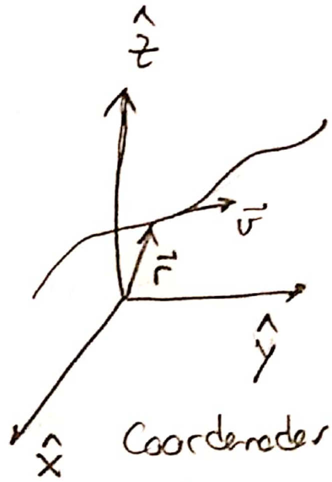
**Trayectoria:** $t \rightarrow$ tiempo, unidades MKS: segundo s.

**posición:**

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$$

Unidades MKS: metro m.




Coordenadas cartesianas.

**velocidad:**

$$\vec{v}(t) = \frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial t} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\,\hat{x} + \dot{y}(t)\,\hat{y} + \dot{z}(t)\,\hat{z}$$

Unidades MKS: $\frac{m}{s}$.

Nota: los versores cartesianos $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ no dependen del tiempo.

**aceleración:**

$$\vec{a}(t) = \frac{\partial^2 \vec{r}(t)}{\partial t^2} = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\,\hat{x} + \ddot{y}(t)\,\hat{y} + \ddot{z}(t)\,\hat{z}$$

unidades MKS: $\frac{m}{s^2}$

Nota: Vamos a despreciar la estructura, forma, tamaño del cuerpo $\rightarrow$ aproximación: lo consideramos un punto.

# Ecuación de Newton:

$$\boxed{\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t) = m \frac{\partial^2 \vec{r}(t)}{\partial t^2}}$$

$\boxed{m}$ es la masa del cuerpo → Unidades MKS: kilogramo kg.

Es un escalar, no depende del tiempo.

$\boxed{\vec{F}}$ es la fuerza resultante (suma de todas las fuerzas) que actúa sobre el cuerpo.

Es un vector. $\vec{F}(t) = F_x(t)\,\hat{x} + F_y(t)\,\hat{y} + F_z(t)\,\hat{z}$

Puede depender de $\vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}}(t)$, ... y/o explícitamente del tiempo.

Unidades MKS: Newton $N = \frac{kg\,m}{s^2}$

La ecuación de Newton es una ecuación diferencial vectorial de segundo orden → La solución está determinada a menos de 2 constantes de integración.

Físicamente se fijan por medio de condiciones iniciales

# Ejemplos:

⊙ No hay fuerzas $\vec{F} = 0$ $\Rightarrow$ $m \dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = 0$

$\left( \text{CI: } \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \,,\; \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(t) = 0 \quad \Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{v}_0$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\, dt = \vec{v}_0 (t - t_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0)}$$

Comentario: Los físicos pensamos a las derivadas como cocientes de pequeñas variaciones:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 \longrightarrow d\vec{r} = \vec{v}_0\, dt$$

$$\longrightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \vec{v}_0 \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0)}$$

D

(•) Hay una fuerza constante: $\vec{F} = \vec{f}_0$ $\left( CI: \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \ \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \right)$

$$\Rightarrow m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \vec{f}_0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{m} \vec{f}_0$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt = \frac{1}{m} \vec{f}_0 (t - t_0) \equiv \vec{a}_0 (t - t_0)$$

$$\boxed{\vec{a}_0 \equiv \frac{\vec{f}_0}{m}}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 (t - t_0)$$

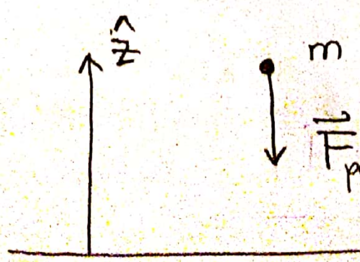
$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt = \int_{t_0}^{t} \left( \vec{v}_0 + \vec{a}_0 (t - t_0) \right) dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}_0 (t - t_0)^2}$$

La fuerza gravitatoria sobre un cuerpo cerca de la sup. de la tierra se puede aproximar como una fuerza constante:

Es la "fuerza peso"

$\vec{g} = -g \hat{z}$ (vector aceleración gravitatoria)



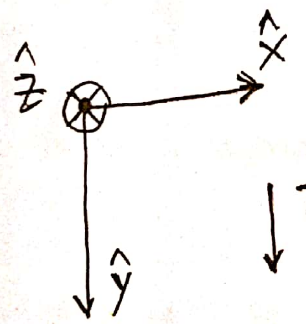

$$\vec{F}_{peso} = -m \cdot g \cdot \hat{z}$$

$$\boxed{g \simeq 9,8 \ \frac{m}{s^2}}$$

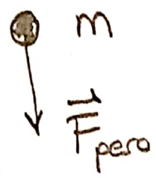
# Problema 2

a) Una partícula de masa m entra en una región donde hay un campo constante y uniforme $\vec{g}$, con una velocidad $v_0$ perpendicular a la dirección del campo. Encontrar su trayectoria.

⊙ Primero elijo un sistema de referencia:




$$\downarrow \vec{g} = g \cdot \hat{y}$$




$$\vec{F}_{peso} = m\vec{g} = mg\,\hat{y}$$

⊙ Planteo el diagrama de fuerzas

⊙ Planteo las ecuaciones de Newton:

$$\vec{F}_{peso} = m \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow mg\,\hat{y} = m\left[\ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y} + \ddot{z}\,\hat{z}\right]$$

F

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = mg \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_{x_0}(t-t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_{y_0}(t-t_0) + \frac{g}{2}(t-t_0)^2$$

$$z(t) = z_0 + v_{z_0}(t-t_0)$$

$(x_0, y_0, z_0, v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}) \rightarrow$ ctes de integración.

Se fijan imponiendo las condiciones iniciales.

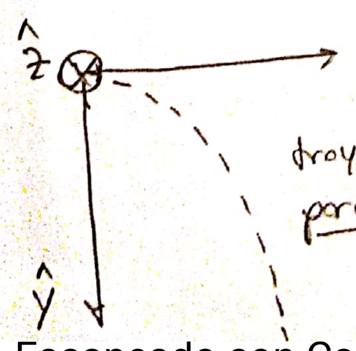
Supongamos que originalmente $x_0 = y_0 = z_0 = 0$
$t = t_0 = 0$
y que la velocidad inicial está en la dirección $\hat{x}$:

$$v_{x_0} = v_0, \quad v_{y_0} = v_{z_0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \underbrace{v_0 \, t}_{x(t)} \, \hat{x} + \underbrace{\frac{g}{2} t^2}_{y(t)} \, \hat{y}}$$

trayectoria de la partícula.

$$y(t) = \frac{g}{2v_0^2} x^2(t) \longrightarrow$$




trayectoria parabólica.

b) Idem (a) pero la velocidad $v_0$ es paralela a $\vec{g}$ (G)

y de sentido opuesto.

Calcular el tiempo que le lleva a la partícula volver a su posición inicial.

El planteo del sistema de referencia, el diagrama de fuerzas y las ecs de Newton es el mismo.

pero las condiciones iniciales son distintas.

En $t = t_0 = 0 \rightarrow x_0 = y_0 = z_0 = 0$

pero ahora como $\vec{g} = g\hat{y} \Rightarrow$

$$\vec{v}(t = t_0 = 0) = \vec{v}_0 = v_{x_0}\hat{x} + v_{y_0}\hat{y} + v_{z_0}\hat{z} = -v_0\hat{y}$$

Velocidad inicial antiparalela a $\vec{g}$.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \left(-v_0 t + \frac{g}{2}t^2\right)\hat{y}}$$


El punto máximo se alcanza en $t_{max} = \frac{v_0}{g}$

donde $y_{max} = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$

Tiempo de retorno → raíces → $t_{retorno} = \frac{2v_0}{g}$

La fuerza peso es proporcional a la masa

$$\vec{F}_{peso} = m \cdot \vec{a} = -mg\hat{z}$$

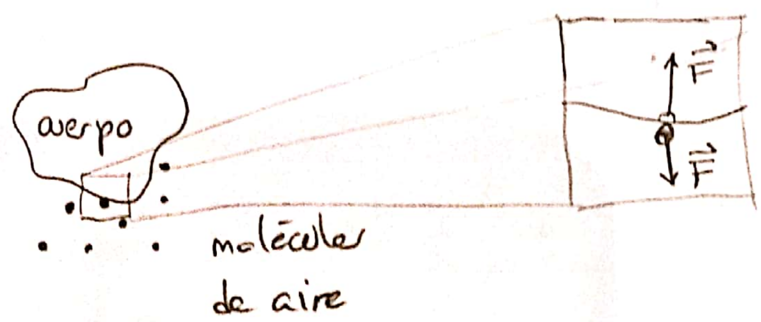
Por lo que la aceleración que genera la gravedad es independiente de la masa: $\vec{a} = -g\hat{z}$.

Esto es contraintuitivo: si dejo caer un papel y un martillo desde el reposo, la experiencia cotidiana indica que el martillo cae primero.

Ver video: https://youtu.be/mrVT3r2Yonc

Si se elimina el efecto del aire se observa que ambos se aceleran en igual medida y caen en simultaneo.

El aire (o cualquier otro fluido) está compuesto por moléculas que interactúan con aquellas de la superficie del cuerpo que cae. Se establece una fuerza de contacto que forma un par de acción - reacción.




El cuerpo siente una fuerza que se opone a su desplazamiento.

$\Rightarrow$ La fuerza de rozamiento depende de la velocidad.

Por ej: $\vec{F}_{roz} = -\gamma \vec{v}$ donde $[\gamma] = \frac{kg}{s}$

(coeficiente de rozamiento $\gamma \geq 0$).

$\gamma$ dependerá de la densidad del fluido, de la superficie del cuerpo, de la forma del cuerpo, etc.

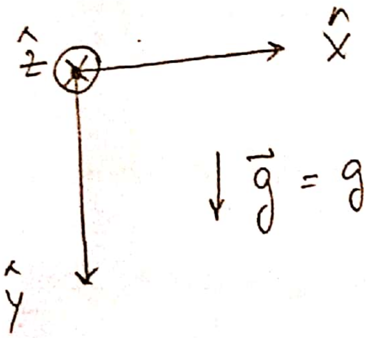
Problema 3

(J)

a) Considere el problema 2a) con la inclusión de una fuerza de resistencia proporcional a la primera potencia de la velocidad en la dirección vertical $\vec{F}_{roz} = -\gamma v_y \hat{y}$.

Encontrar las ecs. de mov. y resolverlas.

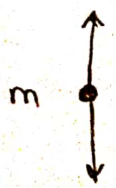
⊙ La elección del sistema de referencia es igual que en 2a).




$\downarrow \vec{g} = g\hat{y}$

⊙ El diagrama de fuerzas incluye una fuerza adicional.

$\vec{F}_{roz} = -\gamma \dot{y} \hat{y}$ → Es una fuerza anisótropa de la forma $\vec{F} = -\gamma \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{v})$ con $\vec{u} = \hat{y}$.




$\vec{F}_{peso} = mg\hat{y}$

(c) Newton:

$$\vec{F}_{peso} + \vec{F}_{roz} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad mg\,\hat{y} - \gamma\dot{y}\,\hat{y} = m\left(\ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y} + \ddot{z}\,\hat{z}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = mg - \gamma\dot{y} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$\to$ ec. Euler inhomogenea.

En $\hat{x}$ y $\hat{z}$ el movimiento es igual que en 2a)

$$x(t) = x_0 + v_{x_0}(t-t_0)$$

$$z(t) = z_0 + v_{z_0}(t-t_0)$$

En $\hat{y}$] Lo resuelvo como lo haría un físico:

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = g - \frac{\gamma}{m}\dot{y} \Rightarrow \int_{v_{y_0}}^{\dot{y}} \frac{d\dot{y}}{\left(g - \frac{\gamma}{m}\dot{y}\right)} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

$$\Rightarrow -\frac{m}{\gamma}\ln\left(g - \frac{\gamma}{m}\dot{y}\right) + \frac{m}{\gamma}\ln\left(g - \frac{\gamma}{m}v_{y_0}\right) = t - t_0$$

$$\Rightarrow g - \frac{\gamma}{m}\dot{y} = \left(g - \frac{\gamma}{m}v_{y_0}\right)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = \underbrace{\frac{gm}{\gamma}}_{} - \left(\frac{gm}{\gamma} - v_{y_0}\right) e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)}$$

Velocidad límite en la componente $\hat{y}$.

Vuelvo a integrar:

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{t_0}^{t} \left[\frac{gm}{\gamma} - \left(\frac{gm}{\gamma} - v_{y_0}\right) e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)}\right] dt.$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = y_0 + \frac{gm}{\gamma}(t-t_0) + \frac{m}{\gamma}\left(\frac{gm}{\gamma} - v_{y_0}\right)\left[e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} - 1\right]}$$

Con las condiciones iniciales: $x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad t_0 = 0$

$v_{x_0} = v_0 \quad , v_{y_0} = v_{z_0} = 0.$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = \frac{gm}{\gamma} t + \frac{gm^2}{\gamma^2}\left(e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 1\right)$$

$$z(t) = 0.$$

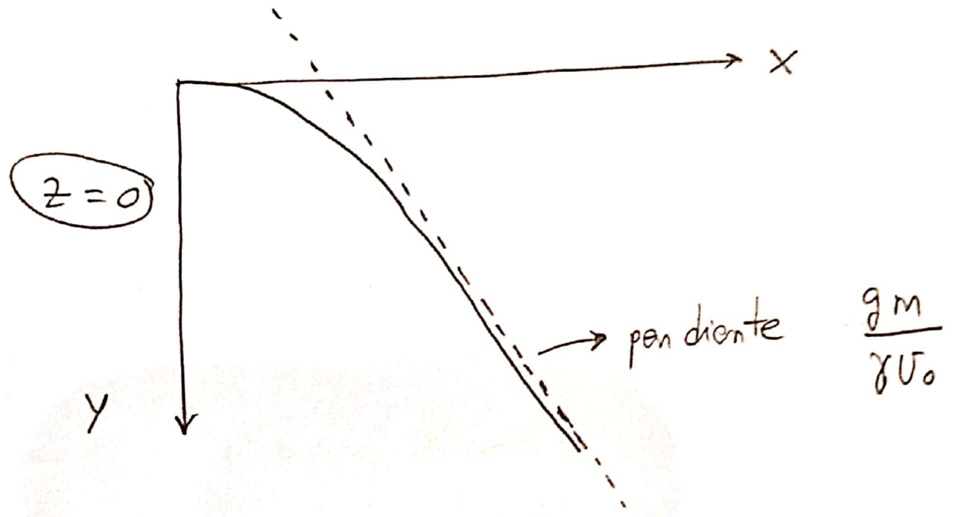
A $t$ largo $\rightarrow$ MRU.

pq. $v / F_{roz} = -F_{peso}$

deja de acelerarse

Trayectoria en el plano $x-y$. $(z=0)$

$$y(x) = \frac{gm}{\gamma v_0} x + \frac{gm^2}{\gamma^2}\left(e^{-\frac{\gamma}{m v_0} x} - 1\right)$$




3b) Considere ahora que la fuerza es proporcional al vector velocidad $\vec{F} = -\gamma \vec{v}$ y repita el ejercicio.

⊙ Ahora $\vec{F}_{roz} = -\gamma \dot{x}\hat{x} \underbrace{- \gamma \dot{y}\hat{y}} - \gamma \dot{z}\hat{z}$

La componente $\hat{y}$ es igual que antes

$\Rightarrow$ En la componente $\hat{y}$ el resultado es el mismo.

⊙ Como tomo $v_{z_0} = 0 \rightarrow$ no va a haber movimiento en $\hat{z}$

$\Rightarrow z(t) = 0$

En $\hat{x}$] Es igual que en $\hat{y}$ pero con $g = 0$. (!)

$$x(t) = x_0 - \frac{m v_{x_0}}{\gamma}\left[e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} - 1\right]$$

con C.I.: $$x(t) = -\frac{m v_0}{\gamma}\left(e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 1\right)$$

$$\dot{x}(t) = v_0 \, e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

Para $t$ largo $\dot{x} \to 0$ y $x \to \frac{m v_0}{\gamma}$

Trayectoria $\longrightarrow$ ejercicio.