Ley de Faraday

Clase 06/07

(A)

Guía 5: Entregar ejercicio 6 el 13/06. Resolverlo para valores genéricos de los datos y reemplazar solo en los resultados finales.

Forma diferencial:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

- Si $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \longrightarrow$ Magnetostática. En este caso $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V} \quad \boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

- Si $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} \quad (\text{f.e.m})$$

$$\parallel$$

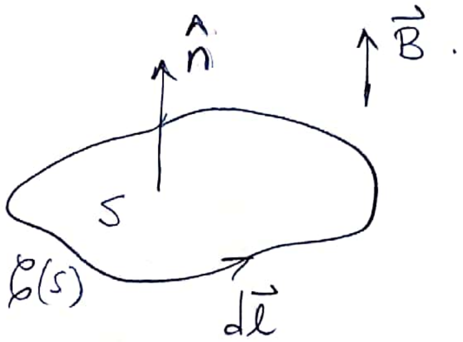
$$\int_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$\equiv \phi$ (flujo magnético)

Variaciones en el flujo magnético que atraviesa una espira de resistencia R, inducen sobre la espira una corriente $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$

(B)

¿En que sentido va la corriente?



$$\oint_{\mathcal{C}(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Si $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} > 0 \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} < 0 \Rightarrow$ El campo eléctrico tiene sentido contrario a $d\vec{l}$

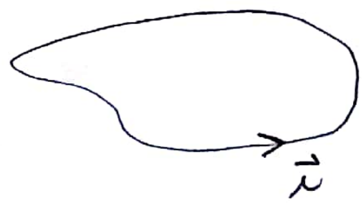
$(\varepsilon < 0)$

$\boxed{\vec{i} \text{ antiparalela a } d\vec{l}}$

Si $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} < 0 \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0 \Rightarrow$ El campo eléctrico tiene mismo sentido que $d\vec{l}$

$(\varepsilon > 0)$

$\boxed{\vec{i} \text{ paralela a } d\vec{l}}$

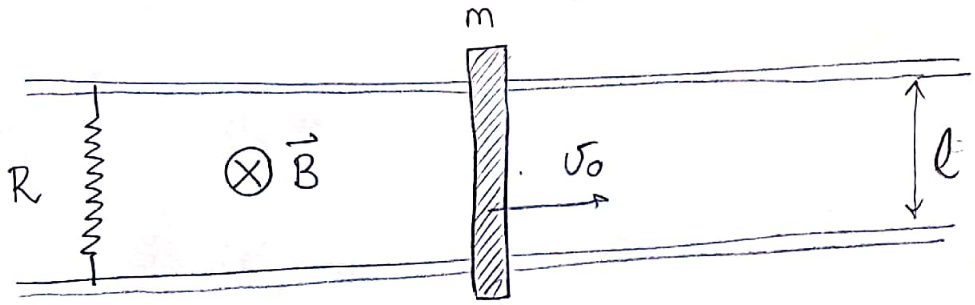


En ambos casos se induce una corriente cuyo flujo propio se opone al la variación de flujo externo

(Ley de Lenz)

Ejemplo ©

Una barra metálica de masa m se desliza sin rozamiento sobre dos rieles conductores largos y paralelos, separados por una distancia ℓ. Se conecta una resistencia R entre los extremos de los rieles. Existe un campo magnético perpendicular al plano de los rieles. uniforme.

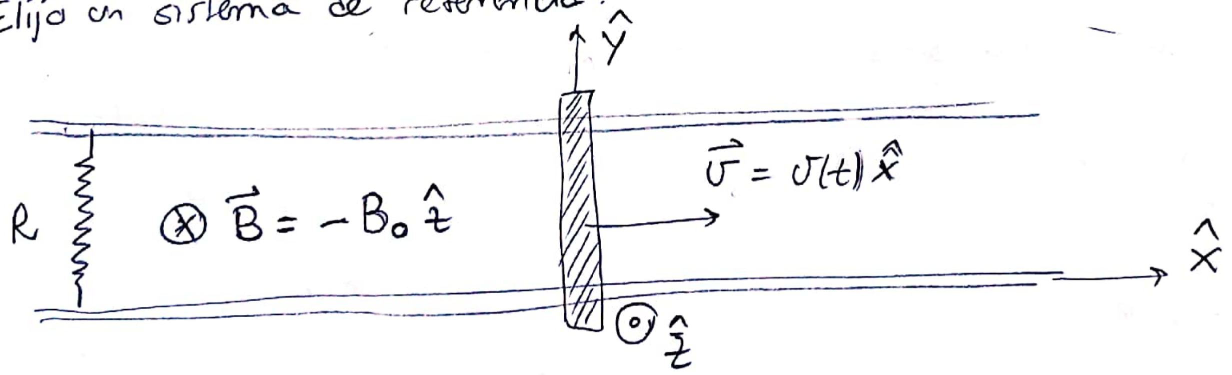


En $t=0$ la barra se mueve con velocidad v_0.

¿Qué sucede a continuación? ¿Se para la barra?

¿Cuándo y donde? ¿Qué ocurre con la conservación de la energía?

Elijo un sistema de referencia.



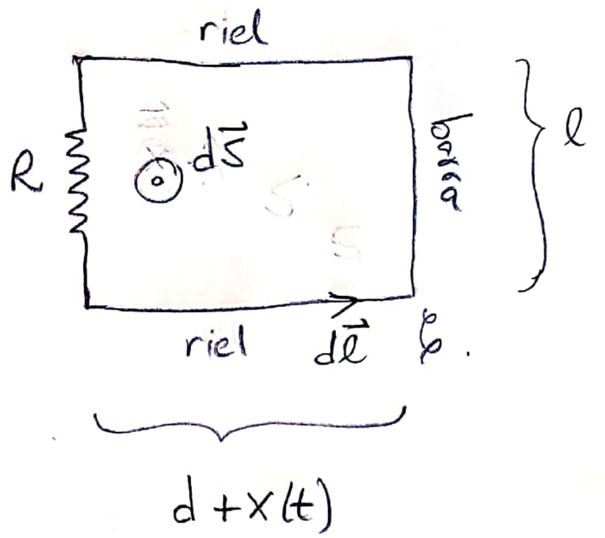
Condiciones iniciales:

$$x(t=0) = 0$$

$$v(t=0) = v_0$$

Escaneado con CamScanner

La resistencia ⊕ los rieles ⊕ la barra = espira. (D)



$\otimes \; \vec{B} = -B_0 \hat{z}$

$\odot \; d\vec{S} = dx\, dy\, \hat{z}$

flujo magnético en la espira:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^{\ell} \int_{-d}^{x(t)} (-B_0 \hat{z}) \cdot (dx\, dy\, \hat{z})$$

$$= -B_0 \cdot \underbrace{\ell \left(d + x(t)\right)}_{\text{Area de la espira.}}$$

Fem inducida:

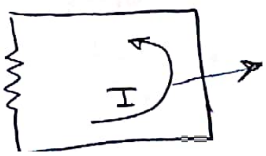
$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = +B_0\, \ell\, \dot{x}(t)} \longrightarrow \text{Inicialmente } \dot{x}(t=0) > 0$$

$\Rightarrow \mathcal{E} > 0$

$\Rightarrow \vec{i}$ es paralelo a $d\vec{\ell}$

La corriente inducida $\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B_0\, \ell}{R}\, \dot{x}(t)}$ tiende a frenar

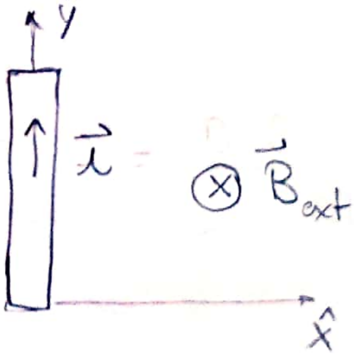
el cambio de flujo:



Induce un campo magnético en $\hat{z}$

Sobre la barra se induce la corriente. $\vec{i} = I\,\hat{y}$ con (E)

$$I = \frac{B_0 l}{R}\,\dot{x}(t)$$



El campo $\vec{B}_{ext}$ ejerce una fuerza sobre la barra:

$$\vec{F} = \int d\vec{I} \times \vec{B} \qquad \text{con} \begin{cases} d\vec{I} = \vec{i}\cdot dl = \dfrac{B_0 l}{R}\,\dot{x}(t)\,dy\,\hat{y} \\ \vec{B} = -B_0\,\hat{z}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \int_0^l \left(\frac{B_0 l}{R}\,\dot{x}(t)\,dy\ \hat{y}\right)\times\left(-B_0\,\hat{z}\right) = -\frac{B_0^2 l^2}{R}\,\dot{x}(t)\,\hat{x}}$$

Se opone al mov.
La frena.

<u>Newton</u>: $\hat{x})\ \vec{F} = m\ddot{x}\,\hat{x} \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{B_0^2 l^2}{R}\,\dot{x}$

$$v = \dot{x} \Rightarrow \dot{v} = -\frac{B_0^2 l^2}{mR}\,v \equiv -\frac{1}{\tau}\cdot v$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 \exp\left[-t/\tau\right]} \quad \text{con} \quad \tau = \frac{mR}{B_0^2 l^2}$$

La velocidad se reduce asintóticamente a cero.

Integro para obtener $x(t)$:

(F)

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \Rightarrow \boxed{x(t) = v_0 \cdot \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

Nunca llega, pero tiende a $t \gg \tau$ a

$$\boxed{X_{final} = v_0 \tau = \frac{v_0 m R}{B_0^2 \ell^2}}$$

¿Qué pasó con la energía cinética de la barra?

$$\boxed{T = \frac{m}{2} v_0^2} \longrightarrow \boxed{\text{Energía inicial}}$$

La disipa la resistencia!

$\boxed{W = \text{Energía disipada por } R}$

$$P_R = I \cdot \mathcal{E} = \left(\frac{B_0 \ell}{R} \cdot \dot{x}\right) \cdot \left(B_0 \ell \dot{x}\right) = \frac{B_0^2 \ell^2 \dot{x}^2(t)}{R} = \frac{m \dot{x}^2(t)}{\tau} = \frac{dW}{dt}$$

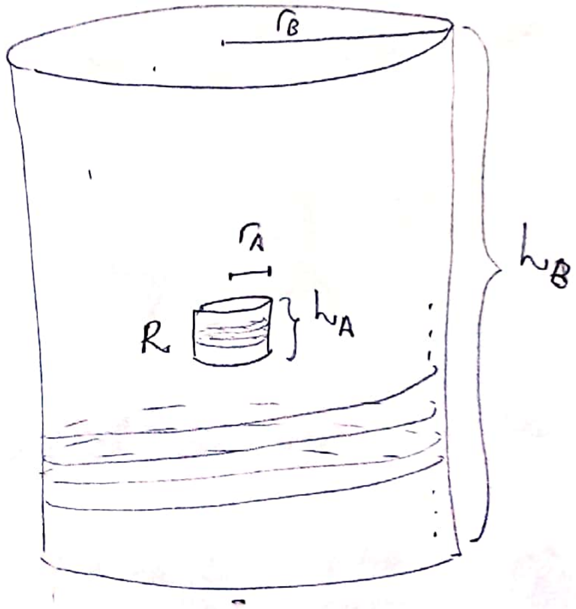
$$W = \int_0^\infty P_R(t)\, dt = \frac{m}{\tau} \int_0^\infty v_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{m v_0^2}{\tau} \left[-\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{m}{2} v_0^2} \longrightarrow \boxed{\text{Toda la energía inicial es disipada por la resistencia}}$$

Ejemplo

Considere un solenoide radio r_B y altura h_B con n_B vueltas por unidad de longitud, por el que circula una corriente I_B.

En su centro hay otro solenoide con (r_A, h_A, n_A, I_A) tal que $\boxed{r_A \ll r_B}$ y $\boxed{h_A \ll h_B}$



Si la resistencia del solenoide interior vale R, halle I_A inducida como función de I_B.

Como $\boxed{r_A \ll r_B}$ $\longrightarrow$ puedo aproximar el campo magnético del sol. B por su valor en el eje:

$$\vec{B}_B(z) = \frac{\mu_0 I_B n_B}{2} \left\{ \frac{\frac{h_B}{2} - z}{\sqrt{\left(z - \frac{h_B}{2}\right)^2 + r_B^2}} + \frac{\frac{h_B}{2} + z}{\sqrt{\left(z + \frac{h_B}{2}\right)^2 + r_B^2}} \right\} \hat{z}$$

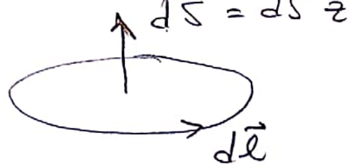
(Práctica 25/6, pag. 4)

Como $\boxed{h_A \ll h_B}$ → Puedo aproximar el campo en $z=0$:

$$\boxed{\vec{B}_B = \frac{\mu_0 I_B n_B h_B}{\sqrt{\left(\frac{h_B}{2}\right)^2 + r_B^2}}\hat{z}}$$ → Campo aproximado en la región donde se ubica el solenoide A.

El solenoide A tiene $N_A = n_A \cdot h_A$ espiras de área πr_A^2.

El flujo magnético sobre cada espira es



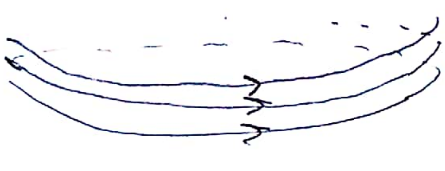
$$\phi' = \int \vec{B}_B \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I_B n_B h_B}{\sqrt{\left(\frac{h_B}{2}\right)^2 + r_B^2}} \cdot \pi r_A^2 .$$

El flujo total sobre el solenoide interior completo es

$$\phi = N_A \phi' = \frac{\mu_0 I_B n_B h_B n_A h_A}{\sqrt{\left(\frac{h_B}{2}\right)^2 + r_B^2}} \pi r_A^2$$

La fem inducida sobre el solenoide interior es:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\mu_0 n_B h_B n_A h_A \pi r_A^2}{\sqrt{\left(\frac{h_B}{2}\right)^2 + r_B^2}} \dot{I}_B$$

Si $\dot{I}_B > 0$  $\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} > 0 \Rightarrow$ sol interior 

Busco cancelar la variación de flujo generado por el solenoide ext.

$$I_A = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow \boxed{I_A = -\frac{\mu_0 \cdot N_B N_A \cdot \pi r_A^2}{R\sqrt{\left(\frac{h_B}{2}\right)^2 + r_B^2}} \cdot \dot{I}_B}$$

I