas, y luego los diagramas de dos loops y dos patas externas.

### 7.2.1. El tadpole

Como ya hemos visto, la acción efectiva  $\Gamma = S + \Gamma_1$ , donde  $S$  es la acción clásica, y

$$\Gamma_1[\phi] = -\hbar \int D\varphi e^{-\int d^4x ((\partial\varphi)^2 + m^2\varphi^2)/2\hbar} e^{-\lambda \int d^4x (6\phi^2\varphi^2 + 4\phi\varphi^3)/4!\hbar} e^{-\lambda \int d^4x \varphi^4/4!\hbar} \Big|_{1PI} \tag{7.19}$$

Donde el subíndice indica que al hacer el desarrollo en potencias de las últimas dos exponenciales, solo retenemos los diagramas de Feynman que sean 1PI. Un diagrama de 1 loop y dos patas externas debe tener un único vértice, y por lo tanto proviene de

$$\frac{6\lambda}{4!} \int d^4x \phi^2(x) \langle \varphi^2(x) \rangle \tag{7.20}$$

Reemplazando el valor medio por un propagador, obtenemos el *tadpole* (ver la figura 7.6)

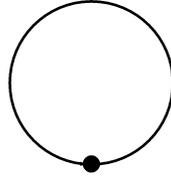


Figura 7.6: El tadpole.

$$\lambda \langle \varphi^2(x) \rangle = \hbar \lambda \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2} \quad (7.21)$$

La característica más obvia de esta integral es que no significa nada, porque diverge. Por ahora lo que vamos a hacer es *regularizarla*, es decir, vamos a deformar la integral 7.21 introduciendo un nuevo parámetro  $\epsilon$ , tal que la nueva integral se reduzca a 7.21 cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , pero sea calculable mientras  $\epsilon \neq 0$ . En otras palabras, pensada como función de  $\epsilon$ , la integral va a tener un desarrollo de Laurent con algunas potencias inversas de  $\epsilon$ . Más adelante vamos a ver el paso siguiente, de cómo extraer conclusiones significativas de las integrales regularizadas.

Existen muchas maneras de regularizar una integral como 7.21. En este caso, la divergencia se produce porque el dominio de integración se extiende a  $q \rightarrow \infty$ , lo que se conoce como una *divergencia ultravioleta*. Para resolver este problema, por ejemplo, uno podría discretizar el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^4$  en una red de constante  $a$ , en cuyo caso no puede haber valores de  $q$  mayores a  $\Lambda = 2\pi/a$ . La integral con un límite superior finito se puede calcular, y diverge (como  $\Lambda^2$ ) cuando  $a \rightarrow 0$ . Eso se llama *poner un cut-off*.

Como nosotros somos argentinos, vamos a usar el método de *regularización dimensional* de Bollini y Giambiagi [14]. La idea es que la integral 7.21 converge en una dimensión. Entonces podemos pensar al tadpole como una función de la dimensionalidad  $d$ , que está bien definida cuando  $d < 2$ , y después ver si es posible extender esta función (que ya no admitiría la representación de la ec. 7.21) a un entorno de  $d = 4$ . este procedimiento se conoce como *continuación analítica*.

Antes de empezar tenemos que aclarar un tema acerca de las dimensiones de los distintos objetos que aparecen en la teoría. Estamos trabajando en unidades naturales en que  $\hbar = c = k_B = 1$  (en este curso la constante de gravitación universal es irrelevante), vamos a retener a  $\hbar$  en las expresiones para tener registro del número de loops en un diagrama de Feynman. Por lo tanto la acción es adimensional, y las longitudes tienen unidades de inversa de masa. El elemento de volumen en  $d$  dimensiones tiene unidades de  $M^{-d}$  y el operador de derivación tiene unidades de  $M$ , de modo que, para que el término cinético sea adimensional, debe ser

$$[\phi] = M^{(d-2)/2} \quad (7.22)$$

y el término de masa es efectivamente adimensional con la masa teniendo unidades de masa en cualquier número de dimensiones. pero para que el término cuártico sea adimensional, es preciso que la constante de acoplamiento tenga unidades de  $M^{-(d-4)}$ . Para hacer esto explícito vamos a reemplazar  $\lambda \rightarrow \lambda \mu^{-(d-4)}$ , donde  $\mu$  tiene unidades de masa. De esa manera aparece un nuevo parámetro dimensional en la teoría.

Por supuesto, la aparición de un parámetro dimensional en el proceso de regularización no es privativo de la regularización dimensional; si hubiéramos impuesto un cutoff, el parámetro dimensional sería el propio cutoff.

En consecuencia, nuestro problema es darle sentido a la expresión

$$D(x, x; d) = \hbar \lambda \mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + m^2} \quad (7.23)$$

El próximo paso es usar la representación

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty ds e^{-sx} \quad (7.24)$$

Con lo cual

$$D(x, x; d) = \hbar \lambda \mu^{4-d} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{-sq^2} \quad (7.25)$$

La integral sobre los impulsos se factoriza en  $d$  integrales gaussianas, de modo que

$$D(x, x; d) = \hbar \lambda \mu^{4-d} \int_0^\infty ds \frac{e^{-sm^2}}{[4\pi s]^{d/2}} \quad (7.26)$$

y haciendo el cambio de variables  $sm^2 = t$  obtenemos

$$D(x, x; d) = \hbar \lambda \frac{m^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{m}{\sqrt{4\pi\mu}} \right)^{d-4} \int_0^\infty dt t^{-d/2} e^{-t} \quad (7.27)$$

Si fuera  $-d/2 > -1$  ( $d < 2$ ) entonces reconoceríamos la representación integral de la función  $\Gamma$  de Euler

$$\Gamma[z] = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} \quad (7.28)$$

Esta expresión para la Gama se puede usar sólo cuando  $\text{Re}[z] > 0$ . Pero la función  $\Gamma[z]$  está definida para todo  $z$  complejo, excepto 0 y los enteros negativos, como vamos a ver; simplemente si  $\text{Re}[z] \leq 0$  hay que calcularla de otra manera. Decimos que la función  $\Gamma$  admite una *prolongación analítica*.

El método de regularización dimensional consiste en reemplazar la integral en la ecuación 7.27 por  $\Gamma[1 - d/2]$ , aún cuando esta representación de la función  $\Gamma$  es válida cuando  $d < 2$  y nosotros la queremos usar para  $d \approx 4$ .

$$D(x, x; d) = \hbar \lambda \frac{m^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{m}{\sqrt{4\pi\mu}} \right)^{d-4} \Gamma[1 - d/2] \quad (7.29)$$

La continuación analítica de la  $\Gamma$  se basa en la propiedad (que si  $\text{Re } x > 0$  se obtiene de una integración por partes)

$$\Gamma[x + 1] = x\Gamma[x] \quad (7.30)$$

De modo que si  $-1 < \text{Re } x < 0$  no podemos usar la representación integral, pero podemos definir

$$\Gamma[x] = \frac{1}{x} \Gamma[x + 1] \quad (7.31)$$

donde sí podemos usar la representación integral en el lado derecho. El principio de conservación de la dificultad se expresa por la aparición de un polo simple en  $x = 0$ . El proceso se puede extender a todas las franjas  $-n - 1 < \text{Re } x < -n$ , y el precio es la aparición de un nuevo polo (simple) en cada entero negativo.

Aplicando este procedimiento obtenemos

$$D(x, x; d) = \hbar \lambda \frac{m^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{m}{\sqrt{4\pi\mu}} \right)^{d-4} \frac{\Gamma[3 - d/2]}{(1 - d/2)(2 - d/2)} \quad (7.32)$$

Todavía no podemos poner  $d = 4$  en 7.32 porque cae justo en un polo. Por eso ponemos  $d = 4 - 2\epsilon$ , y

$$\Gamma\left[3 - \frac{d}{2}\right] = \Gamma[1 + \epsilon] \approx 1 - \gamma\epsilon + O(\epsilon^2) \quad (7.33)$$

donde  $\gamma \approx 0,55$  es la *constante de Euler-Mascheroni*.

Nótese que el resultado de la *regularización* del tadpole no fue encontrar un valor finito para la expresión original, sino hacer explícita la divergencia. Mientras que no tomemos el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , podemos manipular la expresión 7.32. Para poder tomar ese límite, debemos pasar primero por el proceso de *renormalización*, que es nuestro próximo tema.

Una consecuencia notable de la regularización dimensional es que implica que

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} = 0 \quad (7.34)$$

Obviamente, uno no obtiene este resultado si usa un cutoff.

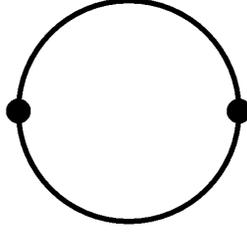


Figura 7.7: El fish

### 7.2.2. El fish

Para continuar vamos a calcular la corrección a un loop a la constante de acoplamiento. Un diagrama de un loop con 4 líneas externas debe tener dos vértices y dos líneas internas. Hay un único diagrama posible y proviene de

$$-\frac{\hbar}{2} \left( \frac{6\lambda\mu^{4-d}}{4!\hbar} \right)^2 \left\langle \left( \int d^d x \phi^2 \varphi^2 \right)^2 \right\rangle \quad (7.35)$$

En términos de diagramas de Feynman obtenemos (ver la figura 7.7)

$$-\hbar \left( \frac{6\lambda\mu^{4-d}}{4!\hbar} \right)^2 \int d^d x d^d x' \phi^2(x) \phi^2(x') G(x-x')^2 \quad (7.36)$$

Transformando los propagadores y usando que la transformada de Fourier convierte productos en convoluciones, resulta

$$-\hbar \left( \frac{6\lambda\mu^{4-d}}{4!\hbar} \right)^2 \int d^d x d^d x' \phi^2(x) \phi^2(x') \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{ip(x-x')} \bigcirc \quad (7.37)$$

donde

$$\bigcirc = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2 + m^2] [(p-q)^2 + m^2]} \quad (7.38)$$

Vamos a seguir trabajando sobre la transformada de Fourier.

Para destrabar este tipo de cuentas es muy útil usar los *parámetros de Feynman*

$$\prod_{j=1}^N \frac{1}{A_j^{n_j}} = \frac{[(\sum n_j) - 1]!}{\prod (n_j - 1)!} \int_0^1 dx_1 \dots dx_N \frac{\prod_{j=1}^N x_j^{n_j-1}}{[\sum_{j=1}^N x_j A_j]^{\sum n_j}} \delta\left(1 - \sum x_j\right) \quad (7.39)$$

(se generaliza a exponentes complejos reemplazando  $n!$  por  $\Gamma[n+1]$ ). La demostración está en el apéndice 7.3.

Usando los parámetros de Feynman, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 + m^2] [(p-q)^2 + m^2]} = \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[xq^2 + (1-x)(p-q)^2 + m^2]^2} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 - 2(1-x)pq + (1-x)p^2 + m^2]^2} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(q - (1-x)p)^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^2} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 + M^2]^2} \end{aligned} \quad (7.40)$$

donde

$$M^2 = x(1-x)p^2 + m^2 \quad (7.41)$$

Esta integral tampoco converge. Reincorporando el prefactor en la ec. 7.37 (recordar que cada propagador lleva un factor de  $\hbar$ )

$$\begin{aligned} &= -\hbar \left(\frac{6\lambda}{4!}\right)^2 (\mu^2)^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2 + M^2]^2} \\ &= -\hbar \left(\frac{6\lambda}{4!}\right)^2 (\mu^2)^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^\infty ds s e^{-M^2 s} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{-sq^2} \\ &= -\hbar \left(\frac{6\lambda}{4!}\right)^2 (\mu^2)^{4-d} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \int_0^\infty ds s^{1-(d/2)} e^{-M^2 s} \\ &= -\hbar \left(\frac{6\lambda}{4!}\right)^2 \frac{\mu^{4-d}}{16\pi^2} \Gamma\left[2 - \frac{d}{2}\right] \int_0^1 dx \left(\frac{M^2}{4\pi\mu^2}\right)^{d/2-2} \end{aligned} \quad (7.42)$$

y si  $d = 4 - 2\epsilon$

$$\bigcirc = -\hbar \left(\frac{6\lambda}{4!}\right)^2 \frac{\mu^{2\epsilon}}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma - \int_0^1 dx \ln\left(\frac{M^2}{4\pi\mu^2}\right) + O(\epsilon) \right\} \quad (7.43)$$

Nótese que la parte divergente es independiente de  $p$ , por lo cual la integral final sobre los impulsos se puede hacer y converge a una delta. De este modo, la parte divergente en la acción efectiva toma la misma forma que el término de autointeracción de la acción clásica

$$-\hbar \left(\frac{6\lambda}{4!\hbar}\right)^2 \frac{\mu^{2\epsilon}}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \int d^d x \phi^4 \quad (7.44)$$

### 7.2.3. La parte imaginaria del fish

Cuando volvemos del espacio euclídeo al Minkowskiano,  $p^2$  no es más definido positivo, y el argumento del logaritmo en 7.43 puede ser negativo. Por lo tanto el fish adquiere una parte imaginaria, y de hecho una discontinuidad, si usamos la determinación del logaritmo en que

$$\ln[-x + i\epsilon] = \ln|x| \pm i\pi \operatorname{sign}[\epsilon] \quad (7.45)$$

Concretamente

$$\operatorname{Im}\bigcirc = -\frac{1}{16\pi} \int_0^1 dx \theta[x(1-x)(-p^2) - m^2] \quad (7.46)$$

(la parte imaginaria del diagrama es finita, de manera que es posible poner  $d = 4$  directamente). Como  $x(1-x) \leq 1/4$ , la parte imaginaria es idénticamente cero excepto cuando  $-p^2 \geq 4m^2$ . Si esta condición se cumple, entonces el rango de valores de  $x$  que contribuye a la parte imaginaria es cuando

$$x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \geq \frac{m^2}{(-p^2)} \quad (7.47)$$

o sea

$$\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{(-p^2)}}\right) \leq x \leq \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{(-p^2)}}\right) \quad (7.48)$$

de manera que

$$\operatorname{Im}\bigcirc = -\frac{1}{16\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{(-p^2)}} \quad (7.49)$$

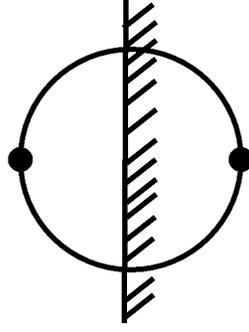


Figura 7.8: Un diagrama cortado

Es interesante comparar esto con el resultado de calcular el diagrama “cortado”. “Cortar” un diagrama quiere decir dividirlo en dos partes, y poner las líneas que van de una parte a la otra “on shell”.

Eso quiere decir reemplazar el propagador de Feynman por

$$2\pi\theta(p^0)\delta(-p^2 - m^2) \quad (7.50)$$

En otras palabras, los momentos que fluyen por las líneas cortadas corresponden a partículas reales, no virtuales como es el caso general en un diagrama de Feynman. En el caso del fish obtenemos

$$\text{fish} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \theta(q^0) \delta(-q^2 - m^2) \theta(p^0 - q^0) \delta(-(p-q)^2 - m^2) \quad (7.51)$$

No hay pérdida de generalidad en asumir  $p^i = 0$ , y entonces

$$\begin{aligned} \text{fish} &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{dq q^2}{\omega_q} \theta(p^0 - \omega_q) \delta((p^0 - \omega_q)^2 - \omega_q^2) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{dq q^2}{\omega_q} \theta(p^0 - \omega_q) \delta(p^{02} - 2p^0\omega_q) \end{aligned} \quad (7.52)$$

La delta se enciende cuando  $\omega_q = p^0/2$ ,  $q = \sqrt{p^{02} - 4m^2}/2$ , y entonces

$$\text{fish} = \frac{1}{8\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{(-p^2)}} \quad (7.53)$$

La similitud entre el diagrama cortado y la parte imaginaria del propagador es un caso particular del *teorema óptico*. La matriz  $S$  es unitaria, de manera que si escribimos  $S = 1 + iT$  encontramos

$$i(T - T^\dagger) + T^\dagger T = 0 \quad (7.54)$$

Si ensanguchamos esta igualdad con un estado  $|\alpha\rangle$  cualquiera, e intercalamos una identidad entre  $T^\dagger$  y  $T$ , encontramos que

$$\text{Im} \langle \alpha | T | \alpha \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\text{anything}} |\langle \text{anything} | \alpha \rangle|^2 \quad (7.55)$$

La parte imaginaria del fish da la probabilidad de que un estado de momento  $p$  decaiga en dos partículas reales.

### 7.3. Apéndice: Parámetros de Feynman

Queremos calcular el producto

$$P = \prod_{j=1}^n A_j^{-z_j} \quad (7.56)$$

Vamos a suponer que los exponentes tienen parte real positiva; el caso general se obtiene por continuación analítica. Cada factor admite la representación

$$A_j^{-z_j} = \frac{1}{\Gamma[z_j]} \int_0^\infty ds_j s_j^{z_j-1} e^{-s_j A_j} \quad (7.57)$$

Entonces

$$P = \frac{1}{\prod_{j=1}^n \Gamma[z_j]} \int \left( \prod_{k=1}^n ds_k \right) \left( \prod_{l=1}^n s_l^{z_l-1} \right) e^{-\sum_{m=1}^n s_m A_m} \quad (7.58)$$

Multiplicamos por 1

$$P = \frac{1}{\prod_{j=1}^n \Gamma[z_j]} \int \left( \prod_{k=1}^n ds_k \right) \left( \prod_{l=1}^n s_l^{z_l-1} \right) e^{-\sum_{m=1}^n s_m A_m} \int_0^\infty ds \delta \left( s - \sum_{q=1}^n s_q \right) \quad (7.59)$$

Definimos para cada  $k$   $s_k = st_k$ ,  $t_k \geq 0$

$$P = \frac{1}{\prod_{j=1}^n \Gamma[z_j]} \int \left( \prod_{k=1}^n dt_k \right) \left( \prod_{l=1}^n t_l^{z_l-1} \right) \int_0^\infty ds \delta \left[ s \left( 1 - \sum_{q=1}^n t_q \right) \right] e^{-s(\sum_{m=1}^n t_m A_m)} s^{\sum_{r=1}^n z_r} \quad (7.60)$$

Ahora

$$\delta \left[ s \left( 1 - \sum_{q=1}^n t_q \right) \right] = \frac{1}{s} \delta \left( 1 - \sum_{q=1}^n t_q \right) \quad (7.61)$$

de manera que la integral sobre  $s$  se puede hacer y da

$$P = \frac{\Gamma[\sum_{r=1}^n z_r]}{\prod_{j=1}^n \Gamma[z_j]} \int \left( \prod_{k=1}^n dt_k \right) \frac{(\prod_{l=1}^n t_l^{z_l-1})}{[\sum_{m=1}^n t_m A_m]^{\sum_{r=1}^n z_r}} \delta \left( 1 - \sum_{q=1}^n t_q \right) \quad (7.62)$$

QED.

# Capítulo 8

## Renormalización.

### 8.1. Divergencia de diagramas de Feynman

En el capítulo anterior vimos que

- Las correcciones a la acción efectiva de orden superior a  $\hbar$  se expresan en términos de diagramas de Feynman.
- Algunos de estos diagramas resultan en expresiones divergentes.
- Podemos *regularizar* estas divergencias usando el método de *regularización dimensional*.

Ahora vamos a avanzar sobre cómo es posible utilizar las expresiones regularizadas para calcular la acción efectiva.

Un problema que es necesario resolver es qué diagramas esperamos que van a presentar divergencias. Consideremos un gráfico  $\mathcal{G}$  con  $V$  vértices,  $I$  líneas internas,  $L$  loops y  $E$  patas externas. Este gráfico tiene una expresión

$$\mathcal{G} = \lambda^V G \quad (8.1)$$

En términos de unidades

$$G \propto \mu^{dL-2I-V(d-4)} \quad (8.2)$$

y por lo tanto

$$\mathcal{G} \propto \mu^{d-(d-2)\frac{E}{2}} \quad (8.3)$$

Si  $E = 2$ , el exponente es 2 en todo número de dimensiones, o sea unidades de  $m^2$ . Si  $E = 4$ , el exponente es  $4 - d$ , o sea las mismas unidades que  $\lambda$ .

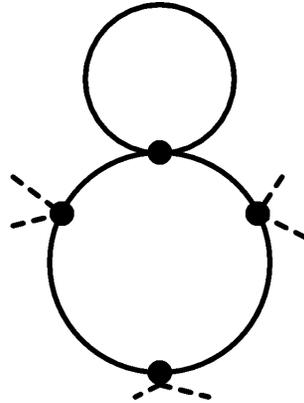
Ahora vamos a analizar el mismo gráfico desde el punto de vista de la convergencia. Imaginemos a todos los impulsos que circulan en las líneas internas como componentes de un único vector en  $\mathbf{R}^{dL}$ . Yendo a “coordenadas polares” en este espacio vemos que

$$G \propto \int dp p^{dL-1} p^{-2I} = \int dp p^{(d-4)L+(4-E)-1} \quad (8.4)$$

Decimos que  $(d-4)L+(4-E)-1$  es la *divergencia superficial* de este diagrama. Si  $d \approx 4$ , la integral converge si  $E > 4$ . Esto por sí solo no implica convergencia. Por ejemplo, un gráfico como el de la figura 8.1 diverge aunque tiene  $E = 6$ . Sin embargo, es obvio que este gráfico diverge porque es un gráfico convergente multiplicado por un tadpole, que en sí mismo es un gráfico con  $E = 2$ . Eso sugiere que si podemos “domar” las divergencias en gráficos con  $E = 2$  y  $E = 4$ , automáticamente resolvemos el problema de todas las divergencias.

Nuestro problema son las llamadas “divergencias primitivas”. Estos son gráficos que divergen pero no poseen subgráficos divergentes. Es decir, la divergencia no se puede achacar a un subgrafo de orden menor, es una divergencia “nueva” en cada orden en teoría de perturbaciones. Por el argumento anterior, las divergencias primitivas sólo aparecen en gráficos con  $E = 2$  o  $E = 4$ .

Ahora, Weinberg observó que si derivamos la integral que define  $G$  respecto de la masa o de un momento externo, la convergencia mejora, y en el caso de un gráfico primitivamente divergente, si derivamos un número suficiente de

Figura 8.1: Un gráfico divergente con  $E = 6$ 

veces la integral se vuelve convergente. Por este motivo la parte divergente del diagrama (la que contiene potencias negativas en el desarrollo de Laurent alrededor de  $d = 4$ ) es a lo sumo un polinomio en  $m$  y en los momentos externos. Eso implica que las divergencias primitivas con  $E = 2$  son proporcionales a  $m^2$  o a  $p^2$ , mientras que las que tienen  $E = 4$  no dependen ni de  $m^2$  ni de  $p^2$ , de modo que sólo pueden ser proporcionales a  $\lambda$ . Esto da lugar a expresiones que son las mismas que aparecen en la acción clásica, observación que da lugar al programa de renormalización.

Como ejemplo del Teorema de Weinberg consideremos el “Sol poniente” (*setting Sun*). Nosotros solamente vamos a identificar los términos divergentes, el cálculo completo está en [15]

$$\bigcirc = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d^d r}{(2\pi)^d} \frac{1}{[r^2 + m^2] [(q-r)^2 + m^2] [(p-q)^2 + m^2]} \quad (8.5)$$

La divergencia superficial de este gráfico, en 4 dimensiones, es 2. Pero la divergencia aparece cuando  $q$  y  $r$  son grandes, y en esa región podemos desarrollar el último factor en potencias de  $p$ . Por razones dimensionales, un término en el desarrollo que escalee como  $p^n$  también va a escalear como  $q^{-(n+2)}$ , y la integral que contenga ese término va a tener un grado de divergencia  $2 - n$ . Por lo tanto, sólo debemos preocuparnos por términos independientes de  $p$  o cuadráticos (los términos lineales se cancelan por invariancia frente a rotaciones).

Concretamente, escribimos

$$\begin{aligned} \bigcirc &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d^d r}{(2\pi)^d} \frac{1}{[r^2 + m^2] [(q-r)^2 + m^2] [q^2 - 2pq + p^2 + m^2]} \\ &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d^d r}{(2\pi)^d} \frac{1}{[r^2 + m^2] [(q-r)^2 + m^2]} \left\{ \frac{1}{[q^2 + m^2]} + \frac{2pq - p^2}{[q^2 + m^2]^2} + \frac{4(pq)^2}{[q^2 + m^2]^3} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (8.6)$$

El término lineal en  $p$  se anula por ser impar en  $q$ . Por invariancia frente a rotaciones, la integral de  $q^i q^j$  es lo mismo que la integral de  $(q^2/d) \delta^{ij}$ . Si escribimos además  $q^2 = (q^2 + m^2) - m^2$ , el último término deviene una integral convergente, de modo que

$$\bigcirc = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d^d r}{(2\pi)^d} \frac{1}{[r^2 + m^2] [(q-r)^2 + m^2]} \left\{ \frac{1}{[q^2 + m^2]} - \frac{(1 - \frac{4}{d}) p^2}{[q^2 + m^2]^2} + \dots \right\} \quad (8.7)$$

la integral sobre  $r$  es el fish que calculamos en el capítulo anterior, por lo tanto

$$= \frac{\Gamma[2 - \frac{d}{2}]}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[x(1-x)q^2 + m^2]^{2-(d/2)}} \left\{ \frac{1}{[q^2 + m^2]} - \frac{(1 - \frac{4}{d}) p^2}{[q^2 + m^2]^2} + \dots \right\} \quad (8.8)$$

Volvemos a introducir parámetros de Feynman

$$= \frac{\Gamma\left[2 - \frac{d}{2}\right]}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \int_0^1 dy y^{1-(d/2)} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{1}{[f(x, y) q^2 + m^2]^{3-(d/2)}} - \frac{(1-y)\left(1 - \frac{4}{d}\right) p^2}{[f(x, y) q^2 + m^2]^{4-(d/2)}} + \dots \right\} \quad (8.9)$$

donde

$$f(x, y) = yx(1-x) + 1-y \quad (8.10)$$

Reescalando  $q$

$$= \frac{\Gamma\left[2 - \frac{d}{2}\right]}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \int_0^1 dy y^{1-(d/2)} f(x, y)^{-d/2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{1}{[q^2 + m^2]^{3-(d/2)}} - \frac{(1-y)\left(1 - \frac{4}{d}\right) p^2}{[q^2 + m^2]^{4-(d/2)}} + \dots \right\} \quad (8.11)$$

y aplicando regularización dimensional

$$= \frac{\Gamma\left[2 - \frac{d}{2}\right]}{(4\pi)^d} \int_0^1 dx \int_0^1 dy y^{1-(d/2)} f(x, y)^{-d/2} \left\{ (m^2)^{d-3} \Gamma[3-d] - (m^2)^{d-4} (1-y) \left(1 - \frac{4}{d}\right) p^2 \Gamma[4-d] \right\} \quad (8.12)$$

Nótese que la divergencia asociada a  $m^2$  va como  $\epsilon^{-2}$ , mientras que la asociada a  $p^2$  va como  $\epsilon^{-1}$ .

## 8.2. La acción efectiva

Finalmente llegamos al problema de qué hacer con los infinitos que vamos encontrando. Para hacer manejables las cuentas, vamos a considerar solamente la acción efectiva a un loop. Con esta aproximación los únicos diagramas divergentes son el tadpole y el fish, de manera que usando los resultados del capítulo anterior encontramos

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi] &= \int d^4 x \left\{ \frac{1}{2} \phi (-p^2) \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \mu^{2\epsilon} \phi^4 \right\} \\ &- \hbar \lambda \frac{m^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \int d^d x \phi^2 \\ &- \hbar \left( \frac{6\lambda}{4!} \right)^2 \frac{\mu^{2\epsilon}}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \int d^d x \phi^4 \\ &+ \text{terminos finitos cuando } d \rightarrow 4 \end{aligned} \quad (8.13)$$

Como los términos infinitos tienen la misma forma que los términos que ya estaban en la acción clásica, podemos agrupar

$$\Gamma[\phi] = \int d^4 x \left\{ \frac{1}{2} \phi (-p^2) \phi + \frac{1}{2} m^2 \left[ 1 - 2\hbar \frac{\lambda}{(4\pi)^2 \epsilon} \right] \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \mu^{2\epsilon} \left[ 1 - \frac{3}{2} \hbar \frac{\lambda}{(4\pi)^2 \epsilon} \right] \phi^4 + \dots \right\} \quad (8.14)$$

La cuestión es que los parámetros  $m^2$  y  $\lambda$  que usamos para escribir la acción clásica son inobservables; para enfatizar ésto los vamos a reemplazar por parámetros “desnudos”  $m_B^2$  y  $\lambda_B$ . Los parámetros observables son los coeficientes de los distintos términos en la acción efectiva. Por lo tanto, definimos

$$\begin{aligned} m^2 &= m_B^2 \left[ 1 - 2\hbar \frac{\lambda}{(4\pi)^2 \epsilon} \right] \\ \lambda \mu^{2\epsilon} &= \lambda_B \left[ 1 - \frac{3}{2} \hbar \frac{\lambda}{(4\pi)^2 \epsilon} \right] \end{aligned} \quad (8.15)$$

donde  $m^2$  y  $\lambda$  son los parámetros “vestidos”. Estamos usando que los parámetros desnudos y “vestidos” coinciden a orden  $\hbar^0$ .

Nótese que hemos elegido incorporar en los parámetros “vestidos” sólo aquellos términos que son imprescindibles para obtener una acción efectiva explícitamente finita. Este procedimiento se conoce como *substracción mínima*. Sin embargo, nada prohíbe incorporar en la definición de los parámetros vestidos términos que son finitos en cuatro dimensiones. Eso da lugar a distintas *prescripciones de renormalización*.

Idealmente uno debería elegir dos observables, calcularlos en términos de los parámetros desnudos, y por otro lado ir y medirlos. Pidiendo que la expresión teórica regularizada corresponda con los valores observados en cuatro dimensiones encontramos la manera de expresar los parámetros desnudos en términos de cantidades finitas. En una teoría renormalizable, al realizar este procedimiento es posible eliminar todos los infinitos de la teoría con un conjunto finito de observaciones.

Por otro lado, la expresión derivada de la acción efectiva depende no sólo de los parámetros desnudos sino también de la *escala de renormalización*  $\mu$ . Por lo tanto, para llevar a cabo la renormalización es necesario asignarle un valor a  $\mu$ . la observación de que ese valor es esencialmente arbitrario es el comienzo del método del *grupo de renormalización*, que vamos a discutir a continuación.

También es válido observar que si incorporáramos términos de dos loops o más también aparecerían divergencias asociadas al término cinético. Para renormalizar esos términos debemos asumir que el argumento de la acción clásica es un campo “desnudo”  $\phi_B$  que se relaciona con el campo “vestido” a través de la relación  $\phi = Z_\phi \phi_B$ .  $Z_\phi$  se conoce como la *renormalización de la función de onda*.

# Capítulo 9

## El grupo de renormalización.

### 9.1. El grupo de renormalización

La vez pasada vimos que la transformación

$$\begin{aligned}\phi_B &= Z_\phi^{1/2} \phi \\ m_B^2 &= Z_m m^2 \\ \lambda_B &= \mu^{2\epsilon} \lambda Z_\Lambda\end{aligned}\tag{9.1}$$

nos permite eliminar los infinitos de la teoría. A orden más bajo, aplicando la prescripción de “sustracción mínima”, encontramos

$$Z_\phi = 1 + \frac{24}{\epsilon} \Lambda^2 + \dots\tag{9.2}$$

$$Z_m = 1 + \frac{12}{\epsilon} \Lambda + \dots\tag{9.3}$$

$$Z_\Lambda = 1 + \frac{36}{\epsilon} \Lambda + O(\Lambda^2)\tag{9.4}$$

donde

$$\Lambda = \frac{\lambda}{4!(4\pi)^2}\tag{9.5}$$

La observación fundamental es que la relación entre los parámetros desnudos y vestidos es tal que, si los primeros no dependen de la escala arbitraria  $\mu$ , entonces los segundos sí dependen de ella. Para la constante de acoplamiento encontramos

$$\mu \frac{d\lambda}{d\mu} = \beta[\lambda] = 2\lambda[-\epsilon + 36\Lambda + \dots]\tag{9.6}$$

que admite un punto fijo  $\Lambda_f = \epsilon/36$  cuando  $d < 4$ .

Para la masa, encontramos que

$$\mu \frac{d}{d\mu} (Z_m m^2) = 0\tag{9.7}$$

Por lo tanto

$$\mu \frac{d}{d\mu} m^2 = -\frac{\beta}{Z_m} \frac{dZ_m}{d\lambda} m^2 \approx 24\Lambda m^2\tag{9.8}$$

Cerca del punto fijo podemos reemplazar a  $\Lambda$  por  $\Lambda_f$ , y la dependencia de  $m^2$  con  $\mu$  se reduce a una ley de potencias

$$m^2[\mu] = m^2[\mu_1] \left( \frac{\mu}{\mu_1} \right)^{\alpha_m}\tag{9.9}$$

con  $\alpha_m \approx 2\epsilon/3$ . Un argumento similar nos permite escalar  $\phi$

$$\phi[\mu] = \phi[\mu_1] \left( \frac{\mu}{\mu_1} \right)^{\alpha_\phi} \quad (9.10)$$

$$\alpha_\phi = 48\Lambda^2 = \epsilon^2/27.$$

Podemos decir que una teoría cuántica de campos no es en realidad una única teoría sino una familia de teorías parametrizadas por la *escala de renormalización*  $\mu$ , cada una con una masa y constantes de acoplamiento dadas. Si al comparar dos teorías vemos que la masa y las constantes de acoplamiento dependen de  $\mu$  como lo indican las ecuaciones del grupo de renormalización,

$$\mu \frac{d\lambda}{d\mu} = \beta[\lambda] \quad (9.11)$$

y lo mismo para la normalización de los campos, entonces las dos teorías describen la misma física.

Supongamos que uno calcula un propagador, y obtiene su transformada de Fourier

$$G = G[p, m^2, \mu] \quad (9.12)$$

donde  $m^2$  representa los parámetros de la teoría, es decir, tanto las masas como la constante de acoplamiento. La invariancia frente a cambios en  $\mu$  se reduce a que  $G$  no cambia si cambiamos  $\mu$  pero también  $m^2$  y renormalizamos el campo por un factor  $Z_\phi$ , es decir

$$\mu \frac{dG}{d\mu} = 2\mu \frac{dZ_\phi}{d\mu} G + \mu \frac{dm^2}{d\mu} \frac{\partial G}{\partial m^2} + \mu \frac{\partial G}{\partial \mu} = 0 \quad (9.13)$$

Llamaremos

$$\begin{aligned} \mu \frac{dZ_\phi}{d\mu} &= \alpha_\phi \\ \mu \frac{dm^2}{d\mu} &= \alpha_m m^2 \end{aligned} \quad (9.14)$$

Por otro lado, recordemos que  $\phi(x)$  tiene unidades de  $M^{(d-2)/2}$ , por lo que el propagador, como función de  $x$ , tiene unidades de  $M^{(d-2)}$ , y su transformada de Fourier (que implica una integración sobre  $x$ ) tiene unidades de  $p^{-2}$  (para una teoría libre,  $G \propto (p^2 + m^2)^{-1}$ ). Eso quiere decir que si cambiamos unidades de tal manera que  $p \rightarrow \lambda p$  (si en vez de medir las masas en kilos las medimos en gramos,  $\lambda = 10^3$ ), entonces

$$G[\lambda p, \lambda^2 m^2, \lambda \mu] = \lambda^{-2} G[p, m^2, \mu] \quad (9.15)$$

Derivando respecto de  $\lambda$  y poniendo  $\lambda = 1$  encontramos la ecuación

$$2G + p \frac{\partial G}{\partial p} + 2m^2 \frac{\partial G}{\partial m^2} + \mu \frac{\partial G}{\partial \mu} = 0 \quad (9.16)$$

Si restamos la ecuación 9.13 de la 9.16 obtenemos

$$p \frac{\partial G}{\partial p} + (2 - \alpha_m) m^2 \frac{\partial G}{\partial m^2} = -2(1 - \alpha_\phi) G \quad (9.17)$$

Donde  $\mu$  ha desaparecido.

Este es una ecuación del tipo

$$\sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} = F\zeta \quad (9.18)$$

Para resolver este tipo de ecuaciones es necesario introducir un tiempo ficticio  $s$  y plantear el sistema dinámico

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{ds} &= f_j \\ \frac{d\zeta}{ds} &= F\zeta \end{aligned} \quad (9.19)$$

Entonces para resolver la ecuación es necesario despejar  $\zeta$  de la ecuación

$$H[\zeta, x_1, \dots, x_n] = 0 \quad (9.20)$$

donde  $H$  es una constante de movimiento del sistema dinámico 9.19. Efectivamente, si  $\zeta$  y las  $x_j$  viven en una superficie  $H = \text{constante}$  entonces

$$d\zeta \frac{\partial H}{\partial \zeta} + \sum_{j=1}^n dx_j \frac{\partial H}{\partial x_j} = 0 \quad (9.21)$$

como los  $dx_j$  son independientes, los podemos “encender” de a uno y obtener

$$\frac{d\zeta}{dx_j} = -\frac{\partial H / \partial x_j}{\partial H / \partial \zeta} \quad (9.22)$$

Al mismo tiempo, como  $H$  es constante de movimiento, debe ser

$$F \frac{\partial H}{\partial \zeta} + \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial H}{\partial x_j} = 0 \quad (9.23)$$

Dividiendo por  $\partial H / \partial \zeta$  obtenemos la ecuación original.

En nuestro caso tenemos  $x_1 = p$ ,  $x_2 = m^2$  y  $\zeta = G$ . La ecuación de movimiento

$$\frac{dp}{ds} = p \quad (9.24)$$

tiene solución

$$p = p_0 e^s \quad (9.25)$$

de manera que  $pe^{-s} = p_0$  es una constante de movimiento. Otras constantes son  $m^2 e^{-(2-\alpha_m)s}$  y  $G e^{2(1-\alpha_\phi)s}$ . La constante de movimiento más general es una función arbitraria de estas tres constantes elementales; despejando  $G$  obtenemos

$$G = e^{-2(1-\alpha_\phi)s} \mathcal{G} \left[ pe^{-s}, m^2 e^{-(2-\alpha_m)s} \right] \quad (9.26)$$

Asignando a  $s$  un valor cualquiera  $e^s = p/p_0$  encontramos

$$G = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-2(1-\alpha_\phi)} \mathcal{G} \left[ p_0, m^2 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-(2-\alpha_m)} \right] \quad (9.27)$$

Vemos que la dependencia funcional de  $G$  respecto de  $p$  queda completamente determinada, y que no es la dependencia que esperábamos por análisis dimensional, es decir la ecuación 9.16. En cambio, aparecen *dimensiones anómalas*, que están determinadas por las ecuaciones del grupo de renormalización, linealizadas alrededor de un punto fijo.

## 9.2. Aplicación: los exponentes críticos de la transición ferromagnética

Consideramos un material magnético. Las variables termodinámicas son la temperatura  $T$ , el campo externo  $H$  y la magnetización  $M$ . Las propiedades termodinámicas están descritas por la energía libre de Helmholtz

$$F = F[T, H] \quad (9.28)$$

tal que

$$\left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_H = -S; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial H} \right|_T = -M \quad (9.29)$$

o su transformada de Legendre, la energía libre de Gibbs  $G = G[T, M]$ , que satisface

$$\left. \frac{\partial G}{\partial T} \right|_M = -S; \quad \left. \frac{\partial G}{\partial M} \right|_T = H \quad (9.30)$$

Por encima de una cierta temperatura  $T_c$ ,  $M [T > T_c, H = 0] = 0$  pero por debajo de esta temperatura se manifiesta la *magnetización espontánea*  $M [T < T_c, H = 0] \neq 0$ . La experiencia indica que en un entorno de la temperatura crítica distintas propiedades del material se comportan como potencias del parámetro

$$t = \frac{T}{T_c} - 1 \quad (9.31)$$

En particular, el calor específico

$$C_M = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_M \propto |t|^{-\alpha} \quad (9.32)$$

La magnetización espontánea

$$M [T, H = 0] \propto |t|^\beta \quad (9.33)$$

(obviamente, sólo si  $T < T_c$ ), la susceptibilidad

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_T [H = 0] \propto |t|^{-\gamma} \quad (9.34)$$

y la ecuación de estado en la isoterma crítica

$$M [T = T_c, H] = H^{1/\delta} \quad (9.35)$$

Los *exponentes críticos*  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  están relacionados entre sí por la *desigualdad de Rushbrooke*

$$\alpha + 2\beta + \gamma \geq 2 \quad (9.36)$$

y por la *desigualdad de Griffiths*

$$\alpha + \beta(\delta + 1) \geq 2 \quad (9.37)$$

que están demostradas en el apéndice.

Los datos experimentales indican que estas desigualdades están prácticamente saturadas, y vamos a tomarlas como identidades.

### 9.2.1. La teoría de campo medio

La teoría más simple acerca de los exponentes críticos se basa en asumir que la energía libre de Gibbs tiene la forma

$$G/V = \frac{1}{2}atM^2 + \frac{1}{4!}cM^4 \quad (9.38)$$

con potencias superiores siendo despreciables, ya que  $M$  es muy chica en un entorno del punto crítico. Entonces

$$\left( at + \frac{1}{6}cM^2 \right) M = H \quad (9.39)$$

Si  $t > 0$ , debe ser  $M = 0$  cuando  $H = 0$  y la susceptibilidad es  $\chi = (at)^{-1}$ , y cuando  $t = 0$  tenemos  $M \propto H^{1/3}$ .

Si  $t < 0$  aparece una nueva solución

$$M = \left( \frac{6a|t|}{c} \right)^{1/2} \quad (9.40)$$

Ahora la energía libre

$$G/V = -\frac{3a^2t^2}{2c} \quad (9.41)$$

de modo que  $C_M \approx$  constante ( $C_M$  escala como la derivada segunda de  $G$ ; la derivada primera da la entropía, la derivada segunda es  $C_M/T$ , y como estamos cerca del punto crítico, el factor  $1/T$  se puede reemplazar por  $1/T_c$ ). En resumen, los exponentes críticos de campo medio son  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 1$  y  $\delta = 3$ , que son consistentes con 9.36 y 9.37.

### 9.2.2. Los exponentes críticos y la función de correlación

Existe una relación estrecha entre los exponentes críticos y la función de correlación

$$G(x, x') = \langle m(x) m(x') \rangle \quad (9.42)$$

donde  $m$  es la magnetización local, distinta de

$$M = \frac{1}{V} \int d^d x m(x) \quad (9.43)$$

La forma general de la función de correlación es

$$G[r] \approx r^{-(d-2+\eta)} g\left[\frac{r}{\xi}\right] \quad (9.44)$$

donde  $\xi$  es la *longitud de correlación*. Su transformada de Fourier

$$G[p] = p^{-2+\eta} \tilde{g}[\xi p] \quad (9.45)$$

En el punto crítico  $\xi \rightarrow \infty$  con una ley de potencias

$$\xi \approx |t|^{-\nu} \quad (9.46)$$

Por este hecho  $\xi$  es la única cantidad dimensional relevante en un entorno del punto crítico. Como 9.44 determina las dimensiones de  $M$ , entonces

$$M \approx \xi^{-(d-2+\eta)/2} \approx |t|^{\nu(d-2+\eta)/2} \quad (9.47)$$

por lo tanto

$$\beta = \frac{1}{2} \nu (d - 2 + \eta) \quad (9.48)$$

En mecánica estadística, la energía libre se deduce de la función de partición

$$e^{-F/k_B T} = \int Dm e^{-(f[m, T] - \int d^d x H m)/k_B T} \quad (9.49)$$

$f$  representa la energía libre de una configuración arbitraria de magnetización  $m(x)$ . En la región crítica podemos reemplazar los factores explícitos de  $T$  por  $T_c$  en 9.49. La magnetización media se obtiene asumiendo un campo  $H$  homogéneo e integrando a  $m$  sobre el volumen de la muestra, entonces

$$M = -\frac{\partial F}{\partial H} = e^{F/k_B T_c} \int Dm e^{-(f[m, T] - \int d^d x H m)/k_B T_c} m(0) \quad (9.50)$$

Asumamos que estamos por encima de la temperatura crítica, de modo que  $M = 0$ . Una segunda derivada da la susceptibilidad

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{1}{k_B T_c V} e^{F/k_B T_c} \int Dm e^{-(f[m, T] - \int d^d x H m)/k_B T_c} \int d^d x m(x) m(0) \quad (9.51)$$

De manera que, finalmente

$$\chi = \frac{1}{k_B T_c V} \int d^d x G(x, 0) \propto \xi^{2-\eta} \quad (9.52)$$

y el exponente correspondiente es

$$\gamma = \nu (2 - \eta) \quad (9.53)$$

Por las relaciones de escala 9.36 y 9.37 obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 - d\nu \\ \delta &= \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta} \end{aligned} \quad (9.54)$$

la segunda relación se puede deducir directamente observando que  $M$  tiene una *dimensión anómala*  $(masa)^{(d-2+\eta)/2}$ ; para que  $\int d^d x Hm$  sea adimensional,  $H$  tiene que tener unidades de  $(masa)^{(d+2-\eta)/2}$ , y el valor de  $\delta$  se deduce por análisis dimensional.

Una aproximación sencilla a la función de correlación se obtiene con el modelo de Landau-Ginzburg, que generaliza la energía libre del modelo de campo medio agregando un término que fuerza a que la configuración de equilibrio sea homogénea

$$f = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \partial_i m \partial_i m + \frac{1}{2} a t m^2 + \frac{1}{4!} c m^4 \right\} \quad (9.55)$$

Si además despreciamos el término no lineal, entonces

$$\begin{aligned} [-\Delta + at] G &= k_B T_c \delta(x) \\ G[p] &= \frac{k_B T_c}{p^2 + at} \end{aligned} \quad (9.56)$$

de manera que

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{at}} \quad (9.57)$$

Deducimos que  $\eta = 0$  y  $\nu = 1/2$ .

### 9.3. Los exponentes críticos y el grupo de renormalización

Los exponentes críticos de la teoría de campo medio y de la teoría de Landau-Ginzburg coinciden en 4 dimensiones, pero no en dimensiones menores. A la vista de nuestra discusión del grupo de renormalización, la razón es obvia: en cuatro dimensiones,  $c = 0$  es efectivamente el único punto fijo de la teoría. Pero en  $d < 4$  el punto crítico debe ser identificado con el punto fijo no trivial. Entonces, la forma de la función de correlación debe ser deducida de los argumentos de escala que vimos al principio de la clase, en vez de quedarse con la solución ingenua 9.56. Identificando  $m^2 = at$ , y asumiendo que el propagador toma la forma 9.27, encontramos que

$$\eta = 2\alpha_\phi \quad (9.58)$$

$$\xi \propto t^{-1/(2-\alpha_m)} \quad (9.59)$$

de manera que

$$\nu = \frac{1}{2 - \alpha_m} \quad (9.60)$$

Por supuesto no podemos esperar un ajuste cuantitativo a partir de nuestros resultados a primer orden en  $\epsilon$  (tampoco da tan mal), pero con métodos más potentes se alcanza una precisión significativa.

### 9.4. La aproximación de $N$ grande

En general, el modelo  $\lambda\phi^4$  por sí sólo no da una predicción satisfactoria para los exponentes críticos (ver ejemplos de valores experimentales representativos en el Peskin [16]), pero se pueden mejorar con un par de trucos. El primero es trabajar en  $4-\epsilon$  dimensiones y obtener los exponentes críticos en potencias de  $\epsilon$ . El segundo es adoptar la *aproximación de  $N$  grande*.

Esta aproximación consiste en asumir que no hay un único campo, sino  $N$  campos con una simetría  $SO(N)$  en el espacio interno; por ejemplo, los  $N$  campos podrían ser las  $N$  componentes de la magnetización en  $N$  dimensiones, o los  $N^2 - 1$  bosones intermediarios de una teoría de gauge con simetría  $SU(N)$ . Postulamos una acción euclídea de la forma

$$S = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^a \partial^\mu \Phi^a + \frac{1}{2} m^2 \Phi^a \Phi^a + \frac{\lambda}{8N} (\Phi^a \Phi^a)^2 \right\} \quad (9.61)$$

(nótese que el término no lineal está suprimido por un factor  $N^{-1}$ ), o reescalando  $\Phi^a = \sqrt{N}\phi^a$

$$S = N \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + \frac{1}{2} m^2 \phi^a \phi^a + \frac{\lambda}{8} (\phi^a \phi^a)^2 \right\} \quad (9.62)$$

Nótese que  $N$  juega un rol similar a  $1/\hbar$ , pero no sólo, porque  $N$  sigue siendo también el número de campos. Entonces, por ejemplo, si consideramos el tadpole

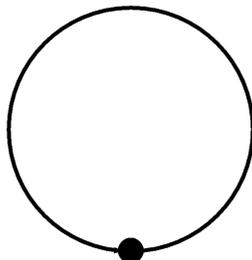


Figura 9.1: El tadpole.

El vértice introduce un factor de  $N$ , cada propagador escala como  $N^{-1}$ , pero además tenemos que sumar sobre los  $N$  campos que pueden circular por la línea interna. De modo que este diagrama escala como  $N$ , que es el mismo escaleo que la acción clásica, en vez de escalear como  $N^0$ , como diríamos si sólo miráramos al vértice y al propagador.

Peor todavía, la doble burbuja

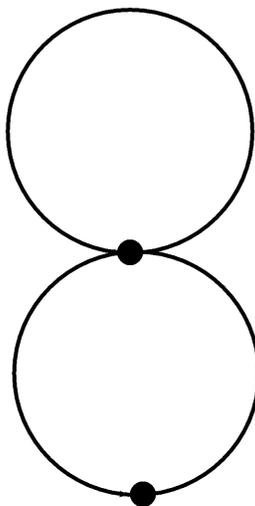


Figura 9.2: Doble burbuja.

tiene dos vértices ( $N^2$ ), tres propagadores  $N^{-3}$ , pero también hay  $N$  campos circulando por *cada* loop, que agregan un factor de  $N^2$ . De manera que este diagrama *también* escala como  $N$ . En realidad, a diferencia de lo que pasaba con la expansión en loops de la teoría  $\lambda\phi^4$ , tenemos una cantidad infinita de diagramas, todos contribuyendo al mismo nivel, como por ejemplo los *diagramas margarita* (daisy graphs)

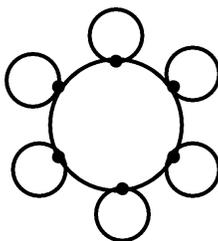


Figura 9.3: Margarita.

La margarita de  $k$  vértices tiene  $2k$  propagadores y  $k + 1$  loops, cada uno de los cuales agrega un factor  $N$  por la suma sobre campos, de modo que todos escalean como  $N$ .

Es obvio que para poder calcular algo que tenga sentido tenemos que poder sumar, por lo menos, los diagramas que escalean como la acción clásica. Para lograr este milagro, agregamos un campo auxiliar  $\chi$ , de manera que la acción queda

$$S = N \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + \frac{1}{2} m^2 \phi^a \phi^a + \frac{\lambda}{8} (\phi^a \phi^a)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{\chi}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} \phi^a \phi^a \right)^2 \right\} \quad (9.63)$$

o, desarrollando el cuadrado

$$S = N \int d^d x \left\{ -\frac{\chi^2}{8\lambda} + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + \frac{1}{2} m^2 \phi^a \phi^a + \frac{1}{4} \chi (\phi^a \phi^a) \right\} \quad (9.64)$$

El nuevo campo agrega dos nuevas reglas de Feynman, el propagador del campo  $\chi$  y un vértice cúbico, pero a cambio el vértice cuártico ha desaparecido. Por ejemplo miremos el diagrama

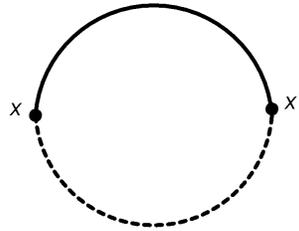


Figura 9.4: La línea superior en un propagador del campo  $\phi$ , la inferior es el propagador del campo  $\chi$ .

Este diagrama aparece en la acción efectiva multiplicando a  $\phi^a(x) \phi^a(x')$ , sin sumar sobre  $a$ . De manera que tenemos dos vértices y dos propagadores, pero un único campo circulando en el loop. El diagrama escalea como  $N^0$ , no como  $N$ .

Una situación similar se da con las correcciones al propagador del campo  $\chi$ , como por ejemplo

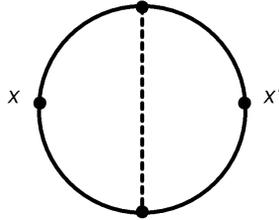


Figura 9.5: Las líneas enteras son propagadores del campo  $\phi$ , la de trazos es el propagador del campo  $\chi$ .

Tenemos 4 vértices y 5 propagadores, y aunque hay dos loops hay una única suma sobre  $a$ , de modo que este diagrama también escala como  $N^0$ .

En resumen, para calcular los términos que escalean como  $N$ , podemos no tener en cuenta el vértice cúbico. Efectivamente estamos tratando al campo  $\chi$  como una constante. Tomando el valor de expectación de la ecuación clásica

$$-\frac{\chi}{4\lambda} + \frac{1}{4} \phi^a \phi^a = 0 \quad (9.65)$$

Vemos que esa constante es el limite de coincidencia del propagador del campo  $\phi$

$$\chi = N\lambda G(x, x) = \text{constante} \quad (9.66)$$

Por otro lado  $\chi$  aparece como un término de masa para el campo  $\phi^a$ , de modo que

$$G(x, x) = \frac{1}{N} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + m^2 + \frac{1}{2}\chi} \quad (9.67)$$

Las ecuaciones 9.66 y 9.67 forman un sistema que hay que resolver consistentemente (además de regularizar y renormalizar el propagador con nuestro método favorito). El poder de la aproximación de  $N$  grande es que ya este primer término en el desarrollo en potencias inversas de  $N$  contiene términos de todo orden en potencias de  $\lambda$ . Por eso los exponentes críticos calculados en este esquema son una predicción mucho más potente que los calculados con una simple expansión en loops.

Hay más sobre esto en mi libro [13].

## 9.5. Acerca de la literatura

Casi todos los libros de la bibliografía tratan el tema, por ejemplo Peskin y Schroeder c. 12 y 13 [16]. Huang [17] da un tratamiento elemental. García-Colín [18] incluye las demostraciones de las desigualdades termodinámicas que reproducimos en el apéndice. Ma [19] es un clásico. Kleinert [20] es específico sobre la teoría  $\lambda\phi^4$ . Zinn-Justin [21] da un tratamiento exhaustivo. Ver también [22].

## 9.6. Apéndice: desigualdades termodinámicas

Recordemos la expresión de la primera ley para un sistema magnético

$$\Delta S = \frac{\Delta U}{T} - \frac{H\Delta M}{T} \quad (9.68)$$

Cualquier desviación del equilibrio debe decrecer la entropía, para que la entropía aumente al volver al equilibrio. Al orden más bajo obtenemos

$$\Delta U\Delta T + T\Delta H\Delta M - H\Delta T\Delta M \geq 0 \quad (9.69)$$

Ahora

$$\Delta U = C_M\Delta T + H\Delta M \quad (9.70)$$

de modo que

$$C_M\Delta T^2 + T\Delta H\Delta M \geq 0 \quad (9.71)$$

A su vez

$$\Delta M = \frac{\partial M}{\partial T}\Delta T + \chi\Delta H \quad (9.72)$$

Entonces

$$C_M \left( \Delta T - \frac{1}{2C_M} \frac{\partial M}{\partial T} \Delta H \right)^2 + \left( T\chi - \frac{1}{4C_M} \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)^2 \right) \Delta H^2 \geq 0 \quad (9.73)$$

Por lo tanto,  $C_M \geq 0$ , cosa que ya sabíamos, y

$$C_M\chi \geq \frac{1}{4} \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)^2 \quad (9.74)$$

O sea

$$|t|^{-\alpha-\gamma} \geq |t|^{-2(1-\beta)} \quad (9.75)$$

que requiere

$$\alpha + \gamma \geq 2(1 - \beta) \quad (9.76)$$

que es la desigualdad de Rushbrook.

Para demostrar la desigualdad de Griffiths, sea  $T_1 < T_c$  y  $M_1 = M(T_1)$  la magnetización correspondiente.

Entonces

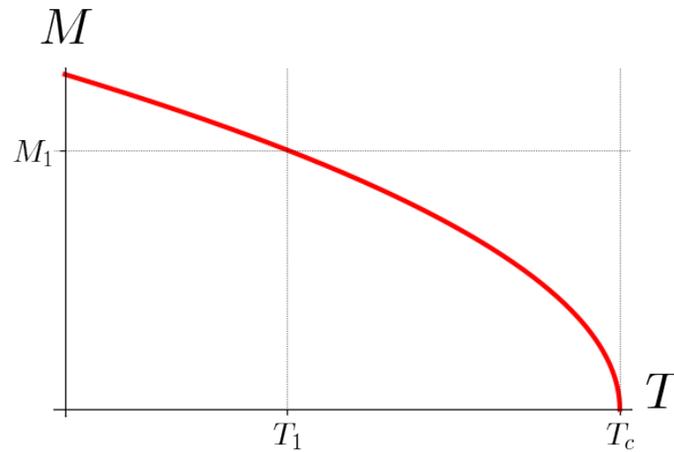


Figura 9.6: Una temperatura por debajo de la crítica y la magnetización correspondiente a la línea de coexistencia.

$$G[M_1, T_c] = G[0, T_c] + \int_0^{M_1} H dM \tag{9.77}$$

A  $T = T_c$   $H = M^\delta$ , y por lo tanto la integral escala como  $M_1^{\delta+1} \propto |t_1|^{\beta(\delta+1)}$ . Por otro lado

$$G[0, T_c] = G[0, T_1] - \int_{T_1}^{T_c} S dT \tag{9.78}$$

Pasamos la integral de lado y cambiamos variables a  $t = 1 - T/T_c$

$$G[0, T_1] = G[0, T_c] + \int_0^{|t_1|} S dt \tag{9.79}$$

Cerca del punto crítico la entropía escala como  $|t_1|^{1-\alpha}$  y por lo tanto la integral escala como  $|t_1|^{2-\alpha}$ .

Por la positividad de la entropía  $G[M_1, T_c] \leq G[M_1, T_1]$  y por la construcción de Maxwell  $G[M_1, T_1] = G[0, T_1]$ , de modo que algo que escala como  $|t_1|^{\beta(\delta+1)}$  debe ser subdominante respecto de algo que escala como  $|t_1|^{2-\alpha}$ , o sea

$$\beta(\delta + 1) \geq 2 - \alpha \tag{9.80}$$

*QED*

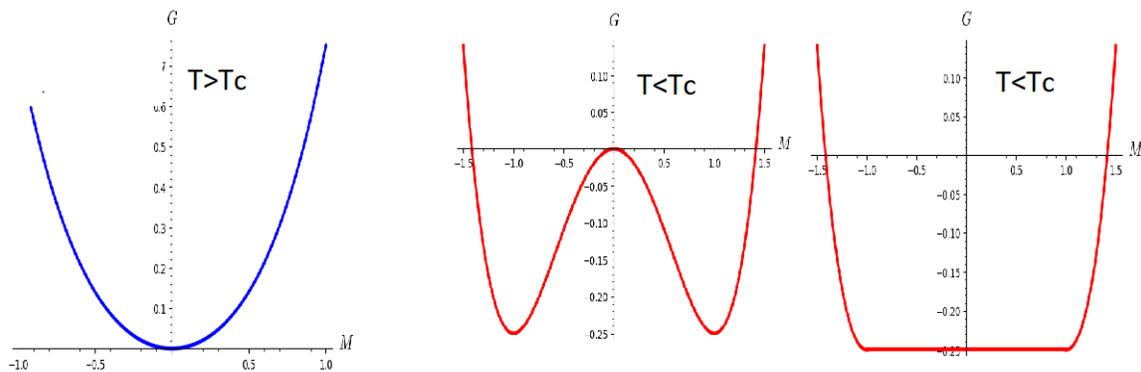


Figura 9.7: La construcción de Maxwell.

# Bibliografía

- [1] H. Bethe y R. Jackiw, *Intermediate Quantum Mechanics*, 3<sup>a</sup> edición, Benjamin-Cummings, 1986.
- [2] H. Bethe, G. Beck y W. Riezler On the Quantum Theory of the Temperature of Absolute Zero. *Die Naturwissenschaften* 19, 39 (1931) (reimpreso en H. Bethe, *Selected Works of Hans A. Bethe*, World Scientific (1997), p. 185).
- [3] E. Fradkin, *Quantum Field Theory*, Princeton University Press (2021).
- [4] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, McGraw-Hill (1996).
- [5] P. Milonni, *The quantum vacuum* (Academic Press, Boston (1994)).
- [6] R. Streater y A. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Princeton UP (1989).
- [7] Leonardo Sciascia, *La scomparsa di Majorana* (Einaudi, 1981).
- [8] Rabindra Nath Mohapatra y Palash B. Pal, *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics* (World Scientific, 2004).
- [9] M. El-Batanouny, *Advanced Quantum Condensed Matter Physics* (Cambridge UP, 2020).
- [10] I.S. Gradshteyn y I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 2007).
- [11] D. Kaiser, *Drawing theories apart* (U. of Chicago Press, 2005).
- [12] M. Helias y D. Dahmen, *Statistical Field Theory for Neural Networks* (Springer, 2020).
- [13] E. Calzetta y B-L Hu, *Nonequilibrium quantum field theory* (Cambridge UP, 2008).
- [14] W. Bietenholz y L. Prado, Revolutionary physics in reactionary Argentina, *Physics Today* 67, 2, 38 (2014).
- [15] P. Ramond, *Field Theory, a modern primer*, Addison-Wesley (1990).
- [16] M. Peskin y D. Schroeder, *Introduction to quantum field theory*, Perseus Books (1995).
- [17] K. Huang, *Statistical mechanics*, John Wiley (1987).
- [18] L. García-Colín Scherer, *Introducción a la termodinámica clásica*, Editorial Trillas (1970).
- [19] Shang-keng Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena*, westview Press (2000).
- [20] H. Kleinert y V-S Frohlinde, *Critical Properties of  $\phi^4$  Theories*, World Scientific (2001).
- [21] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, Oxford (2002).
- [22] E. Brezin, J. C. le Guillou y J. Zinn-Justin, Field theoretical approach to critical phenomena, en C. Domb y M. S. Green, editores, *Phase transitions and critical phenomena*, Vol. 6, Academic Press (1976).