Clase 18/05

(A)

# Simetrías y leyes de conservación

Idea:

| | | |
|---|---|---|
| Simetrías continuas de $\mathcal{L}$ | $\Longleftrightarrow$ | cantidades conservadas |

Simetría de traslación temporal $\longrightarrow$ conservación de la energía.

Simetría de traslación espacial $\longrightarrow$ conservación del momento lineal

simetría de rotación $\longleftrightarrow$ conservación del momento angular.

## Teorema de Noether:

Tengo un Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, y un conjunto de transformaciones:

$$t \to t' = t + \sum_a \epsilon_a \delta^a(q, \dot{q}, t) \qquad (\epsilon_a \text{ es infinitesimal})$$

$$q_i \to q_i' = q_i + \sum_a \epsilon_a K_i^a(q, \dot{q}, t).$$

$$\text{si } \mathcal{L}(q', \dot{q}', t') = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) - \frac{d}{dt}\left(\sum_a \epsilon_a f^a\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_i P_i K_i^a - \mathcal{H} \delta^a + f^a = cte}$$

$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ "momento conjugado a $q_i$", $\mathcal{H} = \sum_i P_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$ "Hamiltoniano".

(B)

**Ejemplo 1**

Partícula libre en 1 dimensión.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

Simetrías: $\boxed{\begin{array}{l} t \to t' = t + \varepsilon_1 \\ x \to x' = x + \varepsilon_2 \end{array}}$ } El Lagrangiano queda invariante $f^1 = f^2 = 0$

Momento conjugado: $\boxed{P_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}}$ → Es el momento lineal.

Hamiltoniano: $\boxed{\mathcal{H} = P_x \dot{x} - \mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2}$ → Es la energía.

¿Qué se conserva? → $\delta^1 = 1,\ \delta^2 = 0,\ K_x^1 = 0,\ u_x^2 = 1.$

⇒ $a = 1)$ $\boxed{\mathcal{H} = cte \quad \text{conservación de la energía}}$

$a = 2)$ $\boxed{P_x = cte \quad \text{conservación del momento.}}$

Lección que vale en general: Si $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de $t$ ⇒ $\mathcal{H}$ se conserva.

Si $q_i$ ser una coordenada cíclica ⇒ $P_i$ se conserva.

↓

(Que no aparece sin derivar en $\mathcal{L}$).

## Ejemplo 2

Partícula libre en 2 dimensiones:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Simetrías:

$$\boxed{\begin{aligned} t &\to t' = t + \varepsilon_1 \\ x &\to x' = x + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 y \\ y &\to y' = y + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 x \end{aligned}}$$

$\mathcal{L}$ queda invariante.

$f^1 = f^2 = f^3 = f^4$

Momentos conjugados:

$$\boxed{\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \\ p_y &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \end{aligned}}$$

momentos lineales.

Hamiltoniano:

$$\boxed{\mathcal{H} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \to \text{Energía.}$$

¿Qué se conserva? $g^1 = K_x^2 = K_y^3 = 1$, $K_x^4 = y$, $K_y^4 = -x$

$a = 1)$ $\mathcal{H} = cte$ Energía.

$a = 2)$ $p_x = cte$ momento lineal en $\hat{x}$

$a = 3)$ $p_y = cte$ momento lineal en $\hat{y}$

$a = 4)$ $y p_x - x p_y$ momento angular

¿Qué pasa si se plantea en polares? $\longrightarrow \mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

## Ejemplo 3



$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(ax + by)$$

$$\begin{cases} P_x = m\dot{x} \\ P_y = m\dot{y} \\ \mathcal{H} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + V(ax+by) \end{cases}$$

Simetrías: 1) Inv. frente a traslaciones temporales:

$$\boxed{\mathcal{H} \text{ se conserva.}}$$

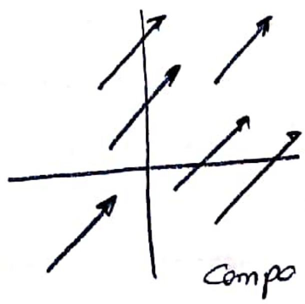
2) $x \rightarrow x + \varepsilon b$

$y \rightarrow y - \varepsilon a$

$$\Rightarrow \boxed{b P_x - a P_y \text{ se conserva.}}$$

Ej: Si $V = -x - y \Rightarrow \vec{F} = \hat{x} + \hat{y}$

se conserva el momento en $\hat{x} - \hat{y}$



Campo de fuerzas.

Ejemplo 4



Partícula en un campo central en 2 dimensiones:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) - V(x^2+y^2)$$

(No hay invariancia frente a traslaciones espaciales)

$P_x = m\dot{x}$

$P_y = m\dot{y}$

$\mathcal{H} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) + V(x^2+y^2)$ — Energía mecánica.

- Invariancia temporal: $\boxed{\mathcal{H} \text{ se conserva}}$

- Simetría de rotación:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En un campo de fza central no hay torque!

Infinitesimalmente: $x \rightarrow x + \varepsilon y$

$y \rightarrow y - \varepsilon x$

$\Rightarrow$ $\boxed{y P_x - x P_y = cte}$ El momento angular se conserva.

---

En polares: $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$

$\theta$ es cíclico $\Rightarrow$ $P_\theta = m r^2 \dot{\theta}$ se conserva

Momento angular.

Es exactamente esto.

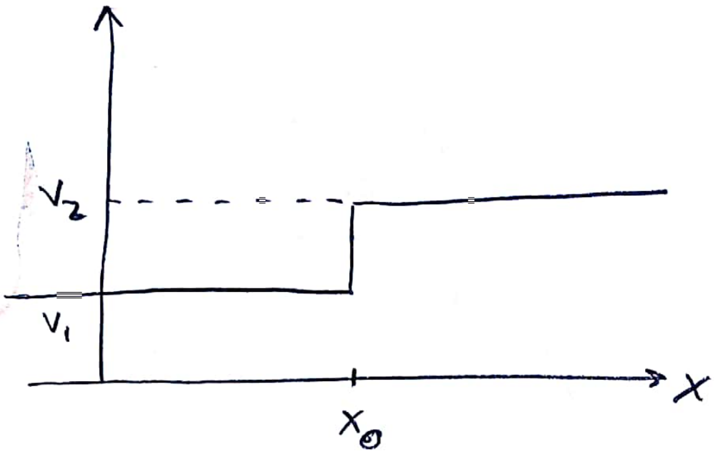
## Ejemplo 5

F

Campo de un semiplano homogéneo:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) - \left(V_2 - V_1\right)\Theta(x-x_0) - V_1$$

$$V(x,y) = V_1 + \left(V_2 - V_1\right)\Theta(x-x_0)$$




Función escalón

$$\Theta(x-x_0) = \begin{cases} 1 & x > x_0 \\ 0 & x \leq x_0 \end{cases}$$

Momentos conjugados: $p_x = m\dot{x}$

$p_y = m\dot{y}$

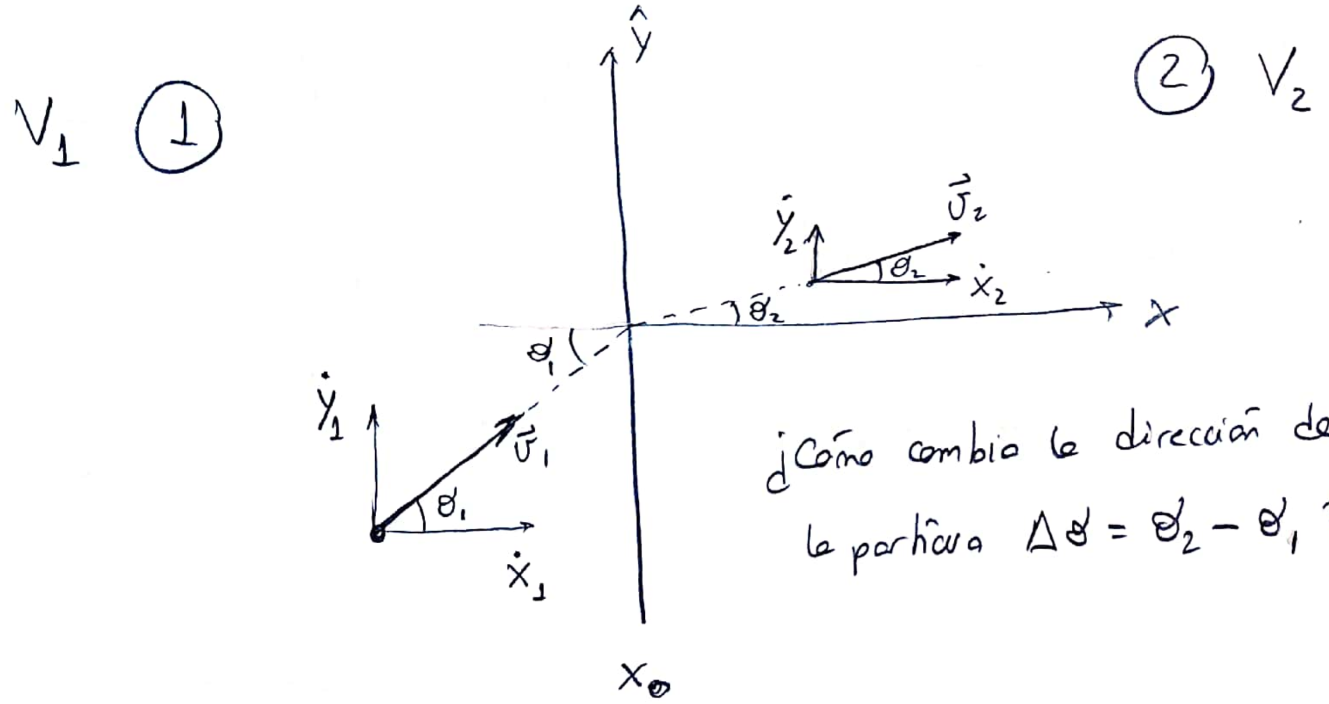
Hamiltoniana: $\mathcal{H} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) + V(x,y)$

Simetrías:

- Invariancia temporal $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ se conserva.
- $y$ es coordenada cíclica $\Rightarrow$ $p_y$ se conserva.

$\Rightarrow$ Se conserva la Energía: $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + V(x)$

se conserva el momento en $\hat{y}$: $P_y = m\dot{y}$




¿Cómo cambia la dirección de la partícula $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$?

$$\Rightarrow E_1 = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2) + V_1 = \frac{m}{2}(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2) + V_2 = E_2$$

$$P_{y_1} = m\dot{y}_1 = m\dot{y}_2 = P_{y_2}$$

Las combino: $\boxed{\dot{y}_1 = \dot{y}_2 \equiv \dot{y}}$

$$\boxed{\dot{x}_2 = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \frac{2}{m}(V_1 - V_2)}}$$

$$\left.\begin{aligned} tg(\theta_1) &= \frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1} \\ tg(\theta_2) &= \frac{\dot{y}_2}{\dot{x}_2} \end{aligned}\right\} \quad \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \frac{2}{m}(V_1 - V_2)}}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}_1}\right)$$

# Ejemplo 6



Cono homogéneo:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V\left(x^2 + y^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}\right)$$

Paso a polares en $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$. "cilíndricas".

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right] - V\left(r^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}\right).$$

Momentos conjugados: $p_r = m\dot{r}$

$p_\theta = m r^2 \dot{\theta}$ — se conserva pq. $\theta$ es cíclica.

$p_z = m\dot{z}$

Hamiltoniano: $\mathcal{H} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) + V\left(r^2 - \frac{z^2}{\alpha^2}\right)$

se conserva x invariancia temporal.