Clase 14/5

(A)

Víncolos y multiplicadores de Lagrange

Cuando tengo un sistema (conservativo) con víncolos (holónomos),

Las fuerzas no conservativas no hacen trabajo.

$$\boxed{f_i(q_1, \dots, q_N, t) = 0}$$

- esclerónomos: no dependen de t.
- reónomos: dependen de t.

tengo 2 opciones:

Introduzco los víncolos en el Lagrangiano. Pierdo información sobre las fuerzas de víncolo.

Uso el método de los multiplicadores de Lagrange para imponer los víncolos. Puedo calcular las fuerzas de víncolo generalizadas.

Cómo funciona el método:

Tengo un Lagrangiano para N grados de libertad.

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t)$$

y tengo M vínculos holónomos.

$$f_1(q_1, \dots, q_N, t) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_M(q_1, \dots, q_N, t) = 0$$

Las ecuaciones que resultan de extremar la acción a condiciones de contorno fijas y sujeta a los vínculos son:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_{a=1}^{M} \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial q_i}} = Q_i^v \quad \text{(fuerzas de vínculo generalizadas)}$$

$$\forall i = 1, \dots, N$$

$$\boxed{f_a(q_1, \dots, q_N, t) = 0} \quad \forall a = 1, \dots, M.$$

En total tengo $N+M$ ecuaciones, para $N+M$ incógnitas.

$$q_1, \dots, q_N, \lambda_1, \dots, \lambda_M$$

Las q_i en general no necesariamente son comp. de posiciones, por ej. pueden ser ángulos $\Rightarrow Q_i^V$ en general no necesariamente son fuerzas. Se llaman "fuerzas generalizadas de vínculo",

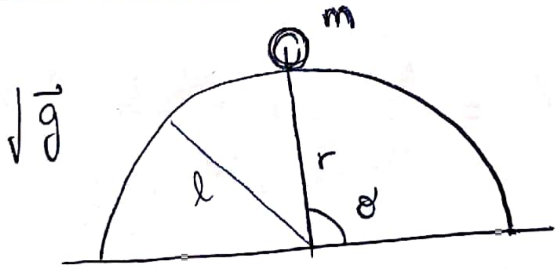
y se relacionan con las fuerzas de vínculo $\vec{F}^V$ así:

$$\boxed{Q_i^V = \sum_{p} \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial q_i} \cdot \vec{F}_p^V}$$

partículas

(donde $\vec{r}_p$ es el vector posición de la partícula p, y $\vec{F}_p^V$ la resultante de los vínculos sobre p.)

Problema 14



Pide: calcular la fuerza de vínculo sobre m, y la altura a la cual se separa del aro

---

Movimiento en un plano: elijo coordenadas polares

$$(q_1, q_2) = (r, \theta)$$

El Lagrangiano del sistema $\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, t)$ es

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \underbrace{mgr\,\text{sen}\theta}$$

El peso es la única fuerza conservativa

Vínculo: $f(r, \theta, t) = r - l = 0$

Escaneado con CamScanner

Aquí $N = 2$ (r, θ) y $M = 1$ (1 solo vínculo). (D)

Las ecuaciones que hay que plantear son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_{a=1}^{M} \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial q_i} \quad \text{para } i = 1, 2$$

Recuerdo:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \operatorname{sen}\theta$$

$$f = r - l$$

r] $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \lambda \frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\boxed{m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg \operatorname{sen}\theta = \lambda} \quad (1)$$

θ] $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$\frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt} + mgr\cos\theta = 0$$

$$2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} + mgr\cos\theta = 0$$

$$\boxed{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\cos\theta = 0} \quad (2)$$

vínculo] $$\boxed{r - l = 0} \quad (3)$$

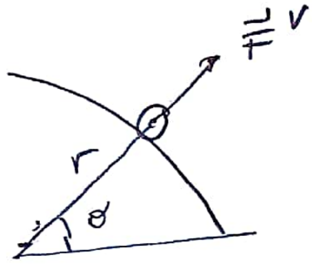
3 ecuaciones para 3 incógnitas: (r, θ, λ).

E

Pide por un lado la fuerza de vínculo:

Sabemos que está en la dirección radial $\vec{F}^v = F^v \hat{r}$

miro la ecuación de E-L para r:



$$Q^v_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \vec{F}^v$$

$$\hat{r} = \cos\theta \, \hat{x} + \operatorname{sen}\theta \, \hat{y}$$

$$\hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta \, \hat{x} + \cos\theta \, \hat{y}$$

$$\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \hat{r}$$

$$\lambda = \hat{r} \cdot F^v \hat{r} = F^v.$$

$$\Rightarrow \vec{F}^v = \lambda \hat{r}.$$

Despejo λ de la ecuación por r:

$$\lambda = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg \operatorname{sen}\theta = -ml\dot{\theta}^2 + mg \operatorname{sen}\theta$$

Impongo el vínculo

$$\Rightarrow \vec{F}^v = \left(-ml\dot{\theta}^2 + mg \operatorname{sen}\theta\right) \hat{r}$$

F

Busco $\dot{\theta}(\theta) \longrightarrow$ miro ecuación por θ:

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\cos\theta = 0 \xrightarrow{\text{vínculo}} \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\theta}\dot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\cos\theta \Rightarrow \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right)d\theta = -\frac{g}{\ell}\int_{\pi/2}^{\theta}\cos\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{\ell}(1-\operatorname{sen}\theta)}$$

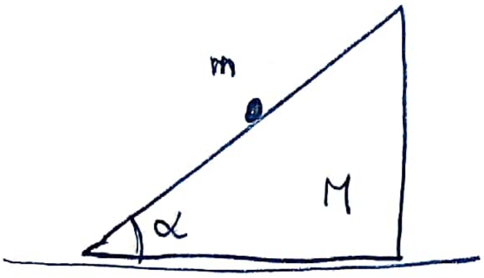
Reemplazo en $\vec{F}^v$:

$$F^v = -m\ell\dot{\theta}^2 + mg\operatorname{sen}\theta = -m\ell\, 2\frac{g}{\ell}(1-\operatorname{sen}\theta) + mg\operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}^v = mg(3\operatorname{sen}\theta - 2)\,\hat{r}}$$

$$\vec{F}^v = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 42^\circ}$$

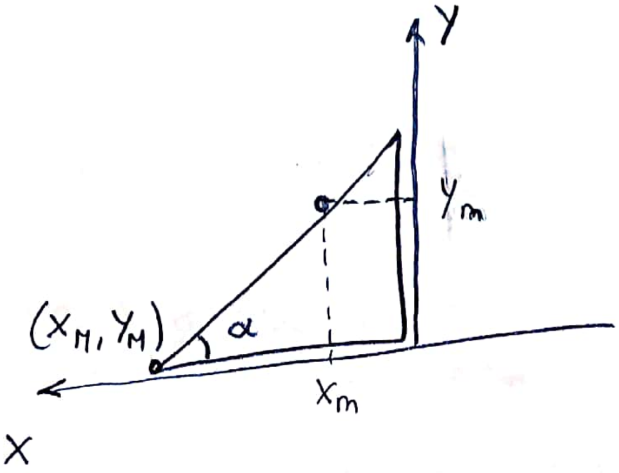
Problema 15



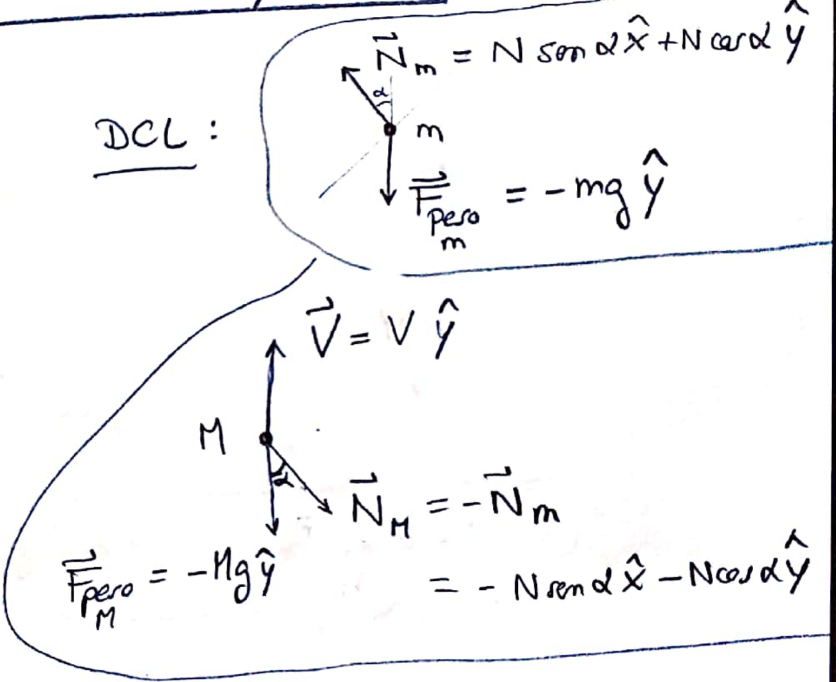
Ambos deslizan sin rozamiento.

Pide hallar las ecs de movimiento de ambos y las fuerzas de vínculo.

Primero planteo un sistema de referencia y el DCL:



DCL:



$\vec{r}_m = (x_m, y_m)$

$\vec{r}_M = (x_M, y_M)$

Planteo primero por Newton:

$\hat{x}\,]$ $\boxed{m\,\ddot{x}_m = N\,\text{sen}\,\alpha}$

$\boxed{M\,\ddot{X}_M = -N\,\text{sen}\,\alpha}$

$\hat{y}\,]$ $\boxed{m\,\ddot{y}_m = -mg + N\cos\alpha}$

$\boxed{M\,\ddot{Y}_M = -Mg - N\cos\alpha + V}$

Vínculo 1: $(x_m, y_m) \in$ 

$y - Y_M = tg(\alpha)(X_M - x)$

$\Rightarrow \boxed{(y_m - Y_M) = tg(\alpha)(X_M - x_m)}$

Vínculo 2: $\boxed{Y_M = 0}$

Quedan 6 ecuaciones / 6 incógnitas

$(x_m, y_m, X_M, Y_M, N, V)$

(H)

Lo resuelvo por Lagrange: $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (x_m, y_m, x_M, x_M)$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2\right) + \frac{M}{2}\left(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2\right) - mgy_m - MgY_M.$$

Vínculos: $\begin{cases} f_1 = (Y_m - Y_M) - tg(\alpha)(X_M - X_m) = 0 \\ f_2 = Y_M = 0. \end{cases}$

Ecuaciones de Euler-Lagrange:

$X_m)$ $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_m}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial X_m} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial X_M}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}_m) = \lambda_1 tg(\alpha) \Rightarrow \boxed{m\ddot{x}_m = \lambda_1 tg(\alpha) = Q^v_{x_m}}$$

$Y_m)$ $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_m}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_m} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial Y_m} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial Y_m}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{y}_m) + mg = \lambda_1 \Rightarrow \boxed{m\ddot{y}_m + mg = \lambda_1 = Q^v_{y_m}}$$

$X_M)$ $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_M}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_M} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_M} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_M}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(M\dot{x}_M) = \lambda_1(-tg(\alpha)) \Rightarrow \boxed{M\ddot{x}_M = -tg(\alpha)\lambda_1 = Q^v_{x_M}}$$

(I)

$Y_M] \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_M}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_M} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_M} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_M}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(M \dot{y}_M\right) + Mg = -\lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \boxed{M \ddot{y}_M + Mg = -\lambda_1 + \lambda_2 = Q^V_{y_M}}$$

$\Rightarrow$ Queden 6 ecuaciones:

$$m\ddot{x}_m = tg(\alpha)\,\lambda_1$$

$$M\ddot{X}_M = -tg(\alpha)\,\lambda_1$$

$$m\ddot{y}_m = -mg + \lambda_1$$

$$M\ddot{Y}_M = -Mg - \lambda_1 + \lambda_2$$

$$(Y_m - Y_M) - tg(\alpha)(X_M - X_m) = 0$$

$$Y_M = 0$$

Antes con Newton encontramos:

$$m\ddot{x}_m = N \operatorname{sen}\alpha$$

$$M\ddot{X}_M = -N \operatorname{sen}\alpha$$

$$m\ddot{y}_m = -mg + N\cos\alpha$$

$$M\ddot{Y}_M = -Mg - N\cos\alpha + V$$

$$(Y_m - Y_M) = tg(\alpha)(X_M - X_m)$$

$$Y_M = 0$$

Son iguales si $\begin{cases} \boxed{\lambda_1 = N\cos\alpha} \\ \boxed{\lambda_2 = V} \end{cases}$.

¿Cómo obtengo esto sin plantear Newton?

Las fuerzas de vínculo son: sobre $m)$ $\vec{N}_m = N \operatorname{sen}\alpha\,\hat{x} + N\cos\alpha\,\hat{y}$

$M)$ $\vec{N}_M = -N \operatorname{sen}\alpha\,\hat{x} - N\cos\alpha\,\hat{y}$

$\vec{V} = V\,\hat{y}$

Planteo las ecuaciones para las fuerzas generalizadas:

$$\lambda_1 \, tg(\alpha) = Q^V_{x_m} = \sum_{i=m,M} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_m} \cdot \vec{F}_i^V$$

$$\lambda_1 = Q^V_{y_m} = \sum_{i=m,M} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial y_m} \cdot \vec{F}_i^V$$

$$-tg(\alpha)\, \lambda_1 = Q^V_{x_M} = \sum_{i=m,M} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_M} \cdot \vec{F}_i^V$$

$$-\lambda_1 + \lambda_2 = Q^V_{y_M} = \sum_{i=m,M} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial y_M} \cdot \vec{F}_i^V$$

Donde: $\begin{cases} \vec{r}_m = x_m \hat{x} + y_m \hat{y} \\ \vec{r}_M = x_M \hat{x} + y_M \hat{y} \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{F}_m^V = N \, sen\alpha \, \hat{x} + N \cos\alpha \, \hat{y} \\ \vec{F}_M^V = -N \, sen\alpha \, \hat{x} - N \cos\alpha \, \hat{y} + V \hat{y} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{ll} Q^V_{x_m}) & \lambda_1 \, tg(\alpha) = N \, sen(\alpha) \\ Q^V_{y_m}) & \lambda_1 = N \cos(\alpha) \\ Q^V_{x_M}) & -tg(\alpha)\, \lambda_1 = -N \, sen(\alpha) \\ Q^V_{y_M}) & -\lambda_1 + \lambda_2 = -N \cos(\alpha) + V \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = N \cos(\alpha) \\ \lambda_2 = V \end{array}}$$