Clase 18/6

(A)

La clase pasada dejamos como ejercicio plantear las integrales que definen el campo eléctrico de las configuraciones de carga del ejercicio 8 (Guía 4)

Recordemos: $\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k \, dq(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} (\vec{r}-\vec{r}\,')$

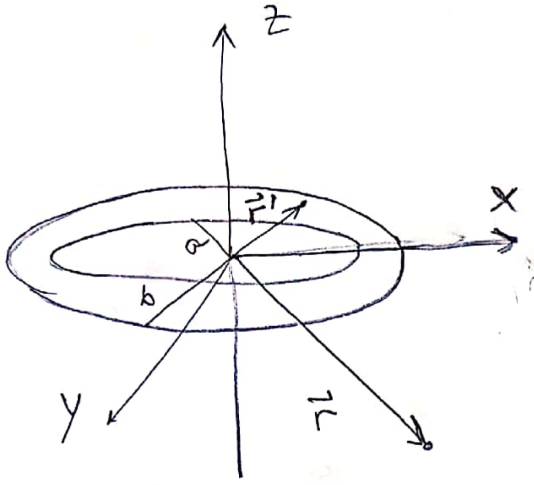
$$\begin{cases} k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 \frac{N m^2}{C^2}. \\ \vec{r}\,' : \text{vector que recorre la distribución de carga.} \\ \vec{r} : \text{el punto del espacio en el que evalúo el campo.} \\ dq(\vec{r}\,') = \begin{cases} \lambda(\vec{r}\,')\, dl' \longrightarrow \text{distribución lineal.} \\ \sigma(\vec{r}\,')\, dA' \longrightarrow \text{dist. superficial.} \\ \rho(\vec{r}\,')\, dV' \longrightarrow \text{dist. volumétrica.} \end{cases} \end{cases}$$

Veamos algunos ejemplos...

B

Corona circular:

pueden tomar otras!



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (\text{cartesianas})$$

$$\vec{r}' = r'\cos\varphi'\,\hat{x} + r'\,\text{sen}\,\varphi'\,\hat{y} \quad \begin{pmatrix}\text{cilíndricas} \\ a \leq r' \leq b\end{pmatrix}$$

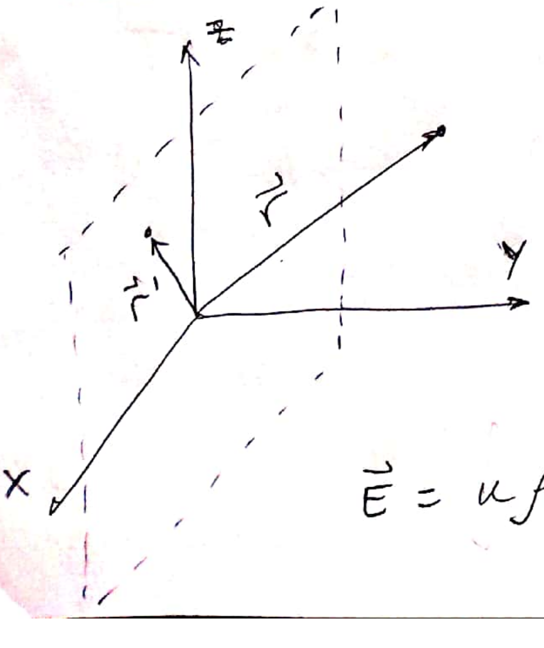
$$dA' = dl'_\varphi\, dl'_r = r'\,d\varphi'\,dr'$$

$$\sigma(\vec{r}') = \sigma = \text{cte}.$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k\, dq'(\vec{r}')\,(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \int \frac{k\,\sigma\, dA'\,(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$= k\sigma \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{r'\,d\varphi'\,dr'\,\left[(x-r'\cos\varphi')\hat{x} + (y-r'\,\text{sen}\,\varphi')\hat{y} + z\hat{z}\right]}{\left[(x-r'\cos\varphi')^2 + (y-r'\,\text{sen}\,\varphi')^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

Plano infinito:



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (\text{cartesianas})$$

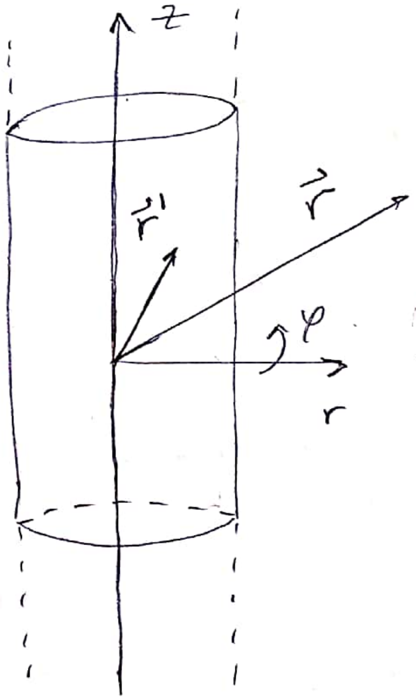
$$\vec{r}' = x'\hat{x} + z'\hat{z} \quad (\text{cartesianas}).$$

$$dA' = dl'_z\, dl'_x = dz'\,dx'$$

$$\rho(\vec{r}') = \rho = \text{cte}.$$

$$\vec{E} = k\rho \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'\,dx'\,\left[(x-x')\hat{x} + y\hat{y} + (z-z')\hat{z}\right]}{\left[(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}$$

Cilindro en volumen de radio R : $\rho(\vec{r}\,') = \rho_0 \dfrac{r'}{R}$.



Tomo coord. cilíndricas:

$$\vec{r} = r\cos\varphi\,\hat{x} + r\,\text{sen}\,\varphi\,\hat{y} + z\,\hat{z}$$

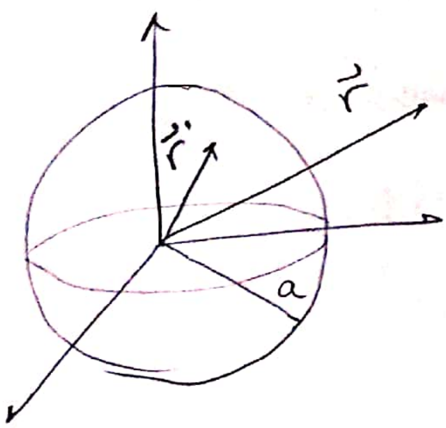
$$\vec{r}\,' = r'\cos\varphi'\,\hat{x} + r'\,\text{sen}\,\varphi'\,\hat{y} + z'\,\hat{z}$$

$$dV' = dl'_\varphi\, dl'_r\, dl'_z = r'\,d\varphi'\,dr'\,dz'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{k\,\rho_0\, r'/R \cdot r'\,d\varphi'\,dr'\,dz'\,\left[(r\cos\varphi - r'\cos\varphi')\hat{x} + (r\,\text{sen}\,\varphi - r'\,\text{sen}\,\varphi')\hat{y} + (z-z')\hat{z}\right]}{\left[(r\cos\varphi - r'\cos\varphi')^2 + (r\,\text{sen}\,\varphi - r'\,\text{sen}\,\varphi')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}$$

Esfera en volumen de radio a : Tomo coord. esféricas:

ρ = cte uniforme.



$$\vec{r} = r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi\,\hat{x} + r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi\,\hat{y} + r\cos\theta\,\hat{z}$$

$$\vec{r}\,' = r'\,\text{sen}\,\theta'\cos\varphi'\,\hat{x} + r'\,\text{sen}\,\theta'\,\text{sen}\,\varphi'\,\hat{y} + r'\cos\theta'\,\hat{z}$$

$$dV' = dl'_r\, dl'_\varphi\, dl'_\theta = r'^2\,\text{sen}\,\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\varphi'$$

D

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \frac{\rho\, r'^2 \operatorname{sen}\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi' \left[(r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi - r' \operatorname{sen}\theta' \cos\varphi')\hat{x} + (r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - r' \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varphi')\hat{y} + (r\cos\theta - r'\cos\theta')\hat{z}\right]}{\left[(r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi - r' \operatorname{sen}\theta' \cos\varphi')^2 + (r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - r' \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varphi')^2 + (r\cos\theta - r'\cos\theta')^2\right]^{3/2}}$$

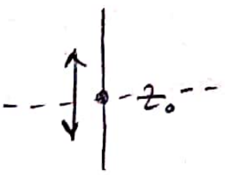
Cuando la distribución de carga tiene <u>simetrías</u>: calcular $\vec{E}$ <u>se simplifica mucho</u>: todo se reduce a ver qué transformaciones dejan invariante a la distribución de carga.

Ejemplo 1 Hilo ∞ en $|\hat{z}$ Pienso en coord cilíndricas.

<u>Simetría 1</u>: rotación alrededor de $\hat{z}$ $\Rightarrow$ $|\vec{E}|$ <u>no</u> depende de la <u>coordenada</u> φ.
(en φ).

<u>Simetría 2</u>: traslación en $\hat{z}$ $\Rightarrow$ $|\vec{E}|$ <u>no</u> depende de la <u>coordenada</u> z.
(en z)

<u>Simetría 3</u>: Reflexión en z_0 $\Rightarrow$ $\vec{E}$ <u>no</u> puede <u>apuntar</u> en $\hat{z}$ ni $\hat{\varphi}$

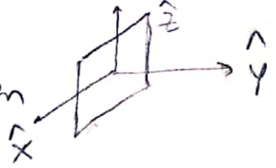


<u>Nota</u>: Para los que lean las notas, sugiero ver el video!

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}}$$

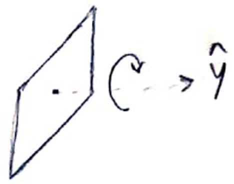
(cilíndricas!)

(E)

Ejemplo 2 Plano ∞ en $(x-z)$ 

, Pienso en cartesianas.

<u>Simetría 1</u> : rotación alrededor de $\hat{y}$ $\Rightarrow$ $\vec{E}$ <u>no</u> puede <u>apuntar</u> en $\hat{z}$ ni $\hat{x}$



<u>Simetría 2</u> : traslaciones en $\hat{z}$ y $\hat{x}$ $\Rightarrow$ $|\vec{E}|$ <u>no</u> depende de las <u>coordenadas</u> z y x (en z y x)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = E(y)\,\hat{y}}$$ (cartesianas !)

<u>Simetría 3</u> : reflexión respecto del plano $\Rightarrow$ $\boxed{E(y) = -E(-y)}$
$(y \leftrightarrow -y)$

Ejemplo 3 cilindro ∞ $\longrightarrow$ es igual que el hilo ! (Ejemplo 1)

Ejemplo 4 Esfera cargada, Pienso en coordenadas esféricas.

<u>Simetría 1</u> : rotaciones en φ y θ $\Rightarrow$ $|\vec{E}|$ <u>no</u> depende de <u>coord.</u> φ ni θ.

<u>Simetría 2</u> : rotaciones alrededor de $\hat{r}$ $\Rightarrow$ $\vec{E}$ <u>no</u> puede <u>apuntar</u> en $\hat{\varphi}$ ni $\hat{\theta}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}}$$ (Esféricas !).

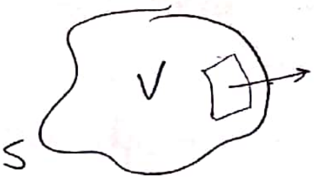
Ley de Gauss

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k\, dq(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi k\, \rho(\vec{r})$$

$$Q = \int_V \rho(\vec{r})\, dV = \frac{1}{4\pi k}\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV$$

$$= \frac{1}{4\pi k}\oint_{S(V)} \vec{E}\cdot d\vec{S} \Rightarrow \boxed{\oint_{S(V)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi k\, Q_{enc}}$$

Teorema de la divergencia.



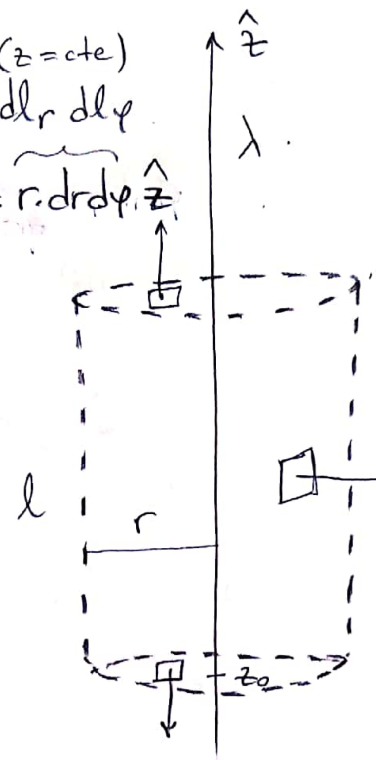
$d\vec{S} = dA\,\hat{n}$

Esta ley me da el __flujo__ $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}$ a través de una superficie. Esto es __menos información__ que saber cuanto vale $\vec{E}$.

__Pero!__ Simetrías $\oplus$ Gauss $\longrightarrow$ En ocasiones me dice cuanto vale $\vec{E}$.

G

Hilo infinito con densidad lineal de carga uniforme λ.



$(z = cte)$

$$d\vec{S}_{sup} = \underbrace{r \cdot dr\, d\varphi}_{dl_r\, dl_\varphi} \cdot \hat{z}$$

Para aplicar Gauss me tengo que inventar una superficie "sup. Gaussiana".

Tomo coord cilíndricas.

$$d\vec{S}_{lat} = \underbrace{r\, d\varphi\, dz}_{dl_z\, dl_\varphi} \hat{r}$$

$(r = cte)$

$$d\vec{S}_{inf} = -\underbrace{r\, dr\, d\varphi}_{dl_r\, dl_\varphi} \hat{z}$$

$(z = cte)$

Recordemos x simetría:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\, \hat{r}$$

Aplico Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat} + \int_{S_{sup}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{sup} + \int_{S_{inf}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{inf}$$

$$= \int_{S_{lat}} E(r) \cdot \hat{r} \cdot d\vec{S}_{lat} + \cancelto{0}{\int_{S_{sup}} E(r)\, \hat{r} \cdot r\, dr\, d\varphi\, \hat{z}} + \cancelto{0}{\int_{S_{inf}} E(r)\, \hat{r} \cdot (-r\, dr\, d\varphi\, \hat{z})}$$

$$= \int_{S_{lat}} E(r)\, \hat{r} \cdot r\, d\varphi\, dz\, \hat{r} = E(r) \cdot r \int_{z_0}^{z_0 + l} \int_0^{2\pi} d\varphi\, dz$$

Escaneado con CamScanner

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot r \cdot 2\pi l$$

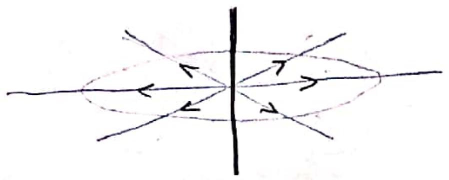
$$\| \longrightarrow \text{Gauss !}$$

$$4\pi k\, Q_{enc} = 4\pi k\, \lambda \cdot l$$

$$\left. \right\} E(r) = \frac{2k\lambda}{r}$$

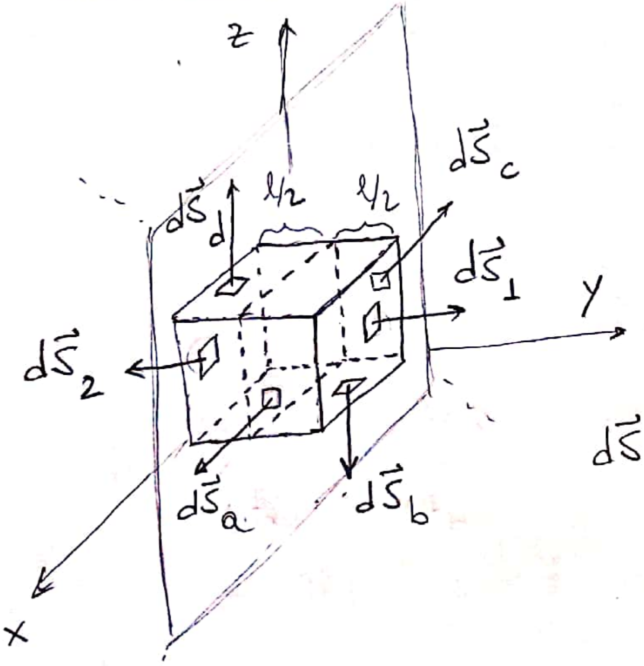
$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r} = \frac{2k\lambda}{r}\,\hat{r}} \longrightarrow$$

coincide con el cálculo analítico hecho la clase pasada 11/6 página (P).

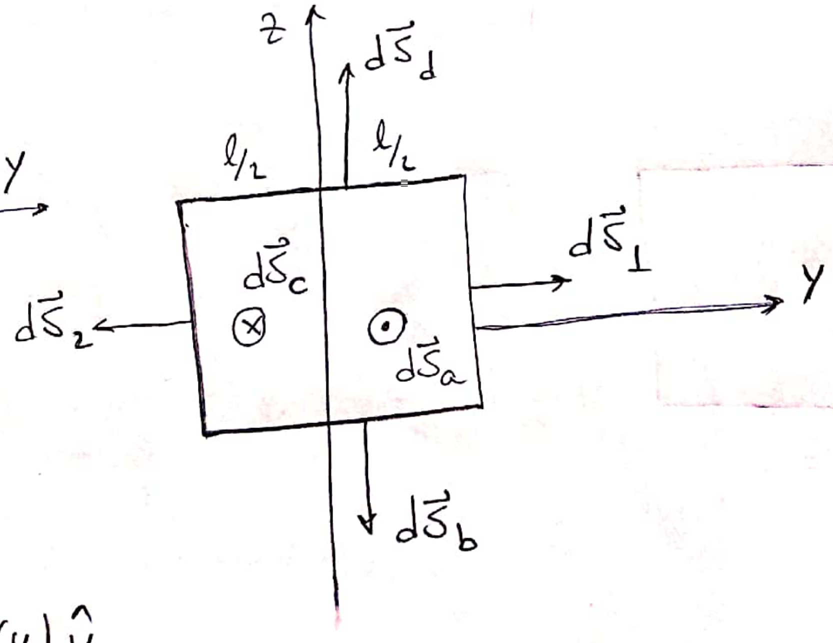


líneas de flujo son radiales.

$\boxed{\text{Plano infinito con densidad sup. de carga } \sigma}$.



De costado



x Simetría: $\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = E(y)\,\hat{y} \\ \text{con } E(y) = -E(-y) \end{cases}$

Diferenciales de Área:

$$d\vec{S}_1 = dz\,dx\,\hat{y} \qquad d\vec{S}_a = dz\,dy\,\hat{x}$$

$$d\vec{S}_2 = -dz\,dx\,\hat{y} \qquad d\vec{S}_b = -dx\,dy\,\hat{z}$$

$$d\vec{S}_c = -dz\,dy\,\hat{x}$$

$$d\vec{S}_d = dx\,dy\,\hat{z}$$

Gauss:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_1 E(\ell/2)\,\hat{y}\cdot \overbrace{dz\,dx\,\hat{y}}^{d\vec{S}_1}$$

$$+ \int_2 E\left(-\tfrac{\ell}{2}\right)\hat{y}\cdot \overbrace{\left(-dz\,dx\,\hat{y}\right)}^{d\vec{S}_2}$$

$$+ \cancel{\int_a E(y)\,\hat{y}\cdot \overbrace{dz\,dy\,\hat{x}}^{d\vec{S}_a}} + \cancel{\int_b E(y)\,\hat{y}\cdot \overbrace{\left(-dx\,dy\,\hat{z}\right)}^{d\vec{S}_b}}$$

$$+ \cancel{\int_c E(y)\,\hat{y}\cdot \overbrace{\left(-dz\,dy\,\hat{x}\right)}^{d\vec{S}_c}} + \cancel{\int_d E(y)\,\hat{y}\cdot \overbrace{\left(dx\,dy\,\hat{z}\right)}^{d\vec{S}_d}}$$

$$= E(\ell/2)\cdot \ell^2 - \underbrace{E(-\ell/2)}_{=-E(\ell/2)}\,\ell^2 = 2\,E(\ell/2)\cdot \ell^2$$

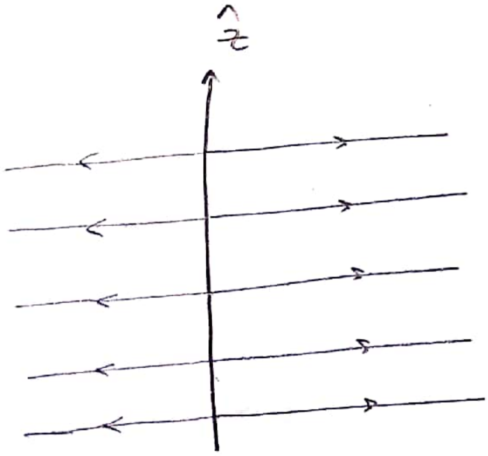
$$\times\ \text{Gauss} \ldots = 4\pi k\, Q_{enc} = 4\pi k\,\sigma\,\ell^2$$

J

$$\Rightarrow 2E(\ell/2)\,\ell^2 = 4\pi k \sigma \ell^2 \Rightarrow E(\ell/2) = \underbrace{2\pi k \sigma = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}_{\text{No depende de } \ell \text{!}}$$

$$\Rightarrow E(y) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} & y > 0 \\[2ex] \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0} & y < 0 \end{cases}$$

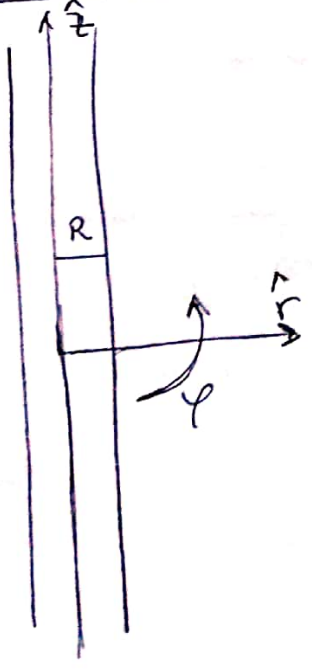
$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{y} & y > 0 \\[2ex] \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{y} & y < 0 \end{cases}}$$



líneas de flujo.

El campo es discontinuo en $y = 0$.

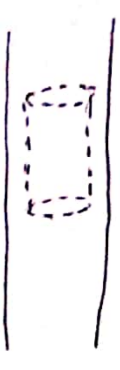
Cilindro infinito de radio R con densidad $\rho = \rho_0 \dfrac{r}{R}$.



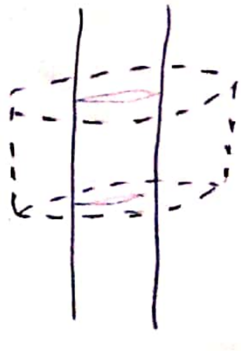
Uso cilíndricas

Tomo superficie Gaussiana cilíndrica, y considero 2 casos:

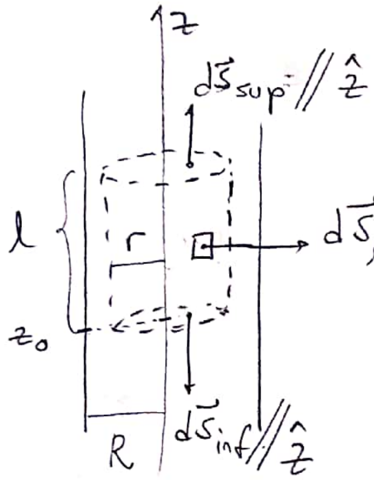
1



2



1



$\rightarrow d\vec{S}_{lat} = r \cdot d\varphi \, dz \, \hat{r}$

x Simetría

$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S}_{sup} = 0$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{S}_{inf} = 0$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{lat}} E(r) \cdot \hat{r} \cdot r\,d\varphi\,dz\,\hat{r} = E(r) \cdot r\,2\pi l$$

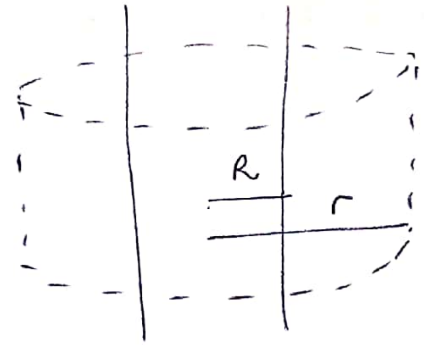
$$\underset{\text{x Gauss}}{=} 4\pi k\,Q_{enc} = 4\pi k \int \rho(r) \cdot r\,d\varphi\,dz\,dr$$

$$= 4\pi k \int_0^{r} \int_{z_0}^{(z_0+l)} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0}{R}\, r^2\, d\varphi\, dz\, dr$$

$$= 4\pi k \cdot 2\pi l \cdot \frac{r^3}{3} \frac{\rho_0}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{4\pi k}{3} \frac{r^2}{R} \rho_0 \; \hat{r}} \quad \text{para } r \leq R.$$

2)



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \text{igual que antes}$$

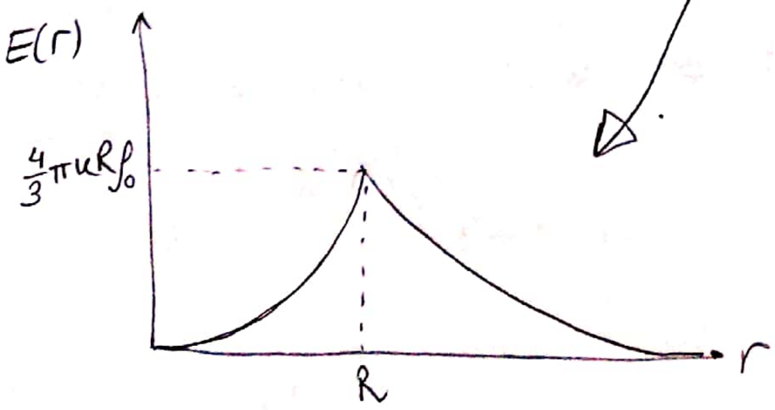
$$= E(r)\cdot r\cdot 2\pi l\,.$$

pero ahora, $4\pi k\, Q_{enc} = 4\pi k \int_0^R \int_{z_0}^{z_0+l} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0}{R} r^2\, d\varphi\, dz\, dr$

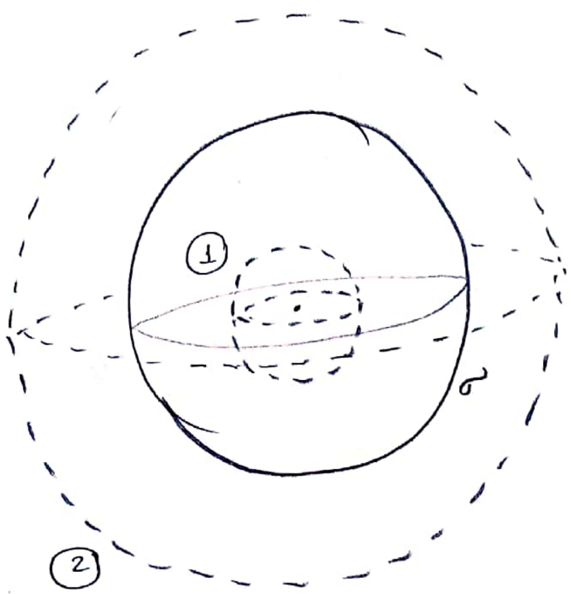
$$= 4\pi k \frac{\rho_0}{R} \cdot 2\pi l \cdot \frac{R^3}{3}$$

$\Rightarrow$ x Gauss, $\boxed{E(r) = \frac{4}{3}\pi k \frac{R^2}{r} \rho_0\, \hat{r}}$ para $r \geq R$.

$$\Rightarrow \boxed{E(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi k \frac{r^2}{R} \rho_0\, \hat{r} & r \leq R \\ \frac{4}{3}\pi k \frac{R^2}{r} \rho_0\, \hat{r} & r \geq R \end{cases}}$$



$\boxed{\text{Superficie esférica de radio } a \text{ con densidad } \sigma}$ (M)



Considero coord. esféricas y dos superficies Gaussianas.

x Simetría $\vec{E} = E(r)\hat{r}$

Tanto en 1 como en 2

$$\oint_{S_{Gauss}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{E(r)\,\hat{r}}_{\vec{E}} \cdot \underbrace{r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}}_{d\vec{s}}$$

$$= E(r)\, r^2\, 2\pi \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} = 4\pi r^2 E(r)$$

Pero ...

1 $\quad 4\pi k Q_{enc} = 0 \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = 0 \quad (r \leq R)$.

2 $\quad 4\pi k Q_{enc} = 4\pi k \cdot 4\pi R^2 \sigma \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = 4\pi k\, 4\pi R^2 \sigma$
$(r \geq R)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ 4\pi k \sigma \dfrac{R^2}{r^2}\hat{r} & r \geq R \end{cases}}$$

Notar... para $r \geq R$.
$\vec{E} = k\dfrac{Q}{r^2}\hat{r}$ con $Q = 4\pi R^2 \sigma$

N

Potencial eléctrico

$$V(\vec{r}) = \int \frac{\kappa \, dq(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad \text{(carga continua)}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{\kappa \, q}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad \text{(carga puntual)}$$

Campo escalar continuo.

Es un campo escalar, mucho más fácil de calcular!

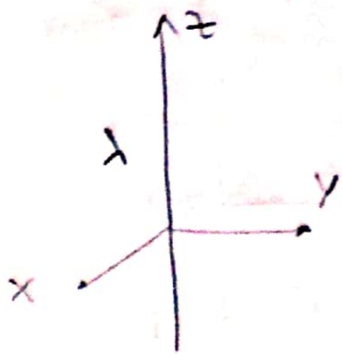
Luego, $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

Cartesianas: $\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$

Cilíndricas. $\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$

Esféricas: $\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$

Hilo ∞ con densidad λ



$\vec{r}\,' = z'\hat{z}$

$\vec{r} = y\,\hat{y}$

$$V(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa \lambda \, dz'}{\sqrt{y^2 + z'^2}} + cte$$

$$= \kappa \lambda \log\left[\sqrt{y^2 + z'^2} + z'\right]_{-\infty}^{\infty} + cte$$

$$= \kappa\lambda \lim_{L\to\infty} \log\left[\sqrt{y^2+z'^2}+z'\right]_{-L}^{L} + cte.$$

Esto diverge ! $\Rightarrow$ tengo que elegir $cte = \infty$ para cancelar la divergencia.

pido que $V(\vec{r})$ se anule en y_0.

$$\Rightarrow V(y_0) = \kappa\lambda \log\left[\sqrt{y_0^2+z'^2}+z'\right]_{-\infty}^{\infty} + cte = 0.$$

$$\Rightarrow cte = -\kappa\lambda \log\left[\sqrt{y_0^2+z'^2}+z'\right]_{-\infty}^{\infty}.$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \kappa\lambda \lim_{L\to\infty}\left\{\log\left(\sqrt{y^2+z'^2}+z'\right] - \log\left[\sqrt{y_0^2+z'^2}+z'\right]\right\}_{-L}^{L}$$

$$= \kappa\lambda \lim_{L\to\infty}\left\{\log\left[\frac{\sqrt{y^2+z'^2}+z'}{\sqrt{y_0^2+z'^2}+z'}\right]\right\}_{-L}^{L}.$$

$$= \kappa\lambda \lim_{L\to\infty}\left\{\log\left(\frac{|z'|\left(1+\frac{1}{2}\frac{y^2}{z'^2}\right)+z'}{|z'|\left(1+\frac{1}{2}\frac{y_0^2}{z'^2}\right)+z'}\right]\right\}_{-L}^{L}$$

$$= -\kappa\lambda \lim_{z'\to-\infty}\left\{\log\left[\frac{\frac{1}{2}\frac{y^2}{z'^2}|z'|}{\frac{1}{2}\frac{y_0^2}{z'^2}|z'|}\right]\right\} = -\kappa\lambda \log\left(\frac{y^2}{y_0^2}\right)$$

P

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = -2k\lambda \log\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

pero y es radial en el punto que lo elegí $(x=0)$.

$$\Rightarrow \boxed{V(\vec{r}) = -2k\lambda \log\left(\frac{r}{r_0}\right)}$$

Verifico: $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})} \underset{\text{cilíndricas}}{=} -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = \boxed{+\frac{2k\lambda}{r}\hat{r}}$

Es lo que obtuvimos en clase 11/6 pag P.

clase hay pag

Potencial "lejos" de una distribución de carga

Desarrollo multipolar:

$$V(\vec{r}) = k\frac{Q}{|\vec{r}|} + k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \dots$$

(Monopolo) + (Dipolo) + (Cuadrupolo) + ...

$$Q = \text{carga total} = \begin{cases} \int dq(\vec{r}\,') & \text{(continua)} \\ \sum_i q_i & \text{(puntual)} \end{cases}$$

$$\vec{p} = \text{Momento dipolar eléctrico} = \begin{cases} \int dq(\vec{r}\,')\cdot\vec{r}\,' & \text{(continua)} \\ \sum_i q_i\,\vec{r}_i & \text{(puntual)} \end{cases}$$

① Si tengo 2 sistemas de referencia O y O' /

$$\vec{r}_{O'} = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}_{O} \Rightarrow \vec{p}_O = \int dq\cdot\vec{r}_O = \int dq\,(\vec{r}_{O'} - \vec{r}_{OO'})$$

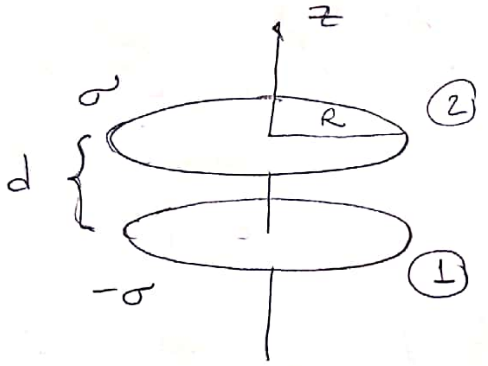
$$= \vec{p}_{O'} - \vec{r}_{OO'}\,Q$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p}_{O'} = \vec{p}_O + Q\,\vec{r}_{OO'}} \quad \boxed{\text{Si } Q = 0 \Rightarrow \vec{p} \text{ no depende del sist. ref.}}$$

Problema 17 c

(R1)

Potencial y campo eléctrico a gran distancia sobre el eje de simetría de :



$$\boxed{Q = \pi R^2 \sigma + \pi R^2(-\sigma) = 0}$$

$$\boxed{\vec{P} = \int_{①} (-\sigma)\, dA_1'\, \vec{r}_1' + \int_{②} \sigma \cdot dA_2'\, \vec{r}_2'}$$

$$= -\sigma \int_0^{2\pi}\int_0^R r'\,dr'\,d\varphi' \left[\cancel{r'\cos\varphi'\,\hat{x} + r'\operatorname{sen}\varphi'\,\hat{y}} - \frac{d}{2}\hat{z}\right]$$

$$+ \sigma \int_0^{2\pi}\int_0^R r'\,dr'\,d\varphi' \left[\cancel{r'\cos\varphi'\,\hat{x} + r'\operatorname{sen}\varphi'\,\hat{y}} + \frac{d}{2}\hat{z}\right].$$

$$= 2\times\left(+\sigma\,\frac{R^2}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{d}{2}\,\hat{z}\right) = \boxed{+\pi\sigma d R^2\,\hat{z}}$$

$\vec{r} = z\hat{z}$ eje de simetría

$$\Rightarrow \boxed{V(z) = \frac{\kappa Q}{|\vec{r}|} + \kappa\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \kappa\pi\sigma d R^2\frac{z}{z^3} = \frac{\kappa\pi\sigma d R^2}{z^2}}$$

5

Campo eléctrico lejos sobre $\hat{z}$:

x simetría $\vec{E} = E(z)\,\hat{z}$

$$E(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{2k\pi\sigma d R^2}{z^3} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(z) = \frac{2k\pi\sigma d R^2}{z^3}\,\hat{z}}$$