CAMPOS LEJANOS A LA CONFIGURACIÓN DE CARGA

EL DESARROLLO MULTIPOLAR DE LOS CAMPOS ELECTRO Y MAGNETOSTÁTICO

¿POR QUÉ CAMPO LEJANO?

Definamos qué significa *lejos*. Si una dada distribución de carga tiene un tamaño característico d, entonces los puntos $r \gg d$ están **lejos de la distribución**. Esto significa que $\frac{d}{r}$ es una variable pequeña.

¿POR QUÉ CAMPO LEJANO?

Definamos qué significa *lejos*. Si una dada distribución de carga tiene un tamaño característico d, entonces los puntos $r \gg d$ están **lejos de la distribución**. Esto significa que $\frac{d}{r}$ es una variable pequeña.

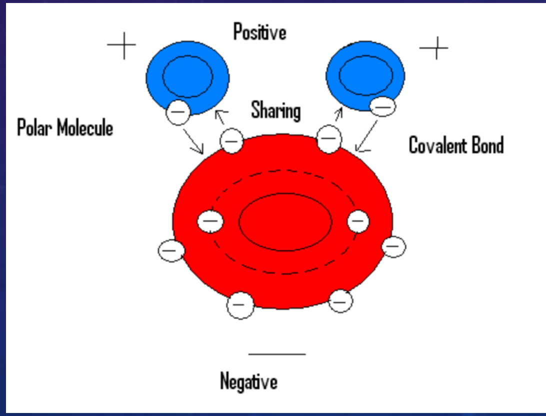
¿Por qué no hacer el cálculo exacto? En física se trabaja con modelos y aproximaciones. Nuestros instrumentos de medición tienen precisión finita y error. Si el error del cálculo que hacemos (resto de Taylor) es menor que el error de nuestro instrumento, casi nunca nos interesa tenerlo en cuenta.

¿POR QUÉ CAMPO LEJANO?

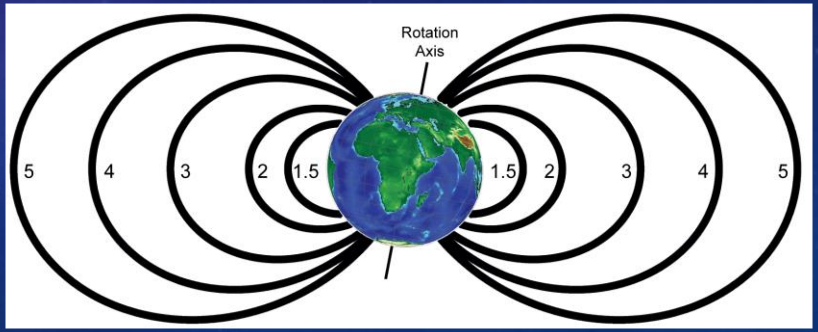
Definamos qué significa *lejos*. Si una dada distribución de carga tiene un tamaño característico d, entonces los puntos $r \gg d$ están **lejos de la distribución**. Esto significa que $\frac{d}{r}$ es una variable pequeña.

¿Por qué no hacer el cálculo exacto? En física se trabaja con modelos y aproximaciones. Nuestros instrumentos de medición tienen precisión finita y error. Si el error del cálculo que hacemos (resto de Taylor) es menor que el error de nuestro instrumento, casi nunca nos interesa tenerlo en cuenta.

Ejemplo de momento dipolar eléctrico (molécula de agua)



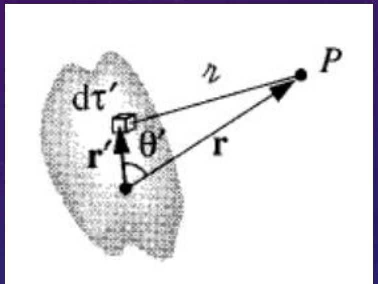
Ejemplo de momento dipolar magnético (planeta tierra)



EL DESARROLLO MULTIPOLAR ELÉCTRICO

La expresión exacta del potencial de la distribución es

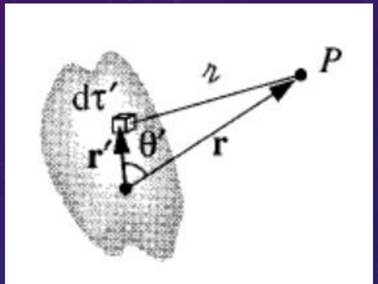
$$V(\boldsymbol{r}) = k_e \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\tau'$$



EL DESARROLLO MULTIPOLAR ELÉCTRICO

La expresión exacta del potencial de la distribución es

$$V(\boldsymbol{r}) = k_e \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\tau'$$

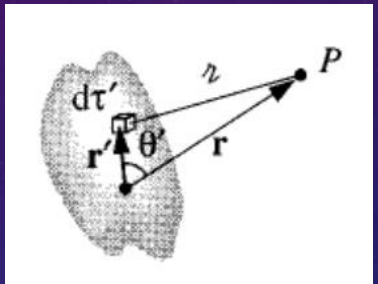


Lo único que hay que desarrollar es $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}$. Escribamos los primeros dos términos.

EL DESARROLLO MULTIPOLAR ELÉCTRICO

La expresión exacta del potencial de la distribución es

$$V(\boldsymbol{r}) = k_e \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\tau'$$



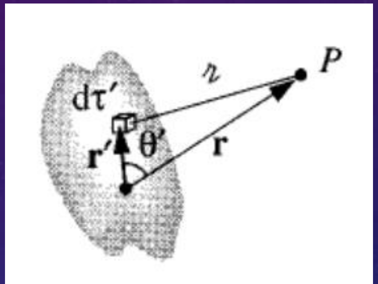
Lo único que hay que desarrollar es $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}$. Escribamos los primeros dos términos.

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1} = r^{-1}\left(1 + \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r} \cdot \boldsymbol{r}' + \cdots\right)$$

EL DESARROLLO MULTIPOLAR ELÉCTRICO

La expresión exacta del potencial de la distribución es

$$V(\boldsymbol{r}) = k_e \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} d\tau'$$



Lo único que hay que desarrollar es $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{-1}$. Escribamos los primeros dos términos.

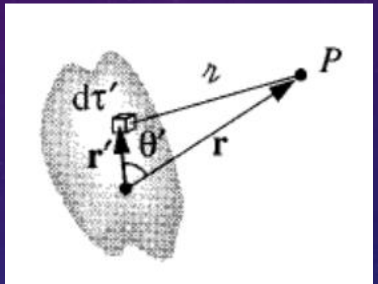
$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{-1} = r^{-1}\left(1 + \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r}\cdot \boldsymbol{r}' + \cdots\right)$$

Introduciendo este desarrollo en el potencial de arriba obtenemos

EL DESARROLLO MULTIPOLAR ELÉCTRICO

La expresión exacta del potencial de la distribución es

$$V(\boldsymbol{r}) = k_e \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\tau'$$



Lo único que hay que desarrollar es $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}$. Escribamos los primeros dos términos.

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1} = r^{-1}\left(1 + \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r} \cdot \boldsymbol{r}' + \cdots\right)$$

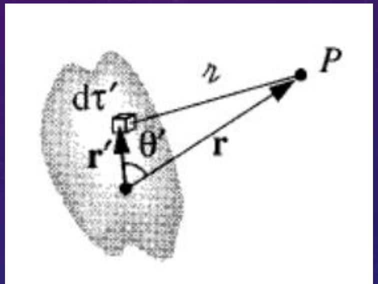
Introduciendo este desarrollo en el potencial de arriba obtenemos

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{k_e Q}{r} + \frac{k_e \boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} + \cdots$$

EL DESARROLLO MULTIPOLAR ELÉCTRICO

La expresión exacta del potencial de la distribución es

$$V(\boldsymbol{r}) = k_e \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\tau'$$



Lo único que hay que desarrollar es $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}$. Escribamos los primeros dos términos.

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1} = r^{-1}\left(1 + \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r} \cdot \boldsymbol{r}' + \cdots\right)$$

Introduciendo este desarrollo en el potencial de arriba obtenemos

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{k_e \boxed{Q}}{r} + \frac{k_e \boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} + \cdots$$

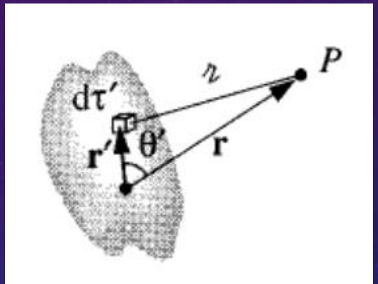
Momento monopolar (carga total)

$$Q = \int \rho(\boldsymbol{r}') d\tau'$$

EL DESARROLLO MULTIPOLAR ELÉCTRICO

La expresión exacta del potencial de la distribución es

$$V(\boldsymbol{r}) = k_e \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dV'$$



Lo único que hay que desarrollar es $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}$. Escribamos los primeros dos términos.

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1} = r^{-1}\left(1 + \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r} \cdot \boldsymbol{r}' + \cdots\right)$$

Introduciendo este desarrollo en el potencial de arriba obtenemos

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{k_e \boxed{Q}}{r} + \frac{k_e \boxed{\boldsymbol{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} + \cdots$$

Momento monopolar (carga total)

$$Q = \int \rho(\boldsymbol{r}')d\tau'$$

Momento dipolar

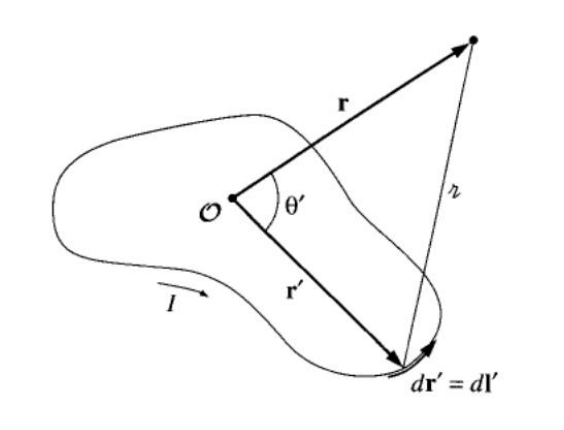
$$\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}')dV'$$

Podemos pensarlo como un gradiente neto de carga.

EL DESARROLLO MULTIPOLAR MAGNÉTICO

El caso magnético es completamente análogo.

$$V(\boldsymbol{r}) = k_e \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} d\tau' \longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = k_m I \oint \frac{d\boldsymbol{l}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$



De nuevo, sólo hay que desarrollar $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{-1}$. Pero ya lo hicimos antes. Escribimos el desarrollo multipolar de $\boldsymbol{A}$.

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{k_e Q}{r} + \frac{k_e \boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} + \cdots \longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boxed{0} + \frac{k_m \boxed{\boldsymbol{m}} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} + \cdots$$

No hay momento monopolar magnético

Momento dipolar magnético

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\oint \boldsymbol{r}' \times I d\boldsymbol{l}' \equiv I\boldsymbol{a}$$

LOS CAMPOS

De los desarrollos potenciales que escribimos recién podemos derivar las expresiones de los campos eléctrico y magnético, en desarrollo multipolar.

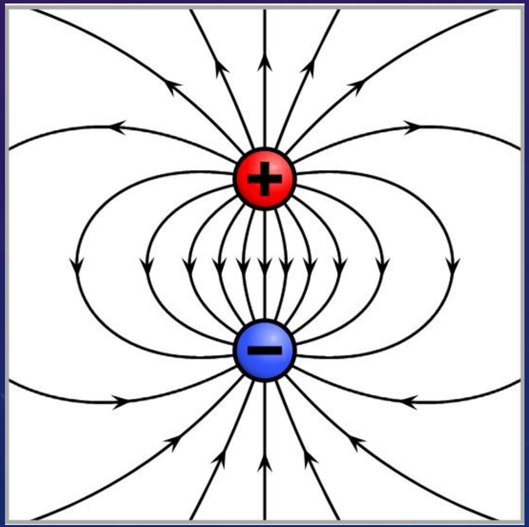
Para eso usamos,

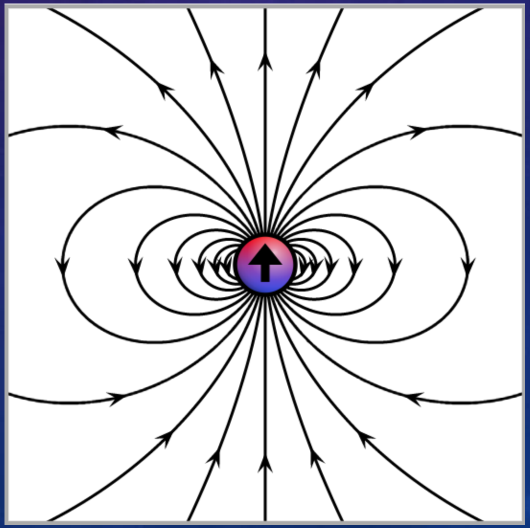
Electrostática

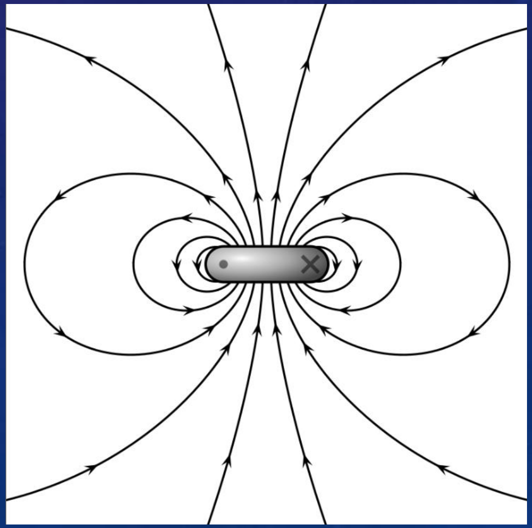
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}V(\boldsymbol{r}) = \frac{k_e Q}{r^2} + k_e \frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{p}}{r^3} + \cdots$$

Magnetostática

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = k_m \frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{m}}{r^3} + \cdots$$

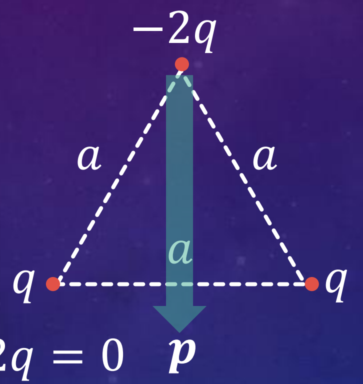






EJEMPLOS

Comencemos con un ejemplo de momento dipolar eléctrico con cargas puntuales.



$$\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r}' dq' \to \sum r_i q_i$$

El momento monopolar es 0: $Q = q + q - 2q = 0$

Calculemos el momento dipolar.

$$\boldsymbol{p} = q\left(\cancel{\frac{1}{2}a\hat{x}}\right) + q\left(\cancel{-\frac{1}{2}a\hat{x}}\right) - 2q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\hat{y}\right) = -\sqrt{3}qa\hat{y}$$

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{k_e Q}{r} + \frac{k_e \boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} + \cdots$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{k_e Q}{r^2} + k_e \frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{p}}{r^3} + \cdots$$

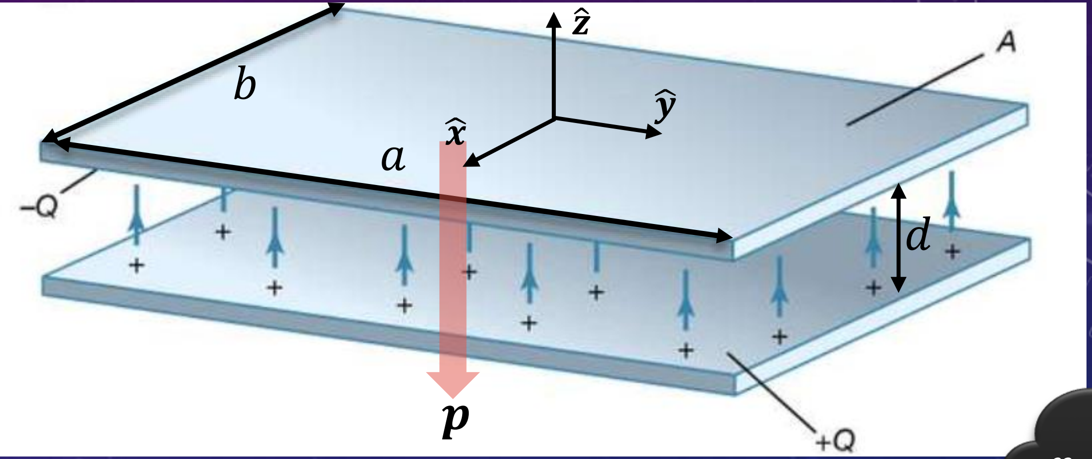
$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{\sqrt{3}k_e qa \sin\phi \sin\theta}{r^2} + \cdots, \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{k_e\sqrt{3}qa}{r^3}(-3\sin\phi\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \hat{\boldsymbol{y}}) + \cdots$$

EJEMPLOS

Dos placas rectangulares de área A, paralelas, cargadas uniformemente, con carga total opuesta Q y $-Q$, separadas una distancia d. Parecido al 14c.

La carga total es 0.

El momento dipolar es,



$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}')d\tau'$$

$$\boldsymbol{p} = \int_{\text{abajo}} \boldsymbol{r}' \frac{Q}{A} dS' + \int_{\text{arriba}} \boldsymbol{r}' \frac{-Q}{A} dS' = \frac{Q}{A}\left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\cancelto{0}{x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}} - \frac{d}{2}\hat{\boldsymbol{z}}\right) dxdy - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\cancelto{0}{x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}} + \frac{d}{2}\hat{\boldsymbol{z}}\right) dxdy\right]$$

$$\boldsymbol{p} = -\frac{Q}{A} abd\hat{\boldsymbol{z}} = -\frac{Q}{A} Ad\hat{\boldsymbol{z}} = -Qd\hat{\boldsymbol{z}}$$

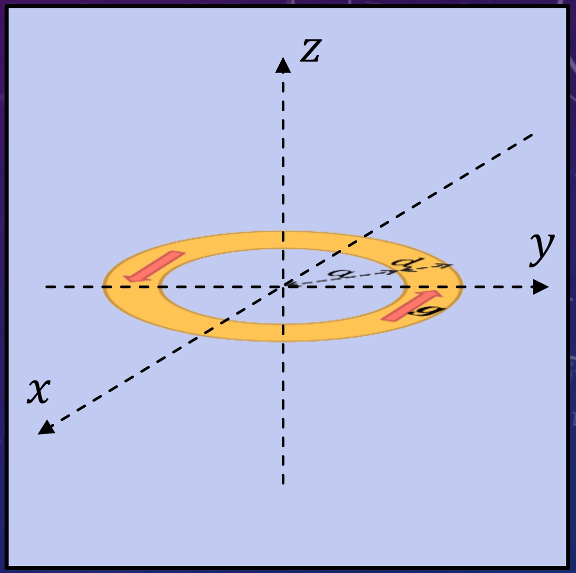
$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{k_e Q}{r} + \frac{k_e \boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} + \cdots$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{k_e Q}{r^2} + k_e \frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{p}}{r^3} + \cdots$$

Y los campos lejanos resultan ser,

$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{k_e Q d \cos\theta}{r^2} + \cdots, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{k_e Q d}{r^3}(3\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \hat{\boldsymbol{z}}) + \cdots$$

EJEMPLOS



Corona de radio menor a y ancho d, con corriente superficial $\boldsymbol{g}$.

La fórmula que tenemos para $\boldsymbol{m}$ es para distribuciones lineales de carga. Podemos dividir la corona en filamentos de ancho $d\rho'$, calcular $\boldsymbol{m}$ para cada filamento (que es como una espira), e integrar.

$$g d\rho' = dI$$

$$d\boldsymbol{l}' = \rho' d\phi' \widehat{\boldsymbol{\phi}'}$$

$$d\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\oint \boldsymbol{r}' \times g d\rho' d\boldsymbol{l}'$$

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\oint \boldsymbol{r}' \times I d\boldsymbol{l}'$$

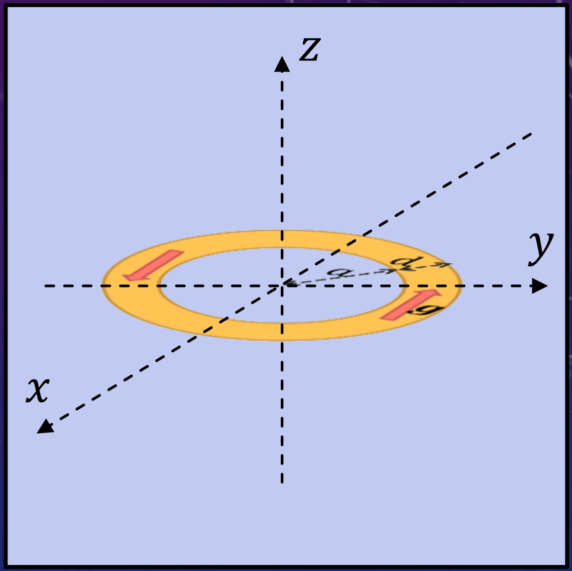
$$d\boldsymbol{m} = \frac{g d\rho'}{2}\int_0^{2\pi} (\rho' \widehat{\boldsymbol{\rho}'}) \times \rho' \widehat{\boldsymbol{\phi}'}\, d\phi' = \rho'^2 \frac{g d\rho'}{2}\int_0^{2\pi} \widehat{\boldsymbol{\rho}'} \times \widehat{\boldsymbol{\phi}'}\, d\phi'$$

$$= \frac{g\rho'^2 d\rho'}{2}\int_0^{2\pi} \hat{\boldsymbol{z}}\, d\phi' = \pi g \rho'^2 d\rho' \hat{\boldsymbol{z}}$$

Y ahora integramos en ρ'.

$$\boldsymbol{m} = \int d\boldsymbol{m} = \int_a^{a+d} \pi g \rho'^2 d\rho' \hat{\boldsymbol{z}} = \frac{\pi}{3} g[(a+d)^3 - a^3]\hat{\boldsymbol{z}} = I\frac{\pi}{3}[(d+a)^2 + a(d+2a)]\hat{\boldsymbol{z}}$$

EJEMPLOS



Corona de radio menor a y ancho d, con corriente superficial $\boldsymbol{g}$.

La fórmula que tenemos para $\boldsymbol{m}$ es para distribuciones lineales de carga. Podemos dividir la corona en filamentos de ancho $d\rho'$, calcular $\boldsymbol{m}$ para cada filamento (que es como una espira), e integrar.

$$\boldsymbol{m} = I\frac{\pi}{3}[(d+a)^2 + a(d+2a)]\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = k_m I \frac{\pi}{3r^2}[(d+a)^2 + a(d+2a)]\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = k_m I \frac{\pi}{3r^3}[(d+a)^2 + a(d+2a)](3\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \hat{\boldsymbol{z}})$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{k_m \boldsymbol{m} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} + \cdots$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = k_m \frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{m}}{r^3} + \cdots$$

FUERZA SOBRE UN DIPOLO (ELÉCTRICO O MAGNÉTICO)

La expresión de la fuerza que ejerce un campo externo sobre un dipolo que se encuentra en la posición $\boldsymbol{r}$ es (para los casos eléctrico y magnético):

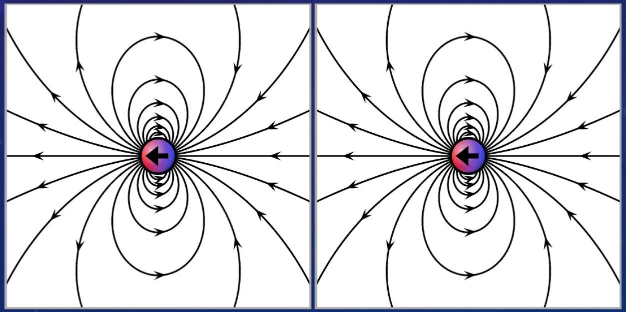
$$\boldsymbol{F}_{el}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{F}_{mag}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$$

Esto quiere decir que el dipolo siente *variaciones de campo*, y no el valor del campo en un solo punto. Si este fuera uniforme, por ejemplo, el dipolo no sentiría fuerza.

Pensemos en el ejemplo de dos dipolos alineados. ¿Qué tipo de fuerza sentirán?

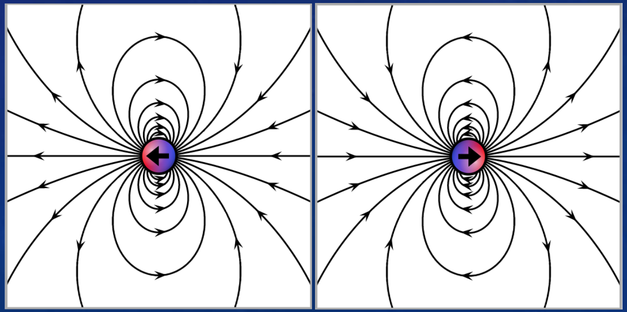
$\boldsymbol{p} \leftarrow \qquad \boldsymbol{p}' \leftarrow$

Si tienen el mismo sentido, se atraen.



$\boldsymbol{p} \leftarrow \qquad \boldsymbol{p} \rightarrow$

Si tienen sentido opuesto, se repelen.



TORQUE SOBRE UN DIPOLO

La expresión del torque que ejerce un campo externo sobre un dipolo que se encuentra en la posición $\boldsymbol{r}$ es (para los casos eléctrico y magnético):

$$\boldsymbol{\tau}_{el}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{\tau}_{mag}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$$

Esto quiere decir que el dipolo tiende a alinearse con el campo, en el sentido de que su equilibrio rotacional existe sólo si el dipolo apunta en dirección del campo.

Como el torque es proporcional al seno del ángulo, es negativo desde $-\pi$ a 0, y positivo desde 0 a π.

Entonces, siempre querrá alinearse *en sentido paralelo* al el campo (y no en sentido antiparalelo), aunque existe un equilibrio *inestable* cuando el dipolo es antiparalelo al campo.