Clase Práctica 25/06

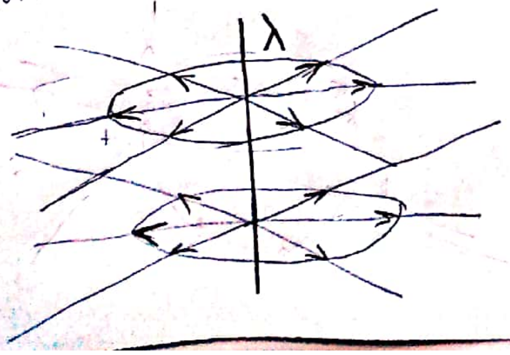
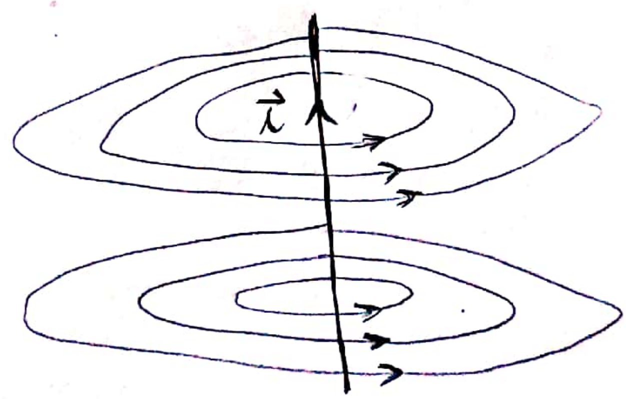
Entregar Problema 12 y 21c

A

Electroestática. $(\dot{\vec{E}} = 0)$	Magnetostática. $(\dot{\vec{B}} = 0)$
Campo eléctrico generado x 1 carga: $\vec{E}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{k_e} q \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert^3}$	Campo magnético generado x 1 carga. $\vec{B}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}}_{k_m} q\, \vec{v}\,' \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert^3}$
Campo eléctrico generado x distribución carga: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dq(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert^3}$ $dq(\vec{r}\,') = \begin{cases} \lambda(\vec{r}\,')dl' & [\lambda] = \frac{C}{m} \\ \sigma(\vec{r}\,')dA' & [\sigma] = \frac{C}{m^2} \\ \rho(\vec{r}\,')dV' & [\rho] = \frac{C}{m^3} \end{cases}$ (Ley de Coulomb)	Campo eléctrico generado x distrib. corriente: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\vec{I}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert^3}$ $d\vec{I}(\vec{r}\,') = \begin{cases} \vec{i}(\vec{r}\,')dl' & [i] = \frac{C}{s} \\ \vec{g}(\vec{r}\,')dA' & [g] = \frac{C}{sm} \\ \vec{j}(\vec{r}\,')dV' & [j] = \frac{C}{sm^2} \end{cases}$ (Ley de Biot - Savart)
Fuerza sobre una distrib. de carga. $\vec{F} = \int dq(\vec{r})\, \vec{E}(\vec{r})$ $\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$	Fuerza sobre una distrib. de corriente. $\vec{F} = \int d\vec{I}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$ $\boxed{\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}}$
Unidades: $[E] = \frac{N}{C}$	Unidades: $[B] = T = \frac{Ns}{Cm}$

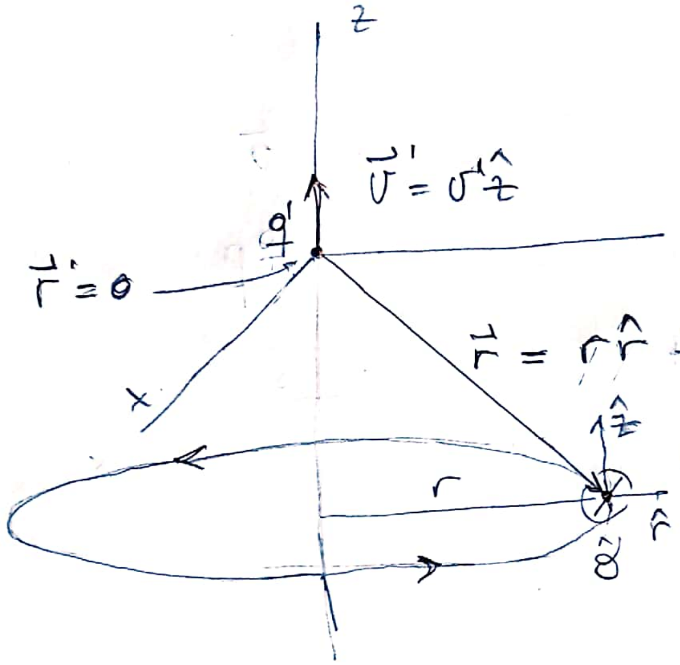
Escaneado con CamScanner

(B)

Electrostática	Magnetostática.
$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{E}=-\vec{\nabla}V$ $V'=V+c \quad / -\vec{\nabla}c=0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ $\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\psi \quad / \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi=0$
Potencial eléctrico para 1 carga. $V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}$	Potencial magnético para 1 carga en mov. $\vec{A}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{v}'}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}$
Potencial eléctrico para distrib carga: $V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq(\vec{r}')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}$	Potencial magnético para distrib. corriente: $\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{d\vec{I}(\vec{r}')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}$
$\Box V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Poisson)	$\Box\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$
Gauss: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (además $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$)	Ampère: $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$ (además $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$)
Las líneas de campo empiezan y terminan en cargas o en el ∞. 	Las líneas de campo "circulan" 

Campo magnético y regla de la mano derecha.

(C)



$\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{z}$ (cilíndricas).

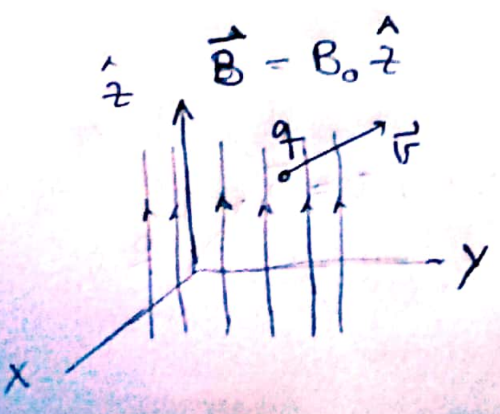
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q' \cdot \vec{v}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} q' \frac{v'\hat{z} \times (r\hat{r} + z\hat{z})}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q'v'r}{\sqrt{r^2+z^2}} \hat{\theta}$$

El campo magnético "circula" a la corriente !

Otra pregunta distinta es: dado $\vec{B}$, hacia donde apunta la fuerza que ejerce sobre una corriente ?



$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

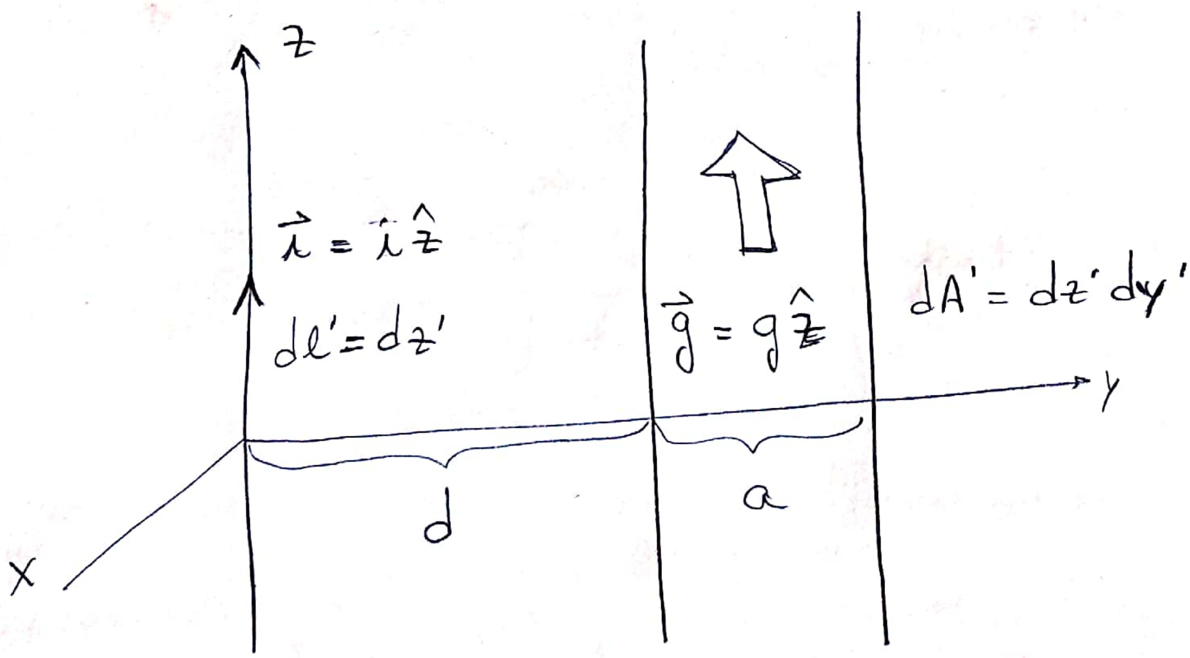
si $\begin{cases} \vec{v} \parallel \hat{z} \Rightarrow \vec{F} = 0 \\ \vec{v} \parallel \hat{r} \Rightarrow \vec{F} \parallel -\hat{\theta} \\ \vec{v} \parallel \hat{\theta} \Rightarrow \vec{F} \parallel \hat{r} \end{cases}$

⇒ La fuerza "magnética" tuerce la dirección del movimiento, pero no acelera ni desacelera la partícula. No hace trabajo.

D

Ejemplo

Calcular la fuerza por unidad de longitud entre una cinta infinita de ancho a por la que circula una densidad superficial de corriente $\vec{g}$ uniforme y un cable infinito coplanar y paralelo por el que circula una corriente $\vec{i}$. paralela a $\vec{g}$.



$[i] = \frac{C}{S}$ ⟶ $i \cdot T$ es la carga que pasa en un tiempo T.

$[g] = \frac{C}{sm}$ ⟶ densidad sup de corriente.

$g \cdot a$ es la corriente

$g \cdot a \cdot T$ es la carga que pasa en un tiempo T.

E

Fuerza del hilo sobre la cinta:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\vec{I}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$\vec{r}\,' = z'\hat{z}$ $\longrightarrow$ recorre el hilo de corriente.

$\vec{r} = y\hat{y} + z\hat{z}$ $\longrightarrow$ Busco $\vec{B}$ sobre la cinta.

$d\vec{I}(\vec{r}\,') = \vec{i}(\vec{r}\,')\,dl' = \underbrace{i}_{\text{uniforme}}\,\hat{z}\,dz'$ $(-\infty \leq z' \leq \infty)$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\,dz'\,\hat{z}\times[y\hat{y} + \cancel{(z-z')\hat{z}}]}{[y^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

$u = z'-z$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi}\cdot 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du\,y(-\hat{x})}{[y^2+u^2]^{3/2}} = \frac{-\mu_0 i y}{4\pi}\cdot 2\int_0^{\infty}\frac{du}{[y^2+u^2]^{3/2}}\hat{x}$$

(función par en u)

$$= -\frac{\mu_0 i y}{4\pi}\cdot 2\left.\frac{u}{y^2\sqrt{u^2+y^2}}\right|_0^{\infty}\hat{x}$$

$$= \boxed{-\frac{\mu_0 i}{2\pi y}\hat{x} = \vec{B}(y)}$$

(Es "angular", circula a la corriente).

Este es el campo $\vec{B}$ que hace el hilo en el lugar donde está la cinta.

(F)

Fuerza del hilo sobre la cinta:

$$\vec{F}_{ch} = \int d\vec{I}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

Sobre la cinta

corriente de la cinta.

Campo magnético generado x el hilo en la posición de la cinta.

$$d\vec{I}(\vec{r}) = \vec{g}\, dA = g\,\hat{z}\, dz\, dy \quad \begin{cases} d \leq y \leq d+a \\ -\infty \leq z \leq \infty \end{cases}$$

$$\vec{F}_{ch} = \int_{d}^{d+a} dy \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz}_{\equiv L} \, g \cdot \hat{z} \times \left(-\frac{\mu_0 i}{2\pi y}\right)\hat{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{F}_{ch}}{L} = -\frac{\mu_0 i g}{2\pi} \int_{d}^{d+a} \frac{dy}{y} \cdot \hat{y} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\, ig \log\left(\frac{d+a}{d}\right)\hat{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\vec{F}_{ch}}{L} = -\frac{\mu_0 i g}{2\pi} \log\left(\frac{d+a}{d}\right)\hat{y}}$$

Corrientes paralelas se atraen, antiparalelas se repelen.

Fuerza de la cinta sobre el hilo:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\vec{I}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Ahora $\vec{r}\,'$ recorre la cinta y $\vec{r}$ el hilo:

$$\vec{r} = z\hat{z}$$

$$\vec{r}\,' = y'\hat{y} + z'\hat{z} \quad \text{con} \begin{cases} d \leq y' \leq d+a \\ -\infty \leq z' \leq \infty \end{cases}$$

$$d\vec{I}(\vec{r}\,') = \vec{g}(\vec{r}\,')\, dA' = g \cdot \hat{z} \cdot dy'\,dz'$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{d}^{d+a} g\hat{z}\, dy'\,dz' \times \frac{[\cancel{(z-z')\hat{z}} - y'\hat{y}]}{[y'^2+(z'-z)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 g}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{d}^{d+a} dy'\,dz' \frac{y'}{(y'^2+(z'-z)^2)^{3/2}}\hat{x}$$

$$= \frac{\mu_0 g}{4\pi}\int_{d}^{d+a} dy' \left(\frac{z'}{y'^2\sqrt{y'^2+z'^2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}\hat{x}$$

$$= \frac{\mu_0 g}{4\pi}\, 2\int_{d}^{d+a}\frac{dy'}{y'}\hat{x} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 g}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\hat{x}}$$

Fuerza de la cinta sobre el hilo:

$$\vec{F}_{hc} = \int d\vec{I}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

Sobre el hilo.

corriente en el hilo.

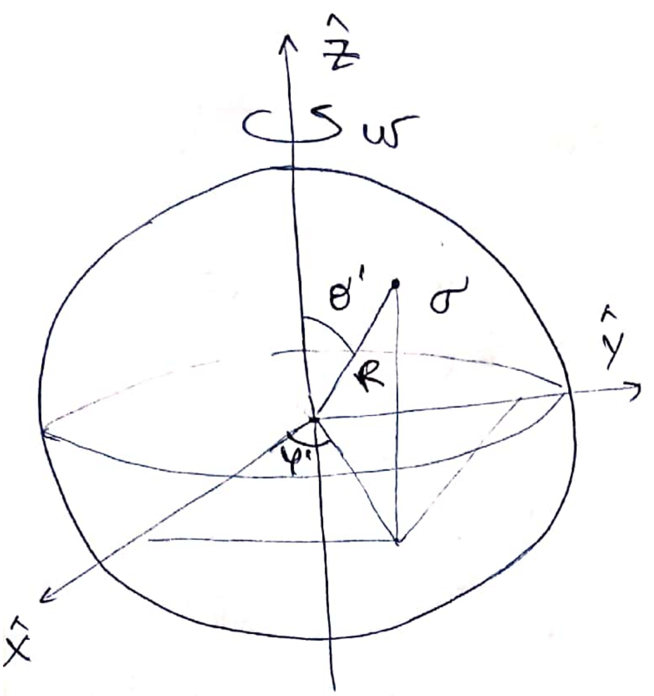
Campo magnético de la cinta sobre el hilo.

$$d\vec{I}(\vec{r}) = i\,\hat{z}\,dz \qquad (-\infty \leq z \leq \infty).$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{hc} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz}_{\equiv L}\; i\,\hat{z} \times \left[\frac{\mu_0 g}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\hat{x} \right].$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\vec{F}_{hc}}{L} = \frac{\mu_0\, i g}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\hat{y} = -\frac{\vec{F}_{ch}}{L}}$$

Ejemplo Una esfera de radio R, cargada superficialmente con densidad σ uniforme, gira sobre su eje con velocidad angular ω. Hallar el campo magnético sobre el eje de rotación. (I)



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\vec{I}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$\vec{r} = z\hat{z} \longrightarrow$ Busco campo en el eje.

$$\vec{r}\,' = R(\operatorname{sen}\theta' \cos\varphi'\,\hat{x} + \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varphi'\,\hat{y} + \cos\theta'\,\hat{z})$$ $\longrightarrow$ recorre la esfera cargada

$$d\vec{I}(\vec{r}\,') = \vec{g}(\vec{r}\,')\, dA' \quad \begin{cases} dA' = dl_\varphi' \, dl_\theta' = R^2 \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\varphi' \\ \vec{g}(\vec{r}\,') = \sigma \cdot \vec{v}\,' = \sigma R \operatorname{sen}\theta' \,\omega\, \hat{\varphi} \end{cases}$$

$\hat{\varphi} \longrightarrow (-\operatorname{sen}\varphi'\,\hat{x} + \cos\varphi'\,\hat{y})$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sigma R \operatorname{sen}\theta'\,\omega(-\operatorname{sen}\varphi'\,\hat{x} + \cos\varphi'\,\hat{y}) R^2 \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\varphi' \times \left[(z - R\cos\theta')\hat{z} - R\operatorname{sen}\theta'\cos\varphi'\,\hat{x} - R\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\varphi'\,\hat{y}\right]}{\left[(z-R\cos\theta')^2 + R^2\operatorname{sen}^2\theta'\cos^2\varphi' + R^2\operatorname{sen}^2\theta'\operatorname{sen}^2\varphi'\right]^{3/2}}$$

(J)

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma R^3 \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\text{sen}^2\theta'\, d\theta'\, d\varphi'}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta')^{3/2}} \cdot$$

$$\cdot \Big[\cancel{-\text{sen}\,\varphi'(z-R\cos\theta')}(-\hat{y}) + R\,\text{sen}\,\theta'\,\text{sen}^2\varphi'\,\hat{z}$$

$$+ \cancel{\cos\varphi'(z-R\cos\theta')}\,\hat{x} - R\,\text{sen}\,\theta'\cos^2\varphi'(-\hat{z}) \Big)$$

se anulan al integrar en φ'

$$= \frac{\mu_0 \sigma R^3 \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\text{sen}^2\theta'\, d\theta'\, d\varphi'}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta')^{3/2}} \cdot R\,\text{sen}\,\theta'\,\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{2} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}^3\theta'\, d\theta'}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta')^{3/2}}\,\hat{z}$$

$$\doteq \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{4\pi}\,\hat{z} \int_{-1}^{1} \frac{du\,(1-u^2)}{[z^2+R^2-2zRu]^{3/2}}$$

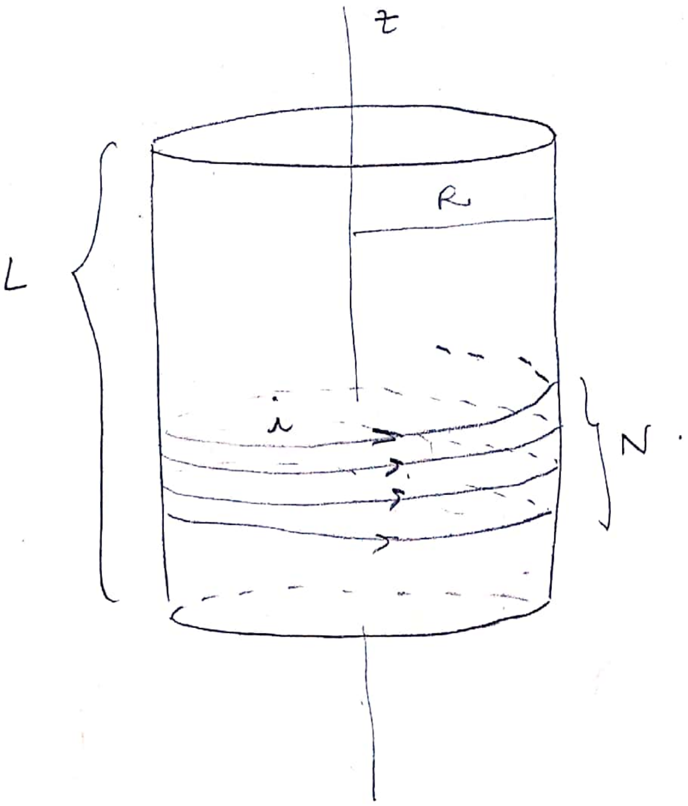
$u = \cos\theta'$

$du = -\text{sen}\,\theta'\,d\theta'$

$$= \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{2}\,\hat{z}\,\frac{2}{3R^3z^3}\left[R^3 + z^3 - (R^2+z^2+Rz)|z-R|\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{3z^3}\left[R^3+z^3-(R^2+z^2+Rz)|z-R|\right]\hat{z}}$$

Solenoide Finito (en el eje).



Uso cilíndricas:

$$\vec{g} = \frac{N}{L} i \hat{\varphi}$$

$$\hat{\varphi} = \cos\varphi' \hat{y} - \operatorname{sen}\varphi' \hat{x}$$

$$\vec{r} = z\hat{z} \longrightarrow \text{(En el eje)}.$$

$$\vec{r}\,' = R\cos\varphi' \hat{x} + R\operatorname{sen}\varphi' \hat{y} + z'\hat{z}$$

$$0 \leq \varphi' \leq 2\pi, \quad -\frac{L}{2} \leq z' \leq \frac{L}{2}$$

$$dA' = dl'_\varphi \, dl'_z = R\, d\varphi' \, dz'$$

Resultado (Comprobar!)

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I N}{2L} \left\{ \frac{L/2 - z}{\sqrt{(z-\frac{L}{2})^2 + R^2}} + \frac{L/2 + z}{\sqrt{(z+\frac{L}{2})^2 + R^2}} \right\}$$