

Métodos numéricos

Pablo Dmitruk, Mauro Fontana, Facundo Pugliese

2do cuatrimestre 2021 - DF/FCEN/UBA

Descripción física: dos visiones

1) **partículas (discreta)** → evolución temporal: **ecs. diferenciales ordinarias** (EDO = ODE)

F1, Mec. Clas. → *Cálculo numérico*

Newton: $x = x(t)$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $m\ddot{x} = F(x, t)$ → ODE 2do orden

Lagrange: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ → ODEs 2do orden (acopladas) → Hamilton: 1er orden

Cuántica: form. de Heisenberg

2) medio continuo : ej fluidos (atmósfera, océanos), ondas (campos)

ecs. en derivadas parciales (EDP = PDE)

F2, F3, FT1, FT2, E1 → *Métodos numéricos*

CLASIF. PDEs



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \rightarrow \text{ec. del calor (difusión) para } T(x, t) \quad \rightarrow \text{PARABÓLICAS}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \rightarrow \text{ec de onda para } \varphi(x, t) \quad \rightarrow \text{HIPERBÓLICAS}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \text{ec. de Poisson para } V(x, y, z) \quad \rightarrow \text{ELÍPTICAS}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad \rightarrow \text{ec Navier-Stokes para } \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right] \varphi(\mathbf{r}, t) \quad \rightarrow \text{ec Schrodinger para } \varphi(\mathbf{r}, t)$$

otra: [Black-Scholes](#) en finanzas

Clasificación de PDEs *cuasi-lineales*

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = F\left(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

Si $B^2 - 4AC > 0$ hiperbolica \rightarrow ec ondas (con $y \rightarrow t$)

Si $B^2 - 4AC = 0$ parabolica \rightarrow ec. calor (con $y \rightarrow t$)

Si $B^2 - 4AC < 0$ eliptica \rightarrow ec. Poisson 2D

Nuestro foco: técnicas para la **solución numérica** de PDEs → **algoritmos**

“El análisis numérico es el estudio de algoritmos para los problemas de la matemática del continuo “

Lloyd Trefethen, [*The definition of numerical analysis*](#), 1992.

El desarrollo de las computadoras lo hizo posible !

Un poco de historia...

Si bien técnicas numéricas existieron desde siglos (algunos nombres: Newton, Euler, Lagrange, Gauss, Jacobi, Fourier, Chebyshev) no fue hasta principios del siglo XX que comenzó lo que hoy llamamos el *análisis numérico*

1910 → [Lewis Fry Richardson](#)

1928 → [Courant, Friedrichs & Lewy](#)

[307]

IX. *The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam.*

By L. F. RICHARDSON, *King's College, Cambridge.*

Communicated by Dr. R. T. GLAZEBROOK, *F.R.S.*

Received (in revised form) November 2, 1909,—Read January 13, 1910.

§ 1. INTRODUCTION.—§ 1.0. The object of this paper is to develop methods whereby the differential equations of physics may be applied more freely than hitherto in the approximate form of difference equations to problems concerning irregular bodies.

Though very different in method, it is in purpose a continuation of a former paper by the author, on a "Freehand Graphic Way of Determining Stream Lines and

Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik.

Von

R. Courant, K. Friedrichs und H. Lewy in Göttingen,

Ersetzt man bei den klassischen linearen Differentialgleichungsproblemen der mathematischen Physik die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten in einem — etwa rechtwinklig angenommenen — Gitter, so gelangt man zu algebraischen Problemen von sehr durchsichtiger Struktur. Die vorliegende Arbeit untersucht nach einer elementaren Diskussion dieser algebraischen Probleme vor allem die Frage, wie sich die Lösungen verhalten, wenn man die Maschen des Gitters gegen Null streben läßt. Dabei beschränken wir uns vielfach auf die einfachsten, aber typischen Fälle, die wir derart behandeln, daß die Anwendbarkeit der Methoden auf allgemeinere Differenzgleichungen und solche mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen deutlich wird.

Entsprechend den für Differentialgleichungen geläufigen Fragestellungen

Richardson fue un pionero del pronóstico numérico

(mencionemos también a un precursor como R. Fitz Roy)

idea de una supercomputadora humana

En 1922 !!!!!



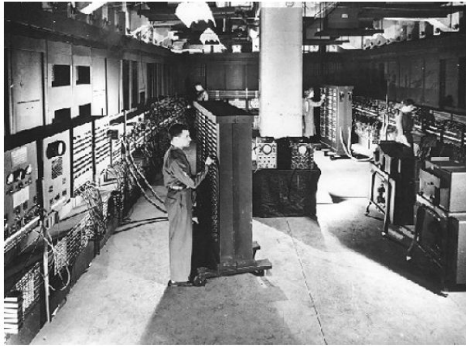
también desarrolló una ecuación diferencial para predecir las guerras !

Recomendación: ver Conexiones en Netflix, capítulo 5: nubes

Hacia 1940-1950 → [John Von Neumann](#)

Stan Ulam, Richard Feynman and John von Neumann
(Bandelier, near Los Alamos, NM, late 1940s)

The first large-scale electronic computer: ENIAC (1945)

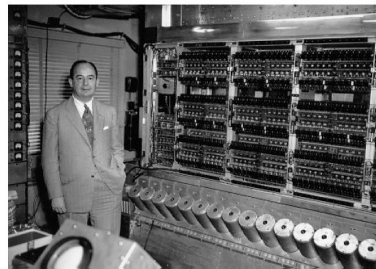


ENIAC = Electronic Numerical Integrator and Computer



en el proyecto Manhattan

von Neumann' IAS Computer (Princeton, 1952)



A clone of this machine was installed at Los Alamos
(MANIAC = Mathematical Analyzer, Numerical Integrator and Computer)

con Charney y Fjortoft → 1er
pronóstico a 24hs

SVENSKA GEOFYSSKA FÖRENINGEN

VOLUME 2, NUMBER 4 **Tellus** NOVEMBER 1950
A QUARTERLY JOURNAL OF GEOPHYSICS

Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation

By J. G. CHARNEY, R. HJÖRTOFT¹, J. VON NEUMANN
The Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey²

(Manuscript received 1 November 1950)

Abstract

A method is given for the numerical solution of the barotropic vorticity equation over a limited area of the earth's surface. The lack of a natural boundary calls for an investigation of the appropriate boundary conditions. These are determined by a heuristic argument and are shown to be sufficient in a special case. Approximate conditions necessary to insure the mathematical stability of the difference equation are derived. The results of a series of four 24-hour forecasts computed from actual data at the 500 mb level are presented, together with an interpretation and analysis. An attempt is made to determine the causes of the forecast errors. These are ascribed partly to the use of too large a space increment and partly to the effects of baroclinicity. The rôle of the latter is investigated in some detail by means of a simple baroclinic model.

Una supercomputadora hoy en día...

del [Natl. Weather Service](#)



[Cluster local en el Serv. Meteorológico Nacional](#)

[Charla Celeste Saulo](#)

simulación flujo en un canal ([channel flow](#))

