Clase 30/4

Ⓐ

Leyes de conservación : Momento lineal.

Tengo un sistema de N partículas con masas m_i en $\vec{r}_i$

sobre las que actúan
- fuerzas externas al sistema $\vec{F}_i^{(e)}$
- fuerzas internas entre las masas $\vec{F}_{ij}$.

Defino Centro de Masas.
- Masa total del sistema $M = \sum_i m_i$
- Posición del centro de masas $\vec{R} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$

$$\boxed{\text{Si } \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{(e)}}_{\text{Resultante de fzas externas}} = 0 \Rightarrow \text{El momento lineal del sistema } \vec{P} = M\dot{\vec{R}} \text{ se conserva } (\dot{\vec{P}} = 0)}$$

El centro de masas $\vec{R}$ es un punto ficticio que representa la posición "promedio" del sistema. Se mueve como si la resultante de fuerzas externas estuviera aplicada a una masa M concentrada en su posición:

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i^{(e)} = M\ddot{\vec{R}}}$$

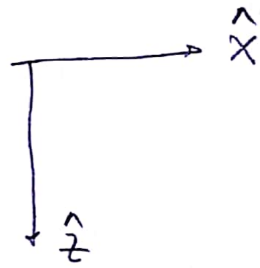
(B)

- El valor del momento lineal $\vec{P}$ depende del sistema de referencia, pero el hecho de que se conserva <u>No</u>

- Alcanza con que una componente de $\vec{F}^{(e)}$ se anule $\vec{k}\cdot\vec{F}^{(e)}$ para que se conserve una componente del momento $\vec{k}\cdot\vec{P} = \text{cte}.$

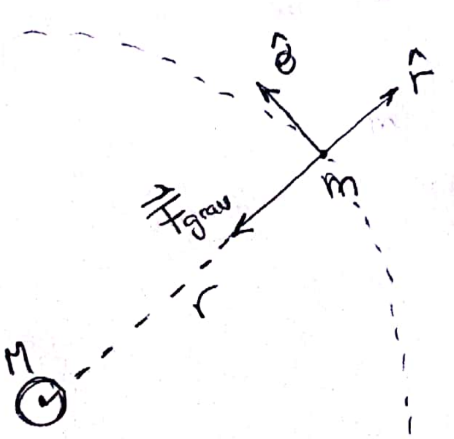
<u>Ejemplo:</u> $\downarrow\vec{g}$ m

$$\vec{F}_{peso} = mg\hat{z}$$



Como $\vec{F}_{peso}\cdot\hat{x} = 0 \Rightarrow$ El momento en la dirección $\hat{x}$ se conserva: $m\dot{x} = \text{cte}$

<u>Ojo:</u> si el versor que determina la dirección es móvil, lo anterior <u>no</u> vale. <u>Ejemplo:</u> polares $\hat{k} = \hat{\theta}$:



$$\vec{F}_{grav}\cdot\hat{\theta} = 0.$$

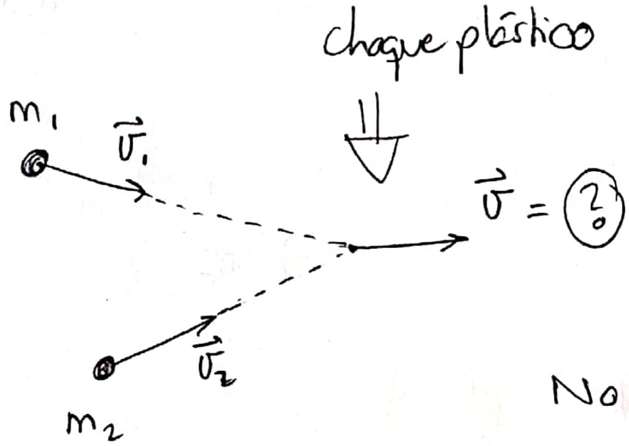
Newton: $\vec{F}_{grav} = \dfrac{\partial\vec{p}}{\partial t}$

$$\vec{F}_{grav}\cdot\hat{\theta} = \underbrace{\frac{\partial\vec{p}}{\partial t}\,\hat{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial(\vec{p}\cdot\hat{\theta})}{\partial t} - \underbrace{\vec{p}\cdot\dot{\hat{\theta}}}_{\text{típicamente } \neq 0}$$

Ejemplos:

1



$$\vec{P}_{inicial} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\vec{P}_{final} = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

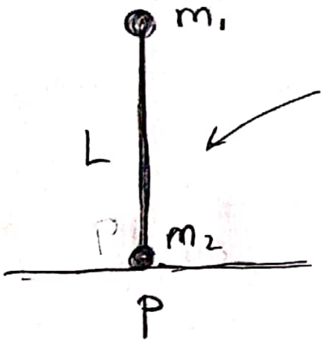
No hay fuerzas externos

$$\vec{F}^{(e)} = 0 \Rightarrow \vec{P} \text{ se conserva}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}}$$

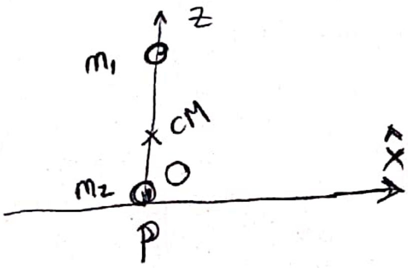
2



En equilibrio inestable.

$\downarrow \vec{g}$

¿Cuando caiga, a qué distancia de P queda cada bola?



El piso no tiene rozamiento

$$\Rightarrow \vec{F}^{(e)} \cdot \hat{x} = 0 \Rightarrow \vec{P} \cdot \hat{x} \text{ se conserve.}$$

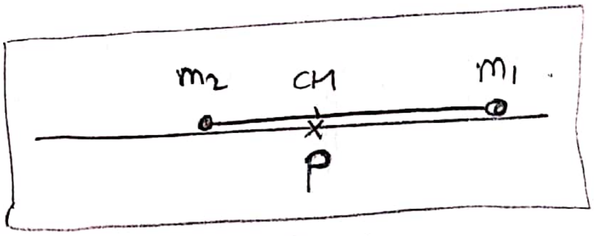
$$\vec{P}_{inicial} \cdot \hat{x} = 0 \rightarrow \text{El CM no se mueve en } \hat{x}.$$

$$\vec{R}_{inicial} = \frac{m_1 \cdot L}{m_1 + m_2}\hat{z}$$

D

$\Rightarrow \vec{R} \cdot \hat{x} = 0$ en todo momento (El CM se desplaza verticalmente hasta el piso).

$\Rightarrow \vec{R}_{final} \cdot \hat{x} = 0 \Rightarrow$

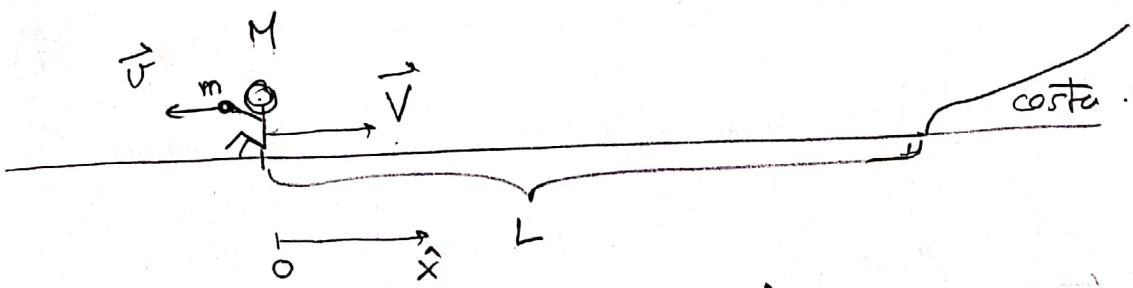


situación final.

$$\boxed{\text{En el estado final:} \quad \Rightarrow \vec{r}_2 = -\frac{m_1 L}{m_1+m_2}\hat{x} \quad , \quad \vec{r}_1 = \frac{m_2 L}{m_1+m_2}\hat{x}}$$

3 Un hombre de masa M está en reposo sobre un lago helado (rozamiento nulo). Para salir lanza una piedra de m a velocidad v. La costa está a distancia L

¿Cuánto tarda en salir?



$\vec{F}^{(e)} = 0 \Rightarrow \vec{P}$ se conserva $\rightarrow$ $\vec{P}_{inicial} = 0$

$\parallel$

$\vec{P}_{posterior} = m\vec{v} + M\vec{V} \overset{!}{=} 0$

$$\boxed{T = \frac{L}{|\vec{V}|} = \frac{ML}{m|\vec{v}|}}$$

Momento Angular

- Defino "torque de fuerzas externas" como

$$\vec{N}^{(e)} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}$$

- Defino el momento angular como

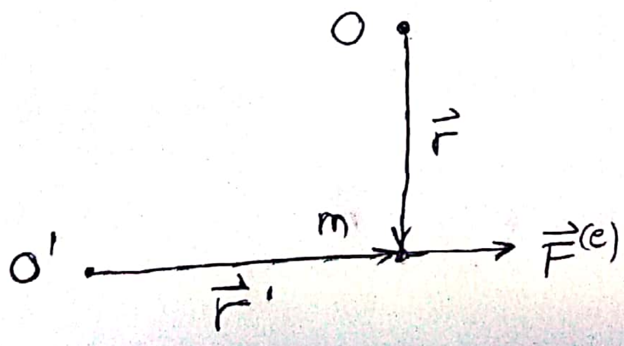
$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad , \quad \vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$\boxed{\text{Si} \quad \vec{N}^{(e)} = 0 \Rightarrow \vec{L} \text{ se conserva } (\dot{\vec{L}} = 0)}$$

- Tanto $\vec{L}$ como $\vec{N}^{(e)}$ están referidos al origen de un dado sistema de referencia (porque dependen de $\vec{r}$).

⇒ El análisis de conservación de momento angular depende del punto respecto del cual se define.

Ej:



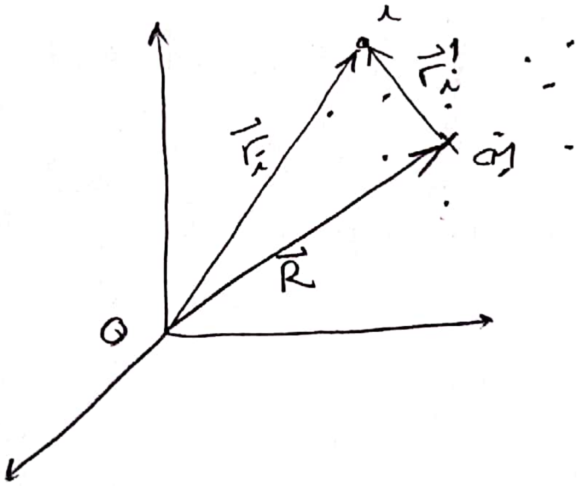
$$\vec{N}_O^{(e)} = \vec{r} \times \vec{F}^{(e)} \neq 0$$

$$\vec{N}_{O'}^{(e)} = \vec{r}\,' \times \vec{F}^{(e)} = 0$$

$\Rightarrow \vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}$ no se conserva

$\vec{L}_{O'} = \vec{r}\,' \times \vec{p}\,'$ se conserva

Momento angular respecto del centro de masas



$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{P}_i$$

$$\vec{L}_{CM} = \sum_i \vec{r}_i{}' \times \vec{P}_i{}'$$

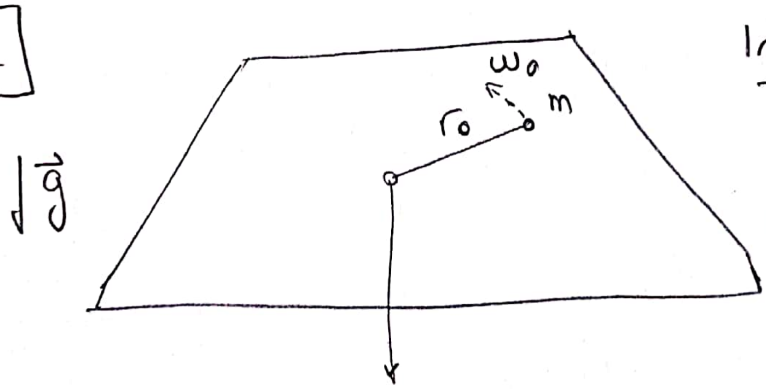
Vale: $\vec{L}_O = \underbrace{\vec{R} \times \vec{P}}_{} + \underbrace{\vec{L}_{CM}}_{}$

"Momento angular del centro de masa"

momento angular respecto del centro de masa.

Ejemplos:

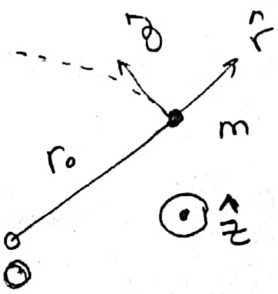
1



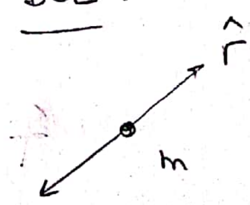
Inicialmente: movimiento circular de radio r_0 con vel. angular ω_0.

¿Si tiro del hilo para reducir el radio a r, cual será la velocidad angular ω?

Visto desde arriba:



DCL:



$\vec{T} = -T\hat{r}$

Torque de fuerzas externas: $\vec{N}_0^{(e)} = \vec{r} \times \vec{F}^{(e)} = r\hat{r} \times (-T\hat{r}) = 0$
(desde el punto O)

$\Rightarrow \vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p}$ se conserva. $\Rightarrow \vec{L}_0^{(inicial)} = \vec{L}_0^{(final)}$

$$\vec{L}_0^{(inicial)} = r_0 \hat{r} \times (m \cdot r_0 \omega_0 \hat{\theta}) = m r_0^2 \omega_0 \hat{z}$$

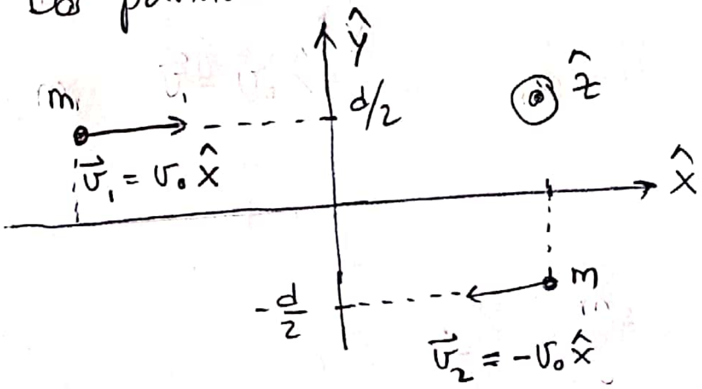
$$\vec{L}_0^{(final)} = r \hat{r} \times (m r \omega \hat{\theta}) = m r^2 \omega \hat{z}$$

$\Rightarrow$ Por conservación del momento angular:

$$m r_0^2 \omega_0 \hat{z} = m r^2 \omega \hat{z} \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 \left(\frac{r_0^2}{r^2}\right)}$$

---

2 Dos patinadores sobre hielo: se acercan entre si:

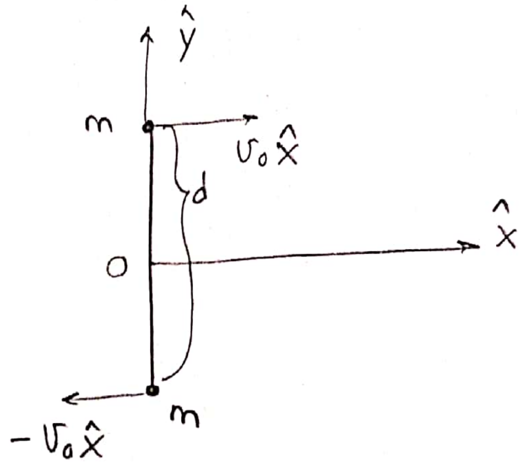


Un patinador tiene una varilla (sin masa) de longitud d, que toma el otro cuando se cruzan.

¿Cual será la velocidad angular de giro si reducen su distancia a d'?

Inicialmente:

(H)



$$\vec{L}_o^{(inicial)} = \frac{d}{2}\hat{y}\times(m v_o\hat{x}) + \left(-\frac{d}{2}\hat{y}\right)\times(-m v_o\hat{x})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_o^{(inicial)} = -d m v_o\hat{z} = -\frac{d^2 m \omega_o}{2}\hat{z}}$$

$$\omega_o = \frac{2v_o}{d}$$

Resultante de $\vec{F}^{(e)} = 0$ (gravedad + normal)

$\Rightarrow$ Torque de fuerzas externas $= 0 \Rightarrow \vec{L}_o$ se conserva.

Cuando se reduce la longitud de la barra $d \to d'$

$$\Rightarrow \vec{L}_o^{(final)} = -\frac{d'^2 m \omega_o'}{2}\hat{z} \overset{!}{=} \vec{L}_o^{(inicial)}$$

$\Rightarrow$ velocidad angular final $\boxed{\omega_o' = \frac{d^2}{d'^2}\omega_o}$

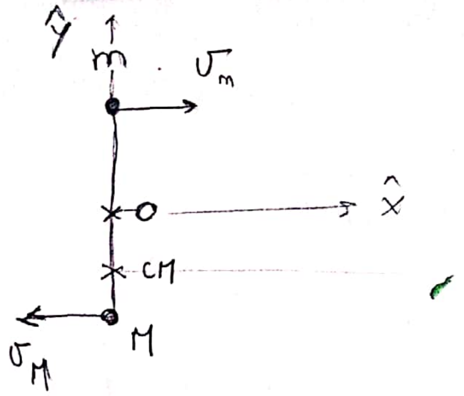
Ver video: https://youtu.be/M6PuotlmSh4

Muestra este efecto

Ejercicio: Repetir suponiendo que las masas y velocidades son distintas. Como cambia la velocidad angular con respecto al CM?

I

Situación inicial:



Desde O:

$$\vec r_m = \frac{d}{2}\hat y + v_m t\,\hat x$$

$$\vec r_M = -\frac{d}{2}\hat y - v_M t\,\hat x$$

$$\vec R = \frac{m\vec r_m + M\vec r_M}{m+M} = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)\frac{d}{2}\hat y + \left(\frac{m v_m - M v_M}{m+M}\right) t\,\hat x$$

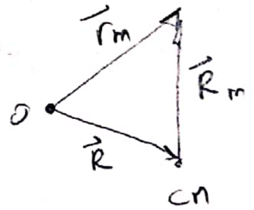
$$\vec V = \frac{m v_m - M v_M}{m+M}\,\hat x$$

posición de m desde CM

Desde CM:

$$\vec r_m = \vec R_m + \vec R$$

$$\vec r_M = \vec R_M + \vec R$$



$$\Rightarrow \vec R_m = \frac{d}{2}\hat y + v_m t\,\hat x - \left(\frac{m-M}{m+M}\right)\frac{d}{2}\hat y - \left(\frac{m v_m - M v_M}{m+M}\right) t\,\hat x$$

$$= \frac{d}{2}\left(\frac{\cancel{m}+M-\cancel{m}+M}{m+M}\right)\hat y + \left(\frac{m v_m + M v_m - m v_m + M v_M}{m+M}\right) t\,\hat x$$

$$= \frac{dM}{m+M}\hat y + \left[\frac{M(v_m + v_M)}{m+M}\right] t\,\hat x$$

$$\vec R_M = -\frac{d}{2}\hat y - v_M t\,\hat x - \left(\frac{m-M}{m+M}\right)\frac{d}{2}\hat y - \left(\frac{m v_m - M v_M}{m+M}\right) t\,\hat x$$

$$= \frac{d}{2}\left(\frac{-m-\cancel{M}+m+\cancel{M}}{m+M}\right) + \left(\frac{-m v_M - \cancel{M v_M} - m v_m + \cancel{M v_M}}{m+M}\right) t\,\hat x$$

$$= \frac{-dm}{(m+M)}\hat y - \left[\frac{m(v_m + v_M)}{m+M}\right] t\,\hat x$$

J

El momento angular desde el CM:

$$\vec{L}_{CM}^{(i)} = \vec{R}_m \times m \dot{\vec{R}}_m + \vec{R}_M \times M \dot{\vec{R}}_M$$

$$= m\left[\frac{dM}{m+M}\hat{y} \times \frac{M(v_m+v_M)}{m+M} t\,\hat{x}\right]$$

$$+ M\left(\frac{-dm}{m+M}\hat{y} \times \left(\frac{-m(v_m+v_M)}{m+M}\right) t\,\hat{x}\right]$$

$$= -\frac{mM^2 d}{(m+M)^2}(v_m+v_M)\hat{z} - \frac{Mm^2 d}{(m+M)^2}(v_m+v_M)\hat{z}$$

$$= -\frac{mM}{m+M} d(v_m+v_M)\hat{z} \longrightarrow$$ si $m = M$ y $v_m = v_M$ recupero el resultado anterior.

La velocidad angular inicial es $\omega_0 = \dfrac{v_m+v_M}{d}$

$$\Rightarrow \vec{L}_{CM}^{(i)} = -\frac{mM}{m+M} d^2 \omega_0 \hat{z}$$

x conservación del momento angular, $\boxed{\omega_0' = \dfrac{d^2}{d'}\omega_0}$

Es igual que antes!