

Métodos numéricos

Pablo Dmitruk

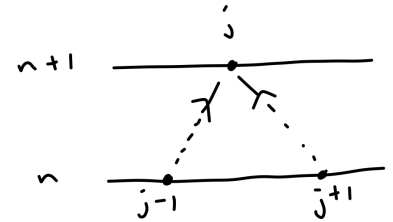
2do cuatrimestre 2021 - DF/FCEN/UBA

Vimos el [esquema de Lax \(o Lax-Friedrichs\)](#)

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\mu}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

$$u_j^{n+1} = \frac{(1-\mu)}{2}u_{j+1}^n + \frac{(1+\mu)}{2}u_{j-1}^n$$

$$\mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$



Sup. ponemos los puntos de grilla espacial como un arreglo, $(u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ matriz de evolución A

$$u_N = u_0 \quad (\text{cc. periódicas})$$

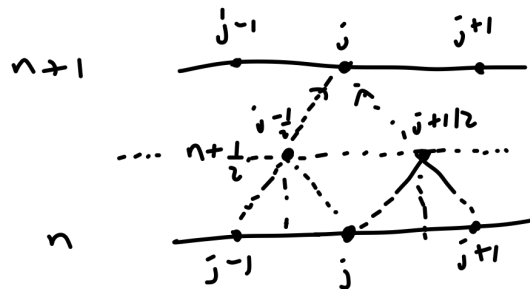
$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-1} \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & (1-\mu)/2 & 0 & \cdot & \cdot & (1+\mu)/2 \\ (1+\mu)/2 & 0 & (1-\mu)/2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & (1+\mu)/2 & 0 & (1-\mu)/2 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & (1+\mu)/2 & 0 & (1-\mu)/2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & (1+\mu)/2 & 0 & (1-\mu)/2 \\ (1-\mu)/2 & 0 & \cdot & \cdot & (1+\mu)/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-1} \end{pmatrix}^n$$

Vimos también el **esquema Lax-Wendroff**:

$$\text{1er paso: } u_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{\mu}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n)$$

$$\text{2do paso: } u_j^{n+1} = u_j^n - \mu(u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2})$$

$$u_j^{n+1} = (1 - \mu^2) u_j^n - \frac{\mu(1 - \mu)}{2} u_{j+1}^n + \frac{\mu(1 + \mu)}{2} u_{j-1}^n$$

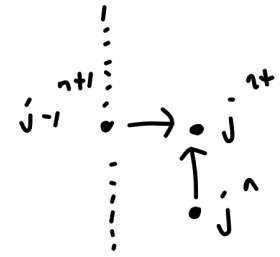


Notar que el esquema pesa más o menos el término “upwind” según el signo de c

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-1} \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 - \mu^2 & -\mu(1 - \mu)/2 & 0 & \cdot & \cdot & \mu(1 + \mu)/2 \\ \mu(1 + \mu)/2 & 1 - \mu^2 & -\mu(1 - \mu)/2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \mu(1 + \mu)/2 & 1 - \mu^2 & -\mu(1 - \mu)/2 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & \mu(1 + \mu)/2 & 1 - \mu^2 & -\mu(1 - \mu)/2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu(1 + \mu)/2 & 1 - \mu^2 & -\mu(1 - \mu)/2 \\ -\mu(1 - \mu)/2 & 0 & \cdot & \cdot & \mu(1 + \mu)/2 & 1 - \mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-1} \end{pmatrix}^n$$

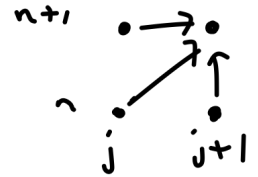
Métodos "implícitos" :

upwind implícito:
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$$



→ necesito la cond. de contorno $u(0,t)$ para ir obteniendo la solución

Wendroff implícito:
$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) + \frac{c}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) = 0$$

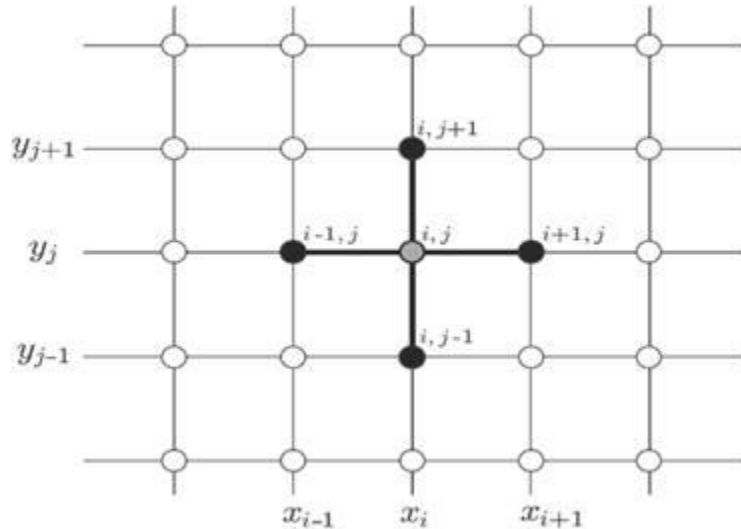


(mejora el orden de precisión)

Ecuación de advección lineal en 2D

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_x \frac{\partial u}{\partial x} + c_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\text{Lax} \rightarrow u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n) - \frac{c_x \Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n) - \frac{c_y \Delta t}{2\Delta y}(u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n)$$



Estabilidad $\rightarrow u_{ij}^n = \lambda^n e^{i(k_x x_i + k_y y_j)}$

Reemplazando y cancelando términos resulta,

$$\lambda = \frac{1}{2} \cos(k_x \Delta x) + \frac{1}{2} \cos(k_y \Delta y) - i \frac{c_x \Delta t}{\Delta x} \sin(k_x \Delta x) - i \frac{c_y \Delta t}{\Delta y} \sin(k_y \Delta y)$$

$$|\lambda|^2 = \left[\frac{1}{2} \cos(k_x \Delta x) + \frac{1}{2} \cos(k_y \Delta y) \right]^2 + \left[\frac{c_x \Delta t}{\Delta x} \sin(k_x \Delta x) + \frac{c_y \Delta t}{\Delta y} \sin(k_y \Delta y) \right]^2$$

$$|\lambda|^2 = 1 - [\sin^2(k_x \Delta x) + \sin^2(k_y \Delta y)] \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{c_x \Delta t}{\Delta x} \right)^2 - \left(\frac{c_y \Delta t}{\Delta y} \right)^2 \right] - \frac{1}{4} [\cos(k_x \Delta x) - \cos(k_y \Delta y)]^2 - \left[\frac{c_y \Delta t}{\Delta y} \sin(k_x \Delta x) - \frac{c_x \Delta t}{\Delta x} \sin(k_y \Delta y) \right]^2$$

$$|\lambda| \leq 1 \iff \frac{1}{2} \geq \left(\frac{c_x \Delta t}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{c_y \Delta t}{\Delta y} \right)^2$$

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_x}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{c_y}{\Delta y} \right)^2 \right]^{-1}}$$

$$\text{Si } \Delta x = \Delta y \rightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2(c_x^2 + c_y^2)}} = \frac{\Delta x}{|c|\sqrt{2}}$$

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

es un poco más restrictivo que en 1D

Ecuación de advección no-lineal

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{Este tipo de situación aparece en las ecuaciones de fluidos (Navier-Stokes)}$$

→ en 1D se llama ecuación de Burgers (sin disipación)

Conserva **momento** y **energía**

supongamos un dominio espacial $[0, L]$ y cc periódicas → $u(0)=u(L)$

momento:
$$P = \int_0^L u \, dx$$

energía:
$$E = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 \, dx$$

De la ec. diferencial,
$$\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L u dx = - \int_0^L u \frac{\partial u}{\partial x} dx = - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) dx = -\frac{1}{2} [u^2(L) - u^2(0)] = 0$$

$$\rightarrow P = \int_0^L u dx = cte$$

Idem, multiplicando la ec. dif por u,
$$\int_0^L \left(u \frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = 0 \Rightarrow \int_0^L \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial u^3}{\partial x} \right) dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \frac{u^2}{2} dx = - \int_0^L \frac{1}{3} \frac{\partial u^3}{\partial x} dx = -\frac{1}{3} [u^3(L) - u^3(0)] = 0$$

$$\rightarrow E = \int_0^L \frac{u^2}{2} dx = cte$$

Consideremos un esquema de dif. finitas para la parte espacial (decimos que aplicamos un esquema semi-discreto, porque falta discretizar la parte temporal)

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -u_j \frac{(u_{j+1} - u_{j-1}))}{2\Delta x}$$

Llamamos energía a:
$$E = \frac{1}{2} \sum_j u_j^2 \Delta x$$

Si multiplicamos la ecuación semi-discreta por u_j y sumamos sobre j ,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sum_j (u_j^2 u_{j+1} - u_j^2 u_{j-1}) \Delta x \neq 0 \quad \rightarrow \text{el esquema no conserva } E$$

Podemos verlo en un caso sencillo con 4 puntos de grilla, sup. $u_1 = 0$, $u_2 > 0$, $u_3 < 0$, $u_4 = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0 \text{ , } \frac{\partial u_2}{\partial t} > 0 \text{ , } \frac{\partial u_3}{\partial t} < 0 \text{ , } \frac{\partial u_4}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \text{se inestabiliza}$$

pronóstico numérico

Esquema de Arakawa (1966, 1972) → corrige la conservación de energía

(en verdad es una adaptación a 1D de un método que propuso Arakawa para ecuaciones de fluidos en 3D)

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{1}{3}(u_{j-1} + u_j + u_{j+1}) \frac{(u_{j+1} - u_{j-1})}{2\Delta x}$$

Veamos la conservación de energía,

$$\text{mult. por } u_j \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial u_j^2}{\partial t} = -\frac{1}{3} u_j (u_{j-1} + u_j + u_{j+1}) \frac{(u_{j+1} - u_{j-1})}{2\Delta x}$$

$$u_j u_{j-1} u_{j+1} \quad A$$

$$-u_j u_{j-1} u_{j-1} \quad B$$

$$u_j u_j u_{j+1} \quad C$$

$$-u_j u_j u_{j-1} \quad D$$

$$u_j u_{j+1} u_{j+1} \quad E$$

$$-u_j u_{j+1} u_{j-1} \quad F$$

Se cancelan términos directamente (como A y F) y otros al sumar sobre j

$$\rightarrow E = \frac{1}{2} \sum_j u_j^2 \Delta x = cte$$

La **no-linealidad** trae consigo un problema para los métodos discretos (en espacio) → **ALIASING**

$$\text{sup. } u = \sin(k x) \Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} = k \sin(k x) \cos(k x) = \frac{1}{2} k \sin(2k x)$$

Como
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x}$$

→ el término no-lineal hace crecer el modo $2k$ que inicialmente no existía

más general, si tengo dos modos $k_1, k_2 \rightarrow u = \sin(k_1 x) + \sin(k_2 x)$

el término no-lineal $u \frac{\partial u}{\partial x}$ me va a hacer aparecer productos de modos que

(usando trigonometría) implican aparición de modos con $k_1 + k_2$ y $k_1 - k_2$

→ esto trae un problema si estoy usando una grilla con resolución finita

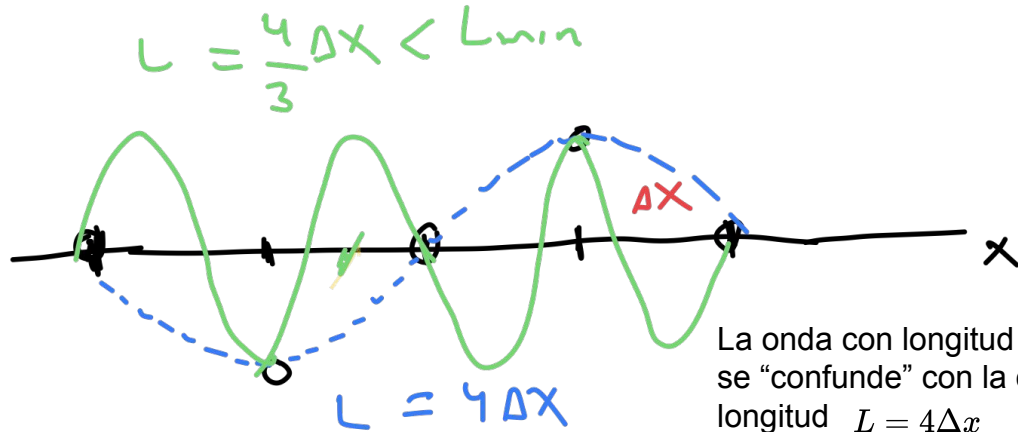
La longitud de onda mínima que puede resolver mi grilla es $L_{min} = 2\Delta x$

que implica un número de onda máximo $k_{max} = \frac{2\pi}{2\Delta x} = \frac{\pi}{\Delta x}$

Al haber un máximo número de onda que puedo resolver, esto significa

que si arranco con una onda cuyo $\frac{k_{max}}{2} < k \leq k_{max}$

entonces al generarse (por la no-linealidad) una onda con $2k > k_{max}$ no la voy a poder “resolver”



La onda con longitud $L = 4\Delta x/3 < L_{min} = 2\Delta x$ se “confunde” con la onda con longitud $L = 4\Delta x$

En cuentas,

$$\sin(k j \Delta x) = \sin\{[2k_{max} - (2k_{max} - k)] j \Delta x\} = \sin\{2\pi j - (2k_{max} - k) j \Delta x\} = -\sin[(2k_{max} - k) j \Delta x]$$

y no podemos distinguir el modo k del modo $2k_{max} - k$ en los puntos de grilla $j \Delta x$

es decir que si un modo tiene $k > k_{max}$ se ve cómo un modo $k^* = 2k_{max} - k$ en la grilla

