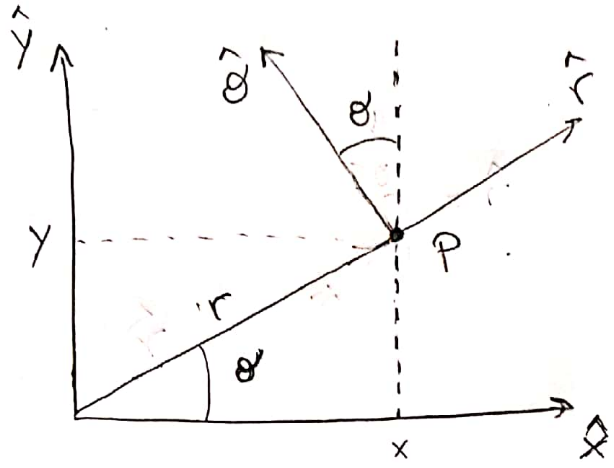
Clase 27/4

A

Reparo de coord. polares:



$$\begin{cases} \hat{r} = \cos\theta\ \hat{x} + \operatorname{sen}\theta\ \hat{y} \\ \hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta\ \hat{x} + \cos\theta\ \hat{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

puedo invertir lo anterior:
$$\begin{cases} \hat{x} = \cos\theta\ \hat{r} - \operatorname{sen}\theta\ \hat{\theta} \\ \hat{y} = \operatorname{sen}\theta\ \hat{r} + \cos\theta\ \hat{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

<u>posición P</u>: <u>tres formas de escribirlo</u>:

1. $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ $\longrightarrow$ forma usual

2. $\vec{r} = r\cos\theta\ \hat{x} + r\operatorname{sen}\theta\ \hat{y}$ $\longrightarrow$ esta es útil.

3. $\boxed{\vec{r} = r\cdot\hat{r}}$ $\longrightarrow$ lo que me interesa acá.

Si P se mueve en el tiempo $\rightarrow$ todo depende de t

solvo $\hat{x}$ y $\hat{y}$ $\longrightarrow$ $x(t), y(t), r(t), \theta(t), \hat{r}(t), \hat{\theta}(t)$

Velocidad de P:

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\hat{r}} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}}$$

$$\dot{\hat{r}} = -\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}\,\hat{x} + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{y} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{x} - \operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}\,\hat{y} = -\dot{\theta}\,\hat{r}$$

Aceleración de P:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\,\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + r\dot{\theta}\,\dot{\hat{\theta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - \underbrace{r\dot{\theta}^2}_{\text{Aceleración centrípeta}})\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}}$$

Movimiento circular: $r = cte.$

$\dot{\theta} = \omega$ velocidad angular

si $\omega = cte.$ $\begin{cases} T = \dfrac{2\pi}{\omega} & \text{período.} \\ \nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi} & \text{frecuencia.} \end{cases}$

Escaneado con CamScanner

Ⓒ

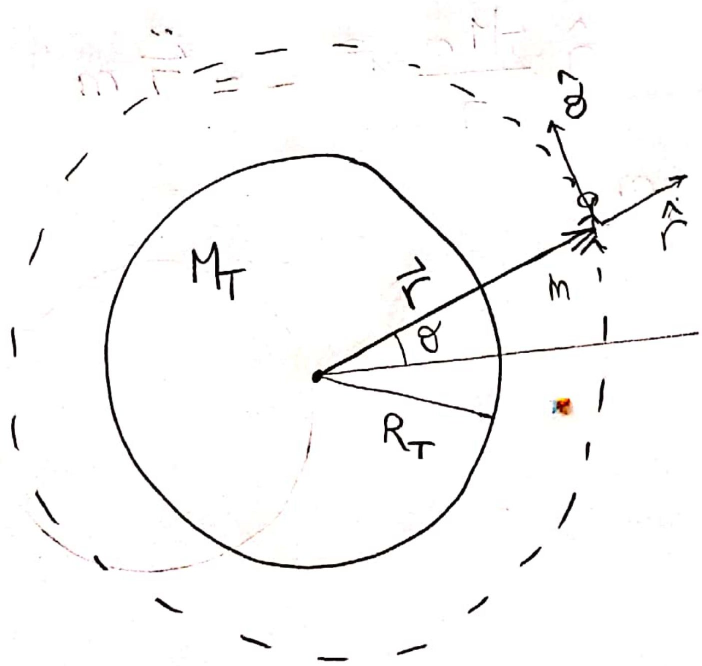
Problema 10

Un cosmonauta describe aproximadamente una órbita circular de unos 200 km por encima de la superficie terrestre. Calcular la velocidad de la nave y el período de la órbita.

Sean cuales sean las C.I. $\longrightarrow$ el movimiento va a ser **plano**: El plano es el que contiene al vector de velocidad inicial y el centro de la tierra (pensarlo).

---

planteo Newton en el plano del movimiento:



$$m\ddot{\vec{r}} = \underbrace{-G_N \frac{mM_T}{r^2}\hat{r}}$$

La fuerza está planteada en coord. polares (o esféricas)

$\Rightarrow$ Escribo la aceleración en polares.

$$m\ddot{\vec{r}} = m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}\right] = -\frac{G_N m M_T}{r^2}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{r}] \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G_N \frac{mM_T}{r^2} \qquad (1)$$

$$\hat{\theta}] \quad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \qquad (2)$$

De (2), como la órbita es circular: $\boxed{\dot{r} = 0}$ (I)

$\Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \omega_0 = cte}$ La velocidad angular es cte.

De (1), usando $\ddot{r} = 0 \Rightarrow$

velocidad angular: $\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{G_N M_T}{r^3}}}$

velocidad (en módulo) $\boxed{v = r\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{G_N M_T}{r}}}$

Periodo $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\dot{\theta}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{G_N M_T}}}$

Se puede calcular usando:

$R_T = 6{,}3 \cdot 10^6\,m$

$M_T = 6 \cdot 10^{24}\,kg$.

$G_N = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{m^3}{kg\,s^2}$

$r = R_T + 2 \cdot 10^5\,m$

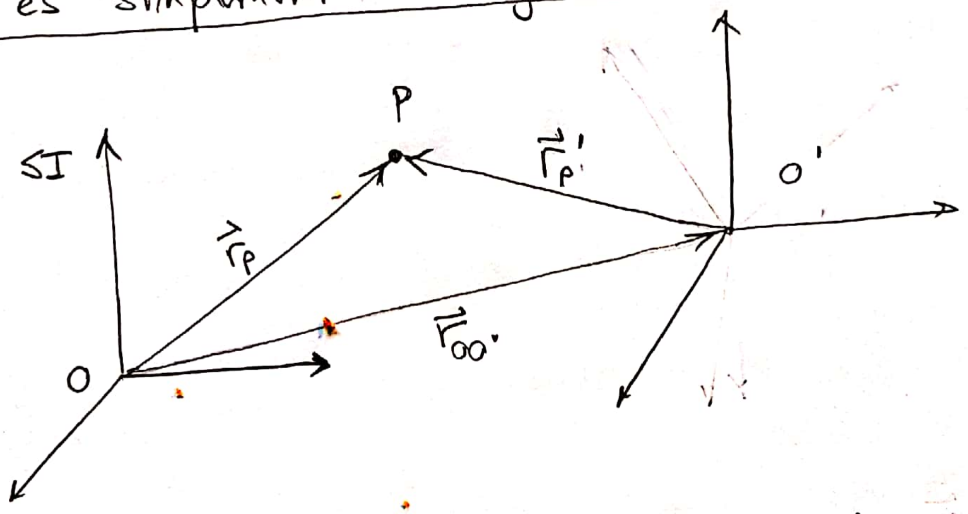
Sistemas no inerciales

- No en todos los sistemas de referencia valen las leyes de Newton. Aquellos en los que valen se llaman "sistemas inerciales" (SI) y aquellos en los que no "sistemas no inerciales" (SNI).

- Para hacer mediciones en un laboratorio, un sistema de referencia fijo a la Tierra es en gran aproximación un SI.

- Dado un SI, todo otro sistema que se mueva relativamente a este con MRU es también inercial.

La idea es simplemente la siguiente:



$$\vec{r}_{oo'} = \vec{r}_p - \vec{r}_p' \quad , \quad \underbrace{\dot{\vec{r}}_{oo'} = \dot{\vec{r}}_p - \dot{\vec{r}}_p'}_{\text{Ley de Galileo de transf. de velocidades.}} \quad , \quad \ddot{\vec{r}}_{oo'} = \ddot{\vec{r}}_p - \ddot{\vec{r}}_p'$$

(F)

Como O es un SI: vale Newton!

$$\boxed{\vec{F} = m\,\ddot{\vec{r}}_p} \quad ✓$$

Que leyes de la física usa O'?

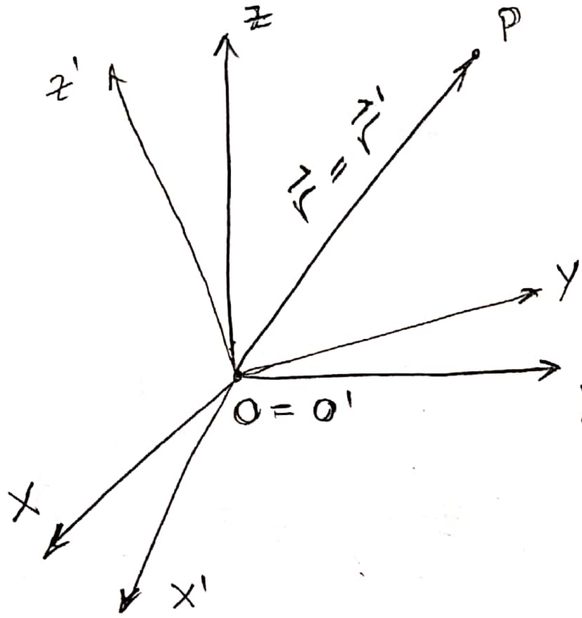
$$\vec{F} = m\left(\ddot{\vec{r}}_p\,' + \ddot{\vec{r}}_{OO'}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{F} - \underbrace{m\,\ddot{\vec{r}}_{OO'}} = m\,\ddot{\vec{r}}_p\,'}.$$

→ si O' fuere un SI, este término no estaría. En O' juega el rol de "fuerza", pero <u>no</u> es una fuerza de interacción es un <u>efecto</u> de la aceleración de O' respecto de un SI.

Se llama "Fuerza de inercia".

<u>Comentario</u>: En los problemas en las que estudio la órbita de una masa alrededor de la tierra, un sistema de referencia fijo a la tierra con origen en su centro es un buen SI <u>solo si</u> puedo despreciar los efectos de la aceleración que genera la masa m sobre la tierra, i.e. $M_T \gg m$.

Sistemas de referencia rotantes (SR)



Como $O = O' \Rightarrow \vec r = \vec r'$

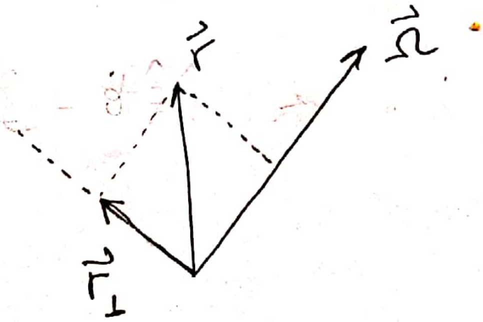
pero O' rota respecto de O.

La rotación esta caracterizada con un vector $\vec\Omega(t)$.

En la teórica vieron que:

$$\begin{cases} \dot{\vec r}' = \dot{\vec r} - \vec\Omega \times \vec r' \\ \ddot{\vec r}' = \ddot{\vec r} + \overbrace{\vec r' \times \dot{\vec\Omega}}^{\text{aceleración de arrastre.}} + \underbrace{2\,\dot{\vec r}' \times \vec\Omega}_{\text{aceleración de coriolis}} + \overbrace{\Omega^2 \cdot \vec r_\perp'}^{\text{aceleración centrífuga.}} \end{cases}$$

Donde $\vec r_\perp' = \vec r' - (\vec r' \cdot \hat\Omega)\hat\Omega$ es la componente de $\vec r'$ perpendicular a $\vec\Omega$.

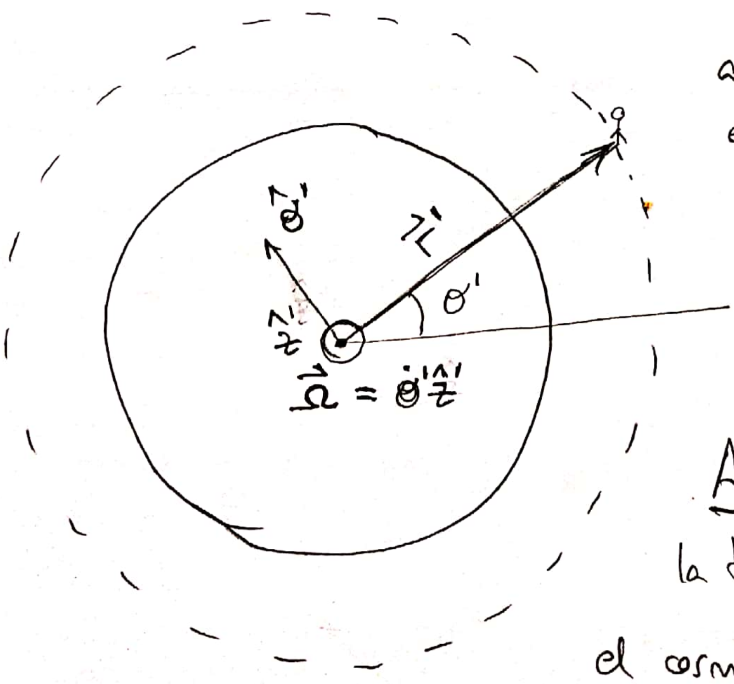


En O' tengo 3 fuerzas de inercia:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}_{\text{interacción}} + \vec{f}^{\,*}_{\gamma} + \vec{f}^{\,*}_{c} + \vec{f}^{\,*}_{cf}$$

$$\begin{cases} \vec{f}^{\,*}_{\gamma} = m\vec{r}\,' \times \dot{\vec{\Omega}} \\ \vec{f}^{\,*}_{c} = 2m\,\dot{\vec{r}}' \times \vec{\Omega} \\ \vec{f}^{\,*}_{cf} = m\,\Omega^2\,\vec{r}\,'_{\perp} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Problema 10 revisited.}}$



Elijo al sistema primado como un sistema rotante que acompaña al cosmonauta (Lo que giro ahora es la tierra!)

$$\vec{r}\,' = r'\,\hat{r}'$$

No depende del tiempo.

Antes teníamos un sistema fijo a la tierra (y usamos coord. polares) y el cosmonauta orbitaba.

Ahora, en el sistema primado, el cosmonauta está quieto y la tierra gira.

$$m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{r}'\hat{r}' = \vec{F}_{grav} + \vec{f}^*_{\gamma} + \vec{f}^*_{c} + \vec{f}^*_{cf}.$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{grav} = -G_N \dfrac{mM_T}{r'^2}\hat{r}' \\ \vec{f}^*_{\gamma} = m\vec{r}' \times \dot{\vec{\Omega}} = m r'\ddot{\theta}'\, \hat{r}' \times \hat{z}' = -mr'\ddot{\theta}'\hat{\theta}' \\ \vec{f}^*_{c} = 2m\dot{\vec{r}}' \times \vec{\Omega} = 2m\dot{r}'\dot{\theta}'\, \hat{r}' \times \hat{z}' = -2m\dot{r}'\dot{\theta}'\hat{\theta}' \\ \vec{f}^*_{cf} = m\Omega^2 \vec{r}'_{\perp} = m\dot{\theta}'^2\vec{r}' = m\dot{\theta}'^2 r'\hat{r}' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{r}'\hat{r}' = -G_N\frac{mM_T}{r'^2}\hat{r}' - mr'\ddot{\theta}'\hat{\theta}' - 2m\dot{r}'\dot{\theta}'\hat{\theta}' + m\dot{\theta}'^2 r'\hat{r}'}$$

(Misma ec. vectorial que antes).

$$\Rightarrow \hat{r}'] \quad m(\ddot{r}' - r'\dot{\theta}'^2) = -G_N\frac{mM_T}{r'^2}$$

$$\hat{\theta}'] \quad m(r'\ddot{\theta}' + 2\dot{r}'\dot{\theta}') = 0.$$

La resolución del problema sigue como antes.