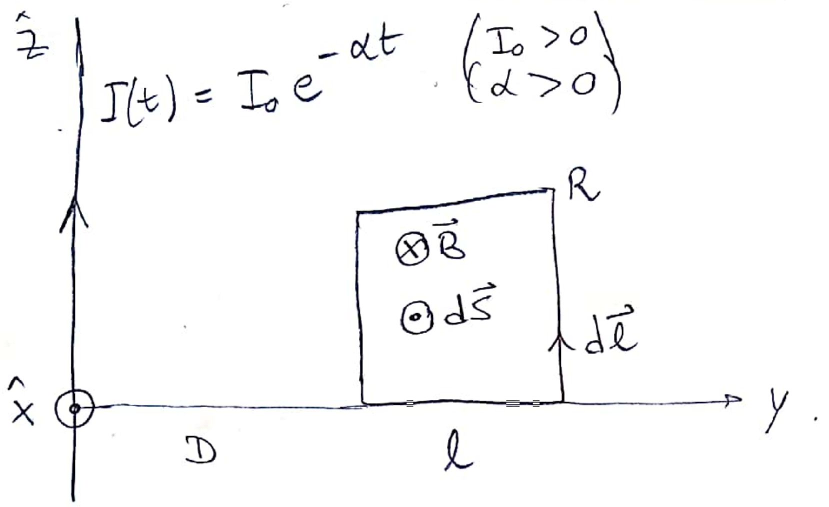
Ley de Faraday — Clase 13/07 — 2^{da} Parcial: 30/07, Recup.: 06/08 — (A)

Problema 8

$$I(t) = I_0 e^{-\alpha t} \quad \begin{pmatrix} I_0 > 0 \\ \alpha > 0 \end{pmatrix}$$



Calcular la corriente inducida (y despreciar el flujo propio)

---

x Ampère (Clase 29/06, pág. D)

$$\vec{B}(y) = -\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi y}\hat{x} \quad \text{(sobre la espira)}$$

(sino, $y \to r$, $\hat{x} \to -\hat{\varphi}$).

$$d\vec{S} = dy\, dz\, \hat{x}$$

$$\Rightarrow \phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_D^{D+\ell}\int_0^{\ell}\left(-\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi y}\hat{x}\right)\cdot\left(dy\, dz\, \hat{x}\right)$$

$$= -\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi}\int_0^{\ell} dx \int_D^{D+\ell}\frac{dy}{y} = -\frac{\mu_0 I(t)\,\ell}{2\pi}\ln\left(\frac{D+\ell}{D}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\mu_0 \dot{I}(t)\ell}{2\pi}\ln\left(\frac{D+\ell}{D}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{i = \frac{\mu_0 \dot{I}(t)\ell}{2\pi R}\ln\left(\frac{D+\ell}{D}\right) = -\frac{\mu_0 \ell \alpha}{2\pi}\ln\left(\frac{D+\ell}{D}\right)\cdot\frac{I(t)}{R} < 0}$$

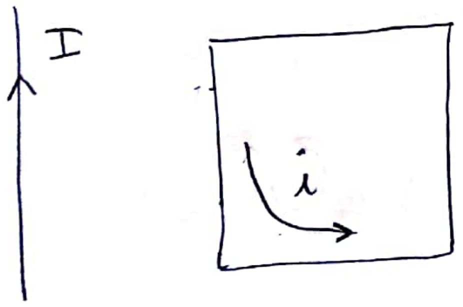
¿En qué sentido va la corriente? (B)

La corriente sobre el hilo disminuye $I(t) = I_0 e^{-\alpha t}$ $\Rightarrow$ El flujo de $\vec{B}$ $\otimes$ disminuye.

$\Rightarrow$ x Ley de Lenz, la corriente inducida en la espira debe generar un campo magnético propio, cuyo flujo magnético se oponga a la disminución del flujo magnético externo.

$\Rightarrow$ la corriente debe generar un campo magnético $\otimes$ $\vec{B}_{ind}$.

$\Rightarrow$ La corriente física debe ir en sentido horario



porque $i < 0$.

También se puede pensar x Stokes:

$$\int_{S(\mathcal{C})} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\underbrace{\int \underbrace{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\odot} \cdot d\vec{S}}_{\text{positivo}} < 0$$

$\Rightarrow$ Como $d\vec{\ell}$ va en sentido antihorario, $\vec{E}$ debe ir en sentido horario $\vec{E}$

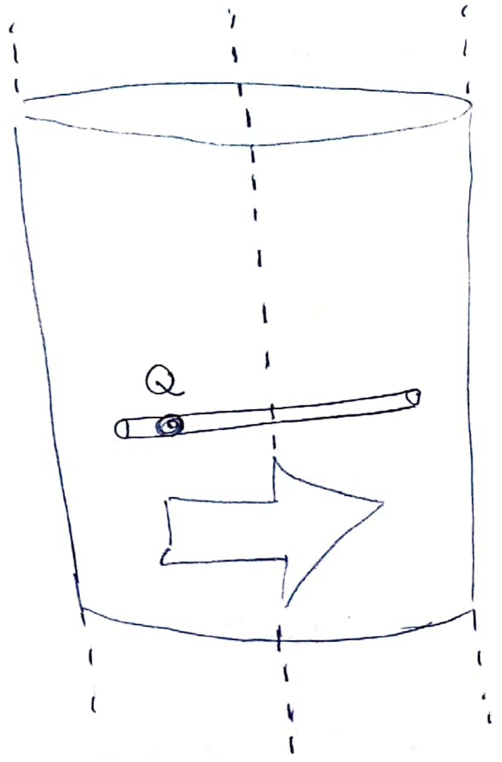
$d\vec{\ell}$

$\Rightarrow$ La corriente debe ir en sentido horario. ✓

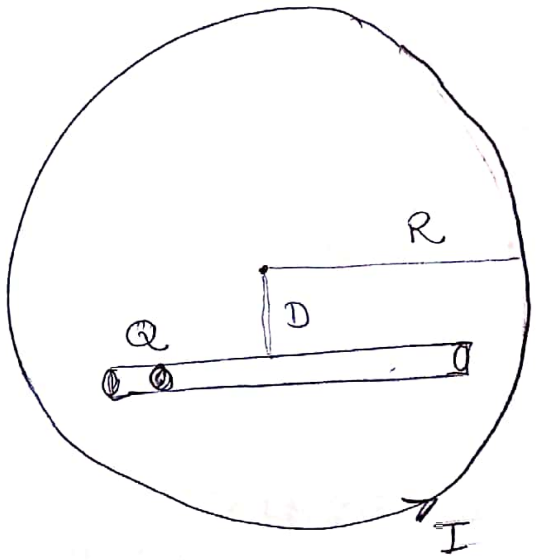
C

Problema 12

solenoide ∞.



Desde arriba



$$\vec{g} = n\, I(t)\, \hat{\varphi}$$

$$I(t) = I_0 + \alpha t$$

a) Encontrar $\vec{E}$ en el interior

b) Escribir la ecuación de movimiento para Q y resolverla.

Ecs. de Maxwell: En el interior del solenoide, producido por el solenoide:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Clase 29/06, pag. I $\rightarrow$ $\vec{B}_{adentro} = \mu_0 g \hat{z} = \mu_0 n (I_0 + \alpha t)\hat{z}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu_0 n \alpha \hat{z} \longrightarrow$$

Es como "magnetostática" para $\vec{E}$!
Uso Stokes para "emular" Ampère
$\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$, $-\mu_0 n \alpha \hat{z} \leftrightarrow \mu_0 \vec{J}$

D

En magnetostática, este problema es análogo al caso de una corriente cilíndrica uniforme en volumen en la dirección $\hat{z}$.

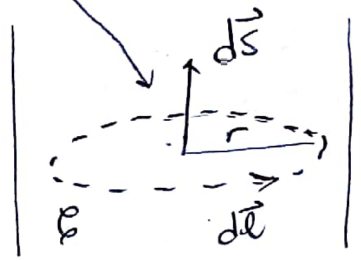
En ese caso estudiamos las simetrías: $\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\,\hat{\varphi}$

(Ver clase 29/06)

Aquí entonces debe suceder $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{\varphi}$

Integro el rotor:

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S} = \int_S (-\mu_0 n \alpha \hat{z})\cdot\underbrace{(dA\,\hat{z})}_{d\vec{S}} = -\mu_0 n \alpha \pi r^2$$



x Stokes:

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{C}(r)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} (E(r)\,\hat{\varphi})\cdot\overbrace{(r\,d\varphi\,\hat{\varphi})}^{d\vec{l}}$$

$$= 2\pi r\, E(r)$$

Igualo: $E(r) = -\frac{\mu_0 n \alpha}{2}\cdot r \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = -\frac{\mu_0 n \alpha r}{2}\,\hat{\varphi}}$

En el interior.

E

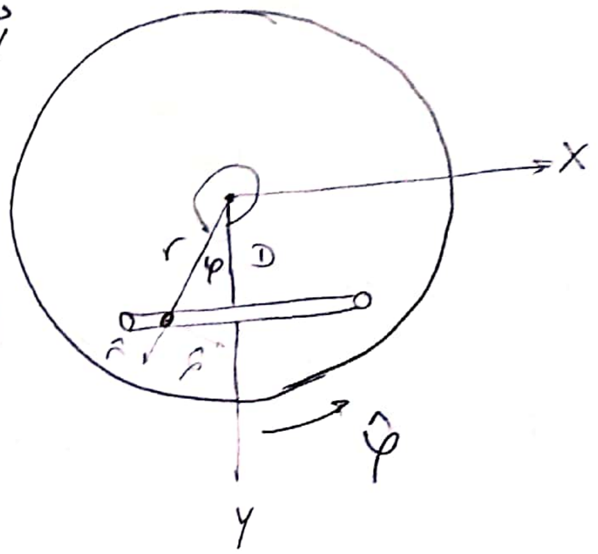
Para verificar; en cilíndricas:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right)\hat{\varphi}$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}(r E_\varphi)}_{\text{único término que sobrevive}} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi}\right]\hat{z}$$

b) $\vec{F} = m\vec{a} = Q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) + \vec{V}$



$\vec{v} = v\hat{y} \longrightarrow$ vínculo.

Reescribo $\vec{E}$ en cartesianas:

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 n \alpha}{2} r(\cos\varphi\cdot\hat{x} - \operatorname{sen}\varphi\,\hat{y})$$

$$= -\frac{\mu_0 n \alpha}{2}(D\hat{x} - x\hat{y})$$

$$\vec{B} = \mu_0 n (I_0 + \alpha t)\hat{z}$$

$$\Rightarrow \hat{x}]\ m\ddot{x} = -\frac{\mu_0 n \alpha Q D}{2} \longrightarrow \boxed{\text{Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.}}$$

$$\hat{y}]\ m\ddot{y} \underset{\text{vínculo}}{=} 0 = \frac{\mu_0 n \alpha Q}{2}x + \mu_0 n (I_0 + \alpha t) Q\dot{x} + V$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V} = -\mu_0 n Q\left(\frac{\alpha}{2}x + (I_0 + \alpha t)\dot{x}\right)\hat{y}}$$