Clase 21/5

Guía 3: entrego ejercicio 10

(A)

Clase pasada: Simetrías de la acción $\Rightarrow$ Cantidades conservadas

Ejemplos:
- $t \to t' = t + \varepsilon \Rightarrow \mathcal{H}$ se conserva. (energía)
- $x \to x' = x + \varepsilon \Rightarrow P_x$ se conserva. (momento lineal.
- $\theta \to \theta' = \theta + \varepsilon \Rightarrow L$ se conserva (momento angular).

Hoy vamos a ver qué hacemos con esto.

Ejemplo 1 (Ejercicio 5).

Masa m en 1 dimensión. Energía potencial $U(x)$ tiene un único extremo mínimo en x_0. Energía inicial / $E = U(x_1) = U(x_2)$ con $x_1 < x_0 < x_2$.

- Encontrar la expresión integral para el período del movimiento.
- Calcularlo explícitamente para $U(x) = \frac{k}{2}(x - x_0)^2$ con $k > 0$.

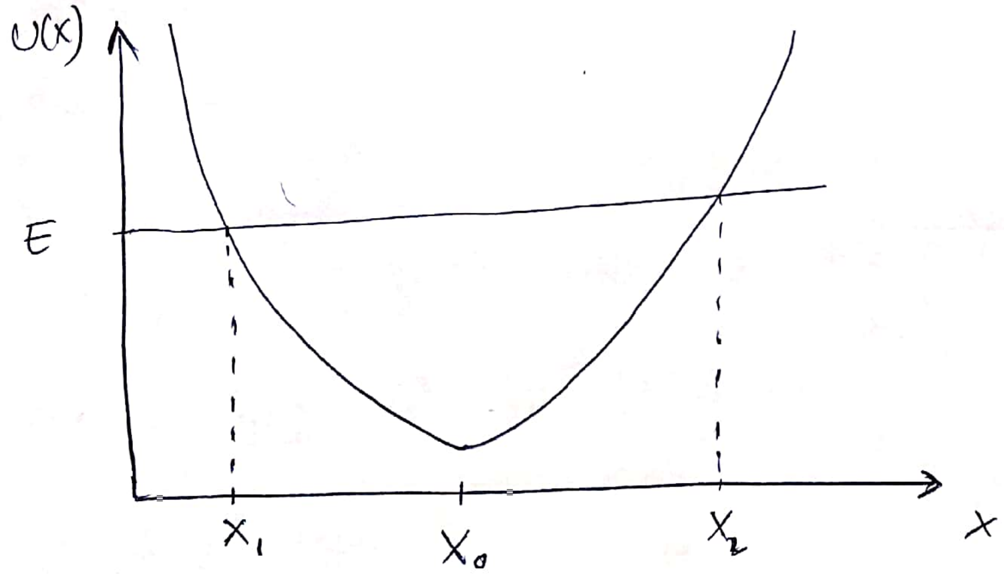
Escaneado con CamScanner

El Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x)$. (B)

Como no depende explícitamente de $t \Rightarrow$ $\boxed{E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) \text{ se conserva.}}$

Es el caso de una partícula sometida a una fuerza conservativa $\vec{F} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x}\hat{x}$

Según el enunciado, U tiene la pinta:



Antes de resolver el ejercicio veamos qué movimiento hace:

- En $\boxed{x = x_1}$: $E = U(x) \Rightarrow \dot{x} = 0$ está quieta.

  $F(x_1) = -\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x_1} > 0$ sometida a una fuerza en $\hat{x}$: está acelerado en $\hat{x}$

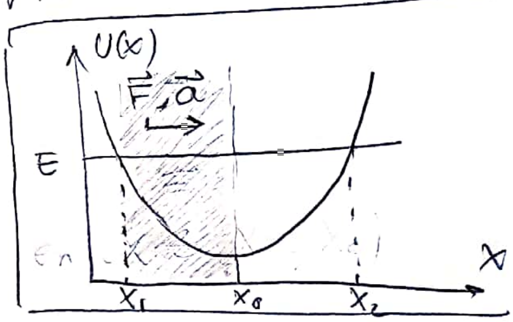
(c)

- En $\boxed{x_1 < x < x_0}$: $E - U(x) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 > 0$

$\Rightarrow$ se mueve con velocidad.

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

Al avanzar en x :



Como $U(x)$ decrece $\Rightarrow |\dot{x}|$ crece.

Esto es porque $F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} > 0$

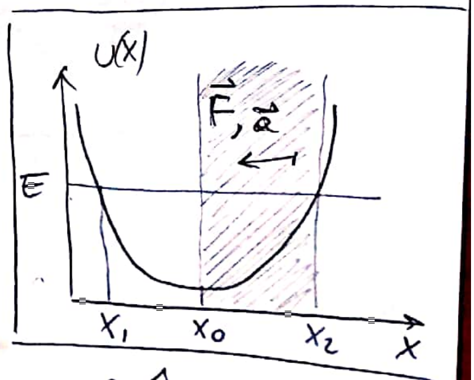
$\Rightarrow$ La aceleración es positiva en la dirección $\hat{x}$.

- En $\boxed{x_0 < x < x_2}$: $E - U(x) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 > 0$

$\Rightarrow$ se mueve con velocidad

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

Al avanzar en x :



Como $U(x)$ crece $\Rightarrow |\dot{x}|$ decrece.

Esto es porque $F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} < 0$

$\Rightarrow$ La aceleración es negativa en la dirección $\hat{x}$.

(d) En $\boxed{x = x_0}$: $E = U(x) \Rightarrow \dot{x} = 0$ está quieta.

$F(x_2) = -\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x_2} < 0$ sometida a una fuerza en "$-\hat{x}$"

$\Rightarrow$ está acelerada en $-\hat{x}$.

Escaneado con CamScanner

(D)

⇒ La partícula realiza un movimiento oscilatorio entre x_1 y x_2. El ejercicio pide calcular el período: tiempo que tarda en hacer una oscilación.

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) \Rightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

$$T = 2\int_{t_1}^{t_2} dt$$

donde t_1 es cuando está en x_1
t_2 " x_2.

La integral es solo la mitad de la oscilación.

Uso $dx = \dot{x}\,dt$ ⇒

$$\boxed{T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}}$$

__Caso particular:__ Si $U(x) = \frac{k}{2}(x - x_0)^2$ con $k > 0$

Integrar y ver que: $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$ ⇒ $\boxed{w = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

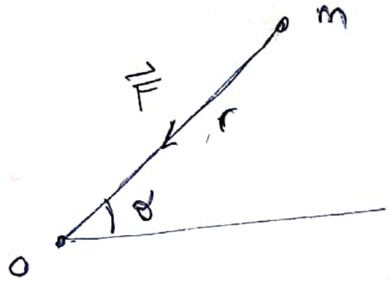
período frecuencia

Potencial central en 2-dimensiones

Tengo un $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$

(si $\dot{\theta} = 0$ estamos en el caso anterior).

$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} \rightarrow$ apunta en la dirección radial.



Queremos estudiar qué pasa en la dirección $\hat{r}$ y pensar el problema como unidimensional en la variable r.

Cantidades conservadas:

- Invariancia temporal $\Rightarrow$ $\boxed{E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r)}$

  se conserva.

- θ es cíclica $\Rightarrow$ $\boxed{P_\theta = m r^2 \dot{\theta}}$

  se conserva.

  $\uparrow$

  Momento angular respecto de O.

(F)

De la energía no puedo repetir el análisis anterior porque depende de $\dot{\theta}$ que no es constante.

Pero! puedo usar la conservación del momento angular:

$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2}} \quad (1)$$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{P_\theta^2}{2mr^2} + V(r)}_{V_{ef}(r)}.$$

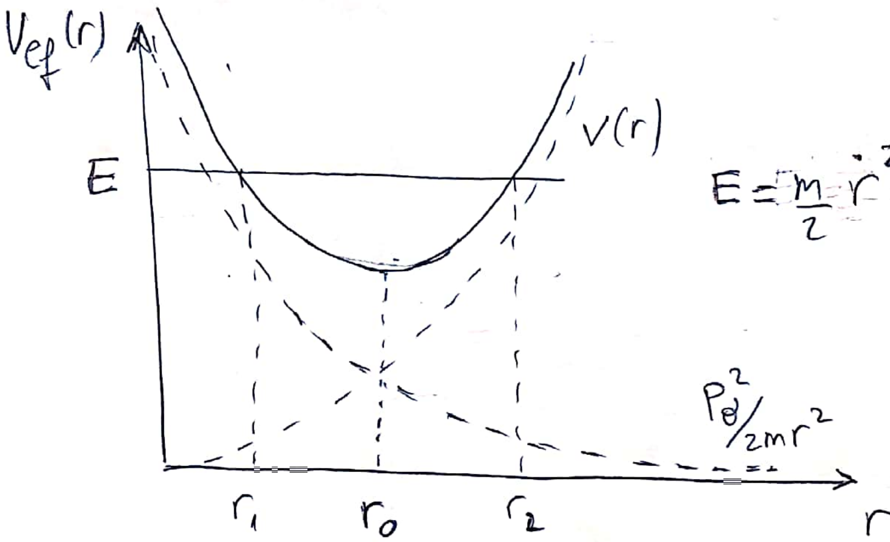
(2)

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{ef}(r)} \quad \text{con} \quad \boxed{V_{ef}(r) = \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + V(r)}$$

Reduje el problema a un caso unidimensional.

Puedo integrar (1) y (2) para calcular la trayectoria dadas las C.I., o puedo jugar al análisis que hice antes para obtener info cualitativa del movimiento de la partícula.

Ejemplo: $V(r) = \frac{k}{2} r^2$.



$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}r^2$$

Aca puedo calcular: ⊙ Puntos de retorno: $\dot{r} = 0$

⊙ punto de velocidad radial máxima: mínimo de $V_{ef}(r)$.

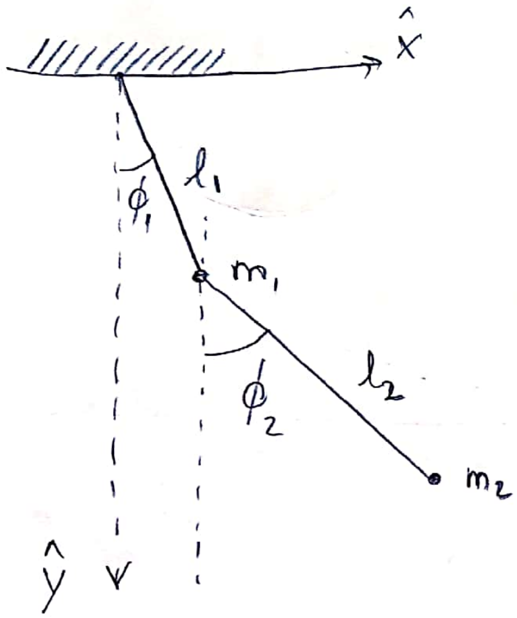
Ejercicio → ⊙ Periodo de la oscilación y la frecuencia

⊙ Condición para órbitas circular. $(r_1 = r_2)$

$$E = \min(V_{ef}).$$

¿Si las oscilaciones son pequeñas, cómo calculo las órbitas cerradas?

Péndulo doble coplanario : (Problema 8)



$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

$\oplus$ Vínculos.

Vínculos:

$$x_1 = l_1 \operatorname{sen}\phi_1$$
$$y_1 = l_1 \cos\phi_1$$
$$x_2 = l_1 \operatorname{sen}\phi_1 + l_2 \operatorname{sen}\phi_2$$
$$y_2 = l_1 \cos\phi_1 + l_2 \cos\phi_2$$

Reemplazo (no me importan las fuerzas de vínculo)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \cos\phi_1 \, \dot{\phi}_1 \\ \dot{y}_1 &= -l_1 \operatorname{sen}\phi_1 \, \dot{\phi}_1 \end{aligned}\right\} \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 \dot{\phi}_1^2$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_2 &= l_1 \cos\phi_1 \dot{\phi}_1 + l_2 \cos\phi_2 \dot{\phi}_2 \\ \dot{y}_2 &= -l_1 \operatorname{sen}\phi_1 \dot{\phi}_1 - l_2 \operatorname{sen}\phi_2 \dot{\phi}_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\dot{x}_2 + \dot{y}_2 = l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \, l_1 l_2 \underbrace{(\cos\phi_1 \cos\phi_2 + \operatorname{sen}\phi_1 \operatorname{sen}\phi_2)}_{\cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

(I)

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot\phi_1^2 + \frac{m_2}{2}\left[l_1^2\dot\phi_1^2 + l_2^2\dot\phi_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\phi_1-\phi_2)\dot\phi_1\dot\phi_2\right] + m_1 g l_1 \cos\phi_1 + m_2 g (l_1\cos\phi_1 + l_2\cos\phi_2)}$$

(obtener de acá el $\mathcal{L}$ del problema 7).

El problema exacto es muy complicado: estudio pequeñas osc.

$\phi_1 \ll 1$, $\phi_2 \ll 1$

Reemplazo $\cos\phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2}$ (Taylor al orden más bajo).

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1+m_2) l_1^2\dot\phi_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2\dot\phi_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot\phi_1\dot\phi_2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2) g l_1 \phi_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \phi_2^2}$$

Ecs. Euler-Lagrange:

$\phi_1]$ $$\boxed{(m_1+m_2) l_1^2 \ddot\phi_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot\phi_2 + (m_1+m_2) g l_1 \phi_1 = 0}$$

$\phi_2]$ $$\boxed{m_2 l_2^2 \ddot\phi_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot\phi_1 + m_2 g l_2 \phi_2 = 0}$$

Matricialmente queda algo de la forma:

$$M\ddot{\vec{\phi}} + K\vec{\phi} = 0$$ ⇒ propongo soluciones del tipo:

$$\vec{\phi} \sim \vec{\phi}_0 \, e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \left(-\omega^2 M + K\right)\vec{\phi}_0 \, e^{i\omega t} = 0$$

Tiene solución no nula si $\boxed{\det\left(-\omega^2 M + K\right) = 0}$

Ecuación característica del sistema.

$$\Rightarrow \vec{\phi} = \mathrm{Re}\left[\sum_i A_i \vec{\phi}_i \, e^{i\omega_i t}\right] \quad \text{con} \quad \left(-\omega_i^2 M + K\right)\vec{\phi}_i = 0$$

Aplicado a este problema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (m_1+m_2)\,l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix}}_{\ddot{\vec{\phi}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} (m_1+m_2)\,g\,l_1 & 0 \\ 0 & m_2 g\, l_2 \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}}_{\vec{\phi}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escaneado con CamScanner

$$\det(-\omega^2 M + K) = l_1 l_2 m_2 \left(g^2(m_1+m_2) - g(l_1+l_2)(m_1+m_2)\omega^2 + l_1 l_2 m_1 \omega^4\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_\pm^2 = \frac{g(l_1+l_2)(m_1+m_2) \pm g\sqrt{m_1+m_2}\sqrt{(l_1-l_2)^2 m_1 + (l_1+l_2)^2 m_2}}{2 l_1 l_2 m_1}}$$

frecuencias características.

Cuando $m_1 \to \infty$, $\omega_\pm^2 \longrightarrow \frac{g}{2l_1 l_2}(l_1+l_2) \pm \frac{g}{2l_1 l_2}(l_1 - l_2)$

$$\Rightarrow \omega_+ \longrightarrow \sqrt{\frac{g}{l_2}} \quad , \quad \omega_- \longrightarrow \sqrt{\frac{g}{l_1}}$$

Nota: Como M y K son simétricas y M es invertible

$$\Rightarrow \ddot{\vec\phi} + M^{-1}K\vec\phi = 0 \qquad \vec\phi = O \cdot \vec z$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec z} + \underbrace{O^T M^{-1} K O}_{O / \text{ esta es diagonal}} \vec z = 0 \qquad \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \\ & \omega_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot z_i + \omega_i^2 z_i = 0} \longrightarrow$$ las frecuencias propias son las frecuencias de los modos normales