Métodos numéricos

Pablo Dmitruk

2do cuatrimestre 2021 - DF/FCEN/UBA

Ecuación de advección lineal (y a coef. constante)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}$$

→ es de tipo *hiperbólico*

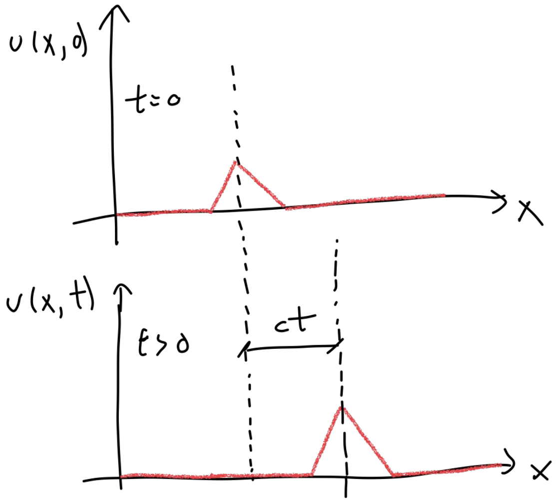
Ec. de ondas unidimensional de 1er orden que representa la advección de la cantidad $u(x,t)$ con velocidad constante c > 0 (podría ser c < 0 también o idem cambiando el signo)

$$\text{Si } u(x,t=0) = f(x) \;\Rightarrow\; u(x,t) = f(x-ct)$$

es la solución

Advección en general → polutante (o tinta) en el aire (fluido)

Con vel. no nec. uniforme ni constante
→ 3D
→ sale de ley de cons.

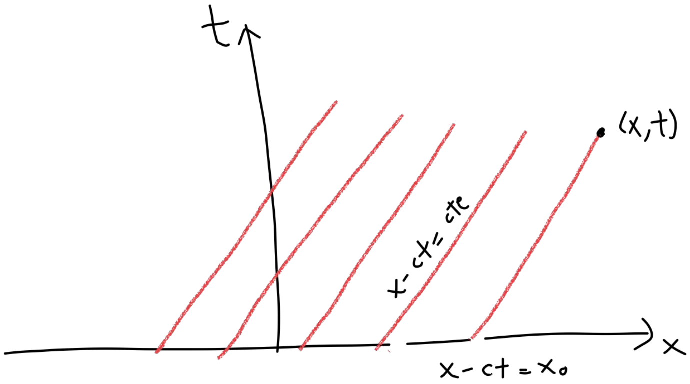


$$\xi = x - ct \;,\quad u(x,t) = f(\xi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial x} \;,\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial \xi}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}$$

La información se propaga a lo largo de las *curvas características* (rectas $x - ct$ en este caso)



$$u(x,t) = f(x_0)$$

Discretizamos la parte temporal y la espacial:

$$u_j^n = u(x_j, t^n) \Longrightarrow \begin{cases} x_j = j.\triangle x = j.h & j = 0, 1, \ldots, N \\ t^n = n.\triangle t = n.k & n = 0, 1, \ldots, M \end{cases}$$

Planteamos un esquema tipo Euler en t y atrasado en x:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\triangle t} = -c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\triangle x}$$

Si conocemos u_j^n a un nivel de tiempo n para todo j, podemos obtener u_j^{n+1} para todo j en el siguiente nivel n+1

Si c > 0 se llama el esquema “aguas arriba” (*upstream* o *upwind*)

Miremos si el esquema es *consistente*….

Si $U(x,t)$ es la sol. exacta de la ec. diferencial, reemplazemos en la ec. en diferencias con $U(x_j,t^n)$

y calculamos el error de truncamiento del esquema cómo:

$$E = \frac{U(x_j,t^{n+1}) - U(x_j,t^n)}{\triangle t} + c\frac{U(x_j,t^n) - U(x_{j-1},t^n)}{\triangle x}$$

Hacemos Taylor en los desplazamientos temporales y espaciales,

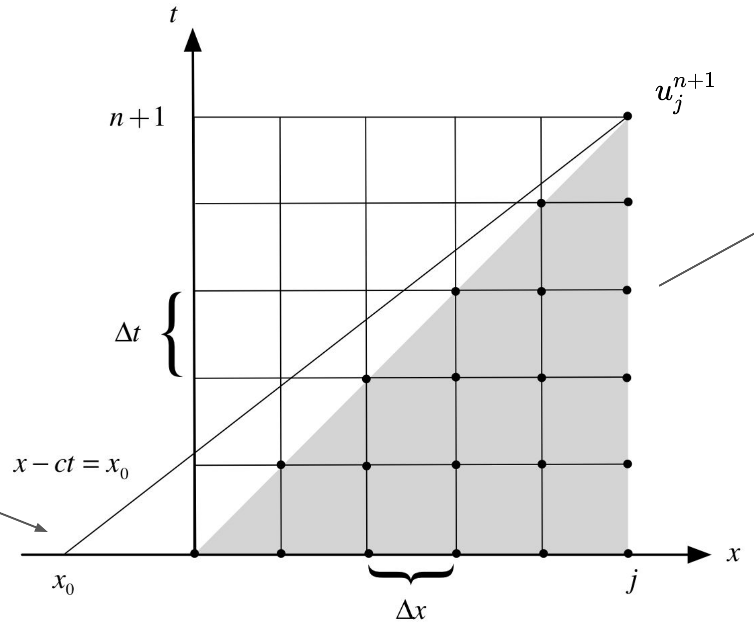
$$E = \frac{U(x_j,t^n) + \Delta t(\frac{\partial U}{\partial t})_j^n + \frac{\Delta t^2}{2}(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2})_j^n + \ldots - U(x_j,t^n)}{\Delta t} + c\frac{U(x_j,t^n) - U(x_j,t^n) + \Delta x(\frac{\partial U}{\partial x})_j^n - \frac{\Delta x^2}{2}(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2})_j^n + \ldots}{\Delta x}$$

luego de cancelar términos resulta:

$$E = \frac{\triangle t}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)_j^n - c\frac{\triangle x}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_j^n + O(\triangle t^2, \triangle x^2)$$

$E \to 0 \;\; \text{si} \;\; \Delta t \to 0\,,\; \Delta x \to 0$ El esquema es consistente

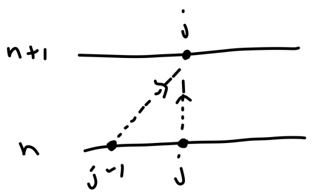
La consistencia no garantiza la convergencia….



solución exacta

dominio de dependencia
(del esq. numérico)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n)$$



Si achico los tamaños de grilla a la mitad (o en la misma proporción) no cambia la convergencia a la sol. exacta

para poder llegar con el DD hasta el punto x_0 tengo que hacer $\Delta x \geq c\Delta t$

se llama condición CFL

$$\Delta x/\Delta t \geq c \quad , \quad \Delta t \leq \Delta x/c \ , \ \ c\Delta t/\Delta x \leq 1$$

Analizemos la estabilidad, con el método de Von Neumann,

sol. exacta modo Fourier

$$u_j^n = \lambda^n e^{ikx_j}$$

$$u(x,t) = A(t)e^{ikx} \quad \rightarrow \quad A'(t) = -ikc\,A(t) \quad \rightarrow \quad A(t) = A_0 e^{-ikct}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

$$\lambda^{n+1} e^{ikx_j} = \lambda^n e^{ikx_j} - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\left[\lambda^n e^{ikx_j} - \lambda^n e^{ik(x_j - \Delta x)}\right]$$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n \left[1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(1 - e^{-ik\Delta x)}\right)\right]$$

$$\lambda = \left[1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(1 - e^{-ik\Delta x)}\right)\right]$$

$$\lambda = 1 - \mu\,[1 - \cos(k\Delta x) + i\sin(k\Delta x)] \qquad \mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

$$|\lambda|^2 = 1 + 2\mu(\mu - 1)\,[1 - \cos(k\Delta x)]$$

$$|\lambda| \leq 1 \iff 2\mu(\mu - 1) \leq 0 \iff \mu \leq 1$$

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$ CFL !

Vemos que la misma condición para que haya convergencia es la que nos garantiza la estabilidad

Esto es similar a lo que habíamos comentado de los esquemas temporales (teorema de Dahlquist → Trefethen)

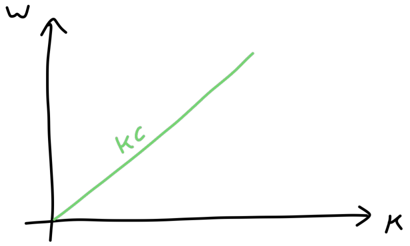
Es algo general, para ec. dif lineales: consistencia + estabilidad → convergencia

Teorema de Lax-Richtmyer (1956)

Dispersión y amortiguamiento en la solución numérica:

Si planteamos un modo Fourier para la solución exacta $u(x,t) = \hat{u}e^{i(wt-kx)}$

se satisface $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -c\dfrac{\partial u}{\partial x}$ si $w = kc \in \mathbb{R}$



En el esquema discreto $u_j^n = \hat{u}e^{i(wt^n - kx_j)}$

y en el upstream: $u_j^{n+1} = u_j^n - \mu(u_j^n - u_{j-1}^n)$ $\qquad \mu = \dfrac{c\Delta t}{\Delta x}$

$$\hat{u}e^{iwt^n} e^{iw\Delta t} e^{-ikx_j} = \hat{u}e^{iwt^n} e^{-ikx_j} - \mu\left[\hat{u}e^{iwt^n} e^{-ikx_j} - \hat{u}e^{iwt^n} e^{-ikx_j} e^{ik\Delta x}\right]$$

$$e^{iw\Delta t} = 1 - \mu\left[1 - e^{ik\Delta x}\right]$$

Escribimos: $w = \Omega + i\gamma \;\text{ con }\; \Omega, \gamma \in \mathbb{R}$

$$e^{iw\Delta t} = 1 - \mu\left[1 - e^{ik\Delta x}\right]$$

$$e^{i\Omega\Delta t} e^{-\gamma\Delta t} = 1 - \mu\left[1 - \cos(k\Delta x) - i\sin(k\Delta x)\right]$$

$$\cos(\Omega\Delta t)\, e^{-\gamma\Delta t} = 1 - \mu\left[1 - \cos(k\Delta x)\right]$$

$$\sin(\Omega\Delta t)\, e^{-\gamma\Delta t} = \mu\sin(k\Delta x)$$

$$\tan(\Omega\Delta t) = \frac{\mu\sin(k\Delta x)}{1 - \mu\left[1 - \cos(k\Delta x)\right]}$$

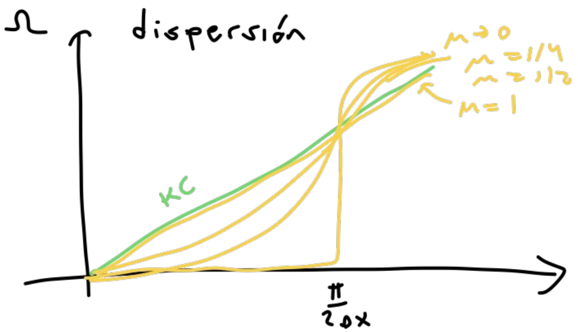
$$e^{-2\gamma\Delta t} = \{1 - \mu\left[1 - \cos(k\Delta x)\right]\}^2 + \mu^2\sin^2(k\Delta x)$$

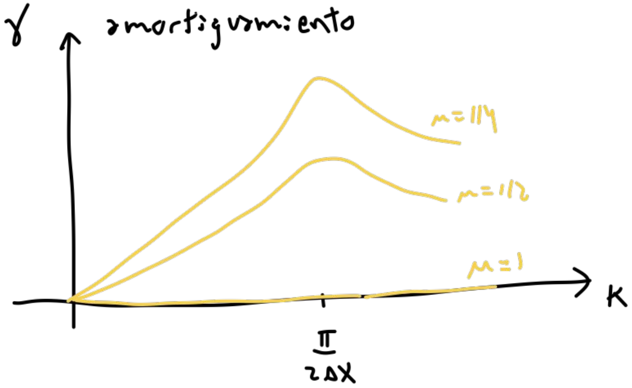
$$e^{-2\gamma\Delta t} = 1 + 2\mu(\mu - 1)\left[1 - \cos(k\Delta x)\right]$$

$\text{Si } \mu = c\Delta t/\Delta x = 1 \;\Rightarrow \gamma = 0\,,\; \Omega = kc$ da la solución exacta

$\text{Si } \mu > 1 \Rightarrow \gamma < 0$ da una inestabilidad

Si $\mu < 1 \Rightarrow \gamma > 0$ da estable, pero amortiguado y también presenta dispersión





Cómo $\Omega/k \neq c$ los modos se propagan con diferente velocidad (deberían propagarse todos con velocidad c)

Otros esquemas:

Euler en t, 2do orden en x, $$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\mu}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad , \quad \mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

Veamos la estabilidad: $\rightarrow \quad u_j^n = \lambda^n e^{ikx_j}$

$$\lambda^{n+1} e^{ikx_j} = \lambda^n e^{ikx_j} - \frac{\mu}{2}\left[\lambda^n e^{ikx_j} e^{ik\Delta x} - \lambda^n e^{ikx_j} e^{-ik\Delta x)}\right]$$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n \left[1 - i\mu \sin(k\Delta x)\right]$$

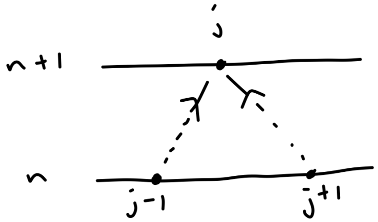
$$\lambda = \left[1 - i\mu \sin(k\Delta x)\right]$$

$|\lambda|^2 = 1 + \mu^2 \sin^2(k\Delta x) > 1$ $\rightarrow$ incondicionalmente inestable

Forma de estabilizarlo: Esquema de Lax $\rightarrow$ reemplaza u_j^n por $\frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\mu}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

$$u_j^{n+1} = \frac{(1-\mu)}{2} u_{j+1}^n + \frac{(1+\mu)}{2} u_{j-1}^n$$



Si hacemos el análisis de estabilidad con $u_j^n = \lambda^n e^{ikx_j}$ se llega a: $\lambda = \cos(k\Delta x) - i\mu \sin(k\Delta x)$

$$|\lambda|^2 = 1 - \sin^2(k\Delta x)\left[1-\mu^2\right]$$

$$|\lambda| \leq 1 \iff \mu \leq 1$$ $\rightarrow$ CFL de nuevo

Para mirar la dispersión y amortiguamiento podemos hacer el mismo análisis, con

$$u_j^n = \hat{u} e^{i(wt^n - kx_j)}$$

y comparar el w obtenido del esquema con el exacto $w = kc$

Llamando $w = \Omega + i\gamma \ \text{con} \ \Omega, \gamma \in \mathbb{R}$ se llega a:

$$\tan(\Omega \Delta t) = \mu \tan(k \Delta x)$$

$$e^{-2\gamma \Delta t} = \cos^2(k\Delta x) + \mu^2 \sin^2(k \Delta x)$$

da similar al caso anterior

en particular los modos con k chico dan menos amortiguamiento que los modos con k grande
(recordar k grande significa escalas pequeñas)

Algo interesante del esquema de Lax es que se puede escribir de una forma que “evidencia” la presencia de un término de amortiguamiento (tipo difusivo)

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta t} - c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\frac{1}{2}\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta t} - c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -c\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}c^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$\rightarrow$ término difusivo con $\nu = \dfrac{\Delta x^2}{2\Delta t} - \dfrac{\Delta t}{2}c^2$ Disipación numérica

(es cómo la ec. de Navier-Stokes en fluidos)

$$\nu > 0 \iff \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} > \frac{\Delta t}{2}c^2 \iff \frac{\Delta x}{\Delta t} > c$$

$\rightarrow$ CFL !

Métodos de 2do orden en t: leapfrog y Lax-Wendroff (iterativo)

Leapfrog: $$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{c\,2\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \qquad u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \mu\,(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

estabilidad: $$\lambda^{n+1} = \lambda^{n-1} - \mu\lambda^n\, 2i\, \sin(k\Delta x)$$

$$\lambda^2 = 1 - 2i\,\mu \sin(k\Delta x)\,\lambda$$

$$\lambda = i\mu\sin(k\Delta x) \pm \sqrt{1-\mu^2\sin^2(k\Delta x)}$$

$$|\lambda| = 1 \iff 1-\mu^2\sin^2(k\Delta x) \geq 0 \iff \mu \leq 1$$ $\rightarrow$ CFL !

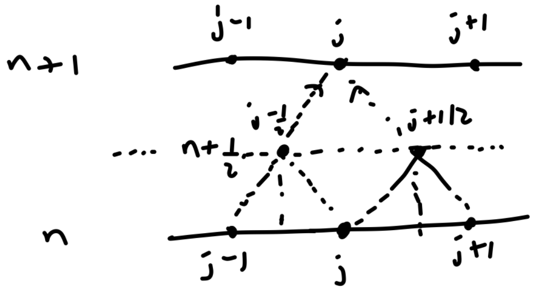
notemos que no da amortiguamiento

Pero sí hay dispersión, el análisis para $u_j^n = \hat{u}e^{i(wt^n - kx_j)}$ da $\sin(w\Delta t) = \mu\sin(k\Delta x) \;\rightarrow\; w \in \mathbb{R}$

Lax-Wendroff: es un esquema iterativo en 2 pasos

1er paso: $$u_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_j^n)$$

2do paso: $$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2})$$



Haciendo el análisis de estabilidad se obtiene un factor de amplificación

$$\lambda = 1 - i\mu\sin(k\Delta x) + \mu^2[\cos(k\Delta x) - 1]$$

$$|\lambda|^2 = 1 - \mu^2(1-\mu^2)[1-\cos(k\Delta x)]^2$$

Resulta nuevamente $|\lambda| \leq 1 \iff \mu \leq 1$

pero da menor amortiguamiento que Lax (si $k\Delta x \ll 1$)