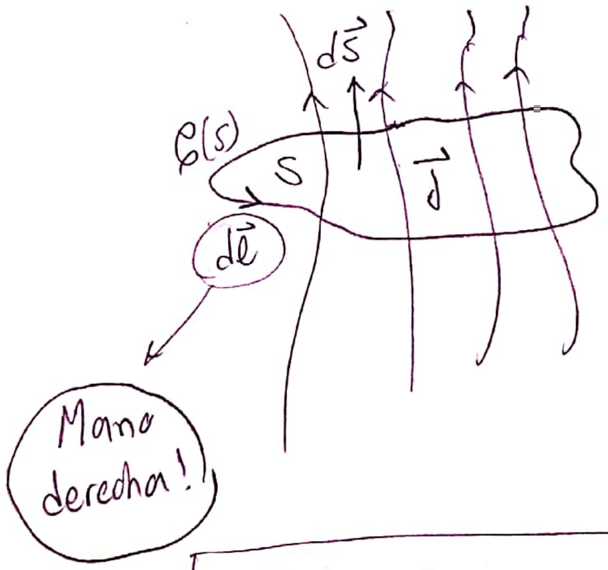
Clase Práctica 29/06.

(A)

Ley de Ampère :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$



$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \oint_{\mathcal{C}(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

x Stokes

$$\| $$

$$\int_S \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{conc}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{conc}}$$

Forma integral de la Ley de Ampère

(Es como un "Gauss" para $\vec{B}$).

La integral de línea de $\vec{B}$ tiene menor info. que conocer $\vec{B}$ (igual que antes, la integral en superficie de $\vec{E}$ tiene menos que $\vec{E}$).

Ampère ⊕ Simetrías ≡ me van a permitir conocer $\vec{B}$.

Simetrías de una configuración de corrientes y cómo impacta en la forma de $\vec{B}(\vec{r})$

- Una diferencia con el campo eléctrico:

× Biot-Savart $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\vec{I} \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$.

La corriente tiene un sentido.

Cambios en el sentido de la corriente generan cambios en el sentido de $\vec{B}$: $\boxed{d\vec{I} \to -d\vec{I} \Rightarrow \vec{B} \to -\vec{B}}$

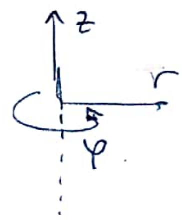
- $\vec{B}$ es perpendicular a la corriente..
- La idea es igual que antes:

Tengo que identificar una secuencia de transformaciones sobre la distribución de corrientes, que la dejan invariante.

Luego veo cómo esas transformaciones restringen al campo $\vec{B}$.

Hilo de corriente ∞

Uso cilíndricos.

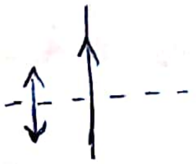


Simetría 1: Rotaciones en $\hat{z}$

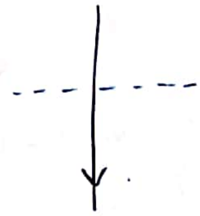
$\Rightarrow$ $\vec{B}$ no puede depender de la coordenada φ.

Simetría 2: Traslaciones en $\hat{z}$ $\Rightarrow$ $\vec{B}$ no puede depender de la coordenada z.

Simetría 3:



reflexión de 180° $\longrightarrow$



$\oplus$

Inversión del sentido de corriente: $\vec{i} \to -\vec{i}$ $\longrightarrow$

Para el campo $\vec{B}$ $\to$ reflexión: $\vec{B} = B_z\hat{z} + B_r\hat{r} + B_\varphi\hat{\varphi}$ ☺

$\longrightarrow$ $\vec{B} = -B_z\hat{z} + B_r\hat{r} - B_\varphi\hat{\varphi}$

$\to$ Inversión de corriente: $\vec{B} = -B_z\hat{z} + B_r\hat{r} - B_\varphi\hat{\varphi}$

$\longrightarrow$ $\vec{B} = B_z\hat{z} - B_r\hat{r} + B_\varphi\hat{\varphi}$ ✪

Necesito que ☺ = ✪ p.q. mis transformaciones no cambian nada.

$\Rightarrow$ $B_r = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{B} = B_z\hat{z} + B_\varphi\hat{\varphi}$

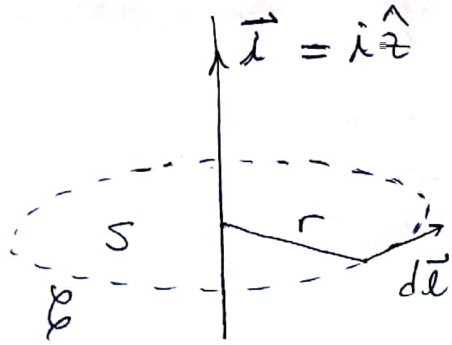
D

Observación: $\vec{B}$ debe ser ortogonal a la corriente $\Rightarrow$

$$\hat{z} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow B_z = 0 \Rightarrow \vec{B} = B_\varphi \hat{\varphi}$$

Resultado: $\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = B_\varphi(r)\, \hat{\varphi}}$ (En cilíndricas).

Como $\vec{B}$ depende de r, conviene una curva "Ampèriana" a radio constante:



$d\vec{l} = dl_\varphi\, \hat{\varphi} = r\, d\varphi\, \hat{\varphi}$

Ampère:

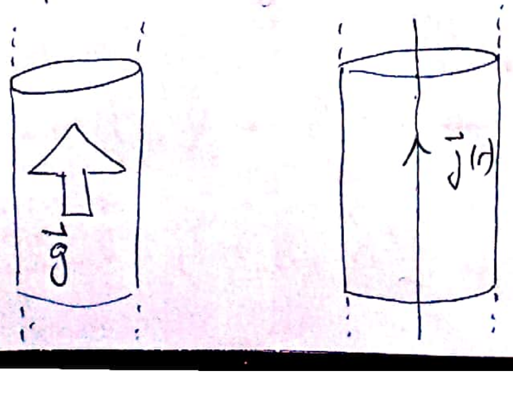
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0 B_\varphi(r)\, \hat{\varphi} \cdot r\, d\varphi\, \hat{\varphi} = 2\pi r B_\varphi(r)$$

son iguales x Ampère

Además: $\mu_0 I_{enc} = \mu_0 \int_S \vec{i} \cdot d\vec{S} = \mu_0 i$

x Ampère: $B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\, \hat{\varphi}}$

Nota: Para distribuciones en sup. y volumen "lineales" es igual.

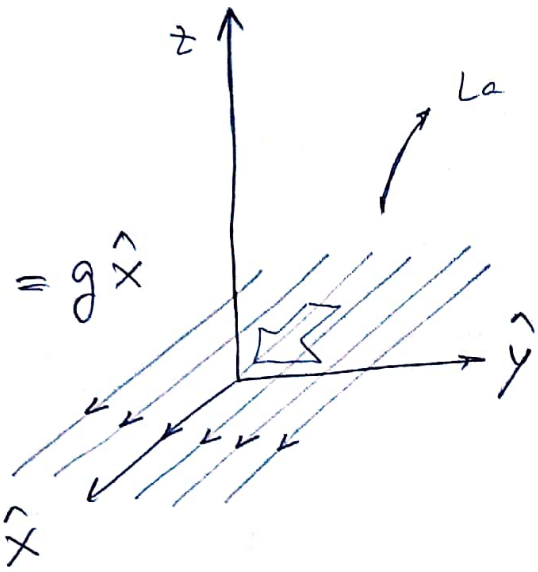


Mismas simetrías pero $\neq$ I_{enc}.

Plano infinito con corriente superficial:

La corriente está en el plano $x-y$.

$\vec{g} = g\,\hat{x}$



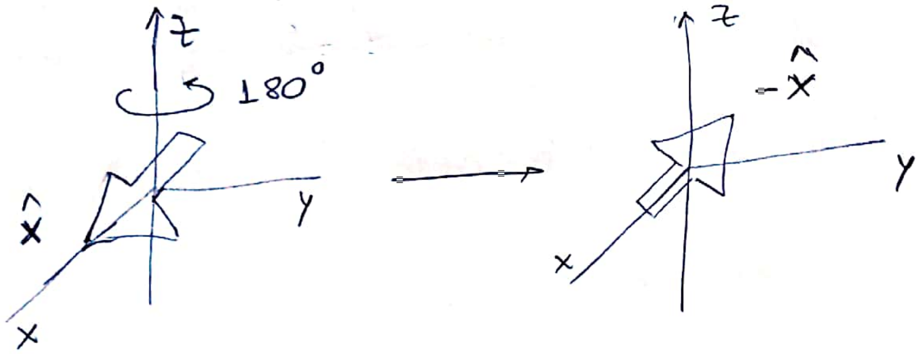
* la dirección de la corriente.

$\hat{x} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = 0.}$

Simetría 1: Traslaciones en $\hat{x}$ y $\hat{y}$ $\Rightarrow$ $\vec{B}$ no depende de x ni y.

Simetría 2:

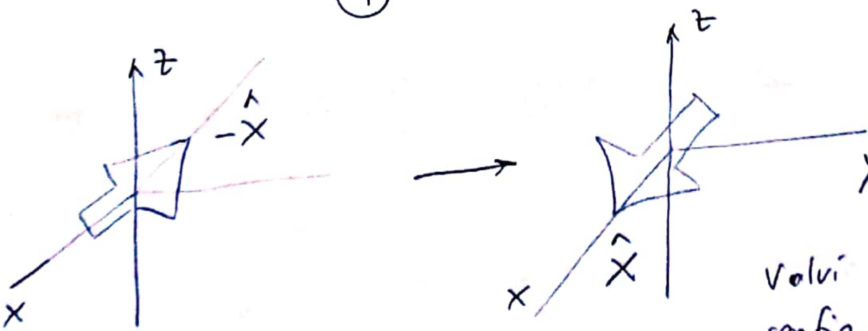
Rotación: $\hat{x}$



(+)

Inversión de corriente:

$\vec{g} \to -\vec{g}$



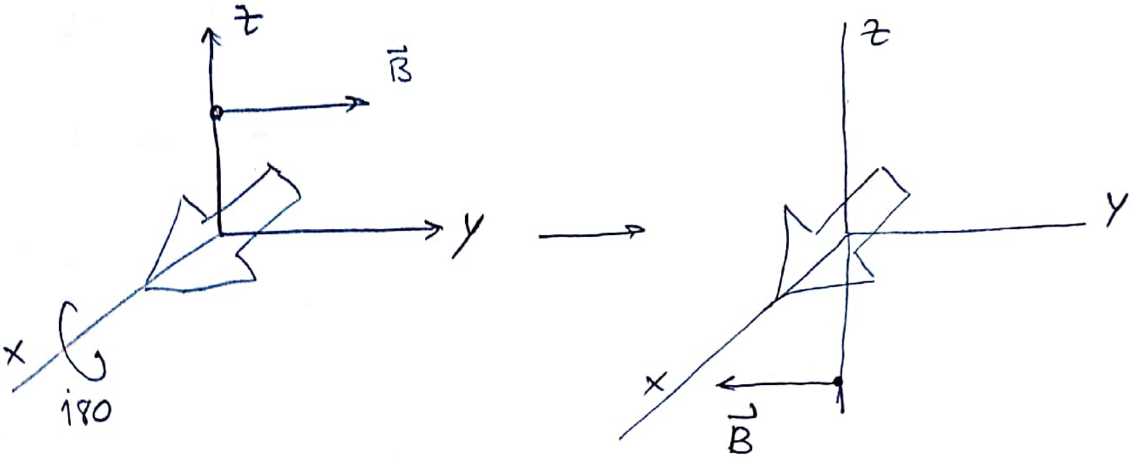
Volví a la config. original.

Para $\vec{B} = B_y\,\hat{y} + B_z\,\hat{z} \xrightarrow{\text{rotación}} \vec{B} = -B_y\,\hat{y} + B_z\,\hat{z}$

$\xrightarrow{\text{inversión}} \vec{B} = B_y\,\hat{y} - B_z\,\hat{z} \Rightarrow \vec{B} = B_y\,\hat{y}$

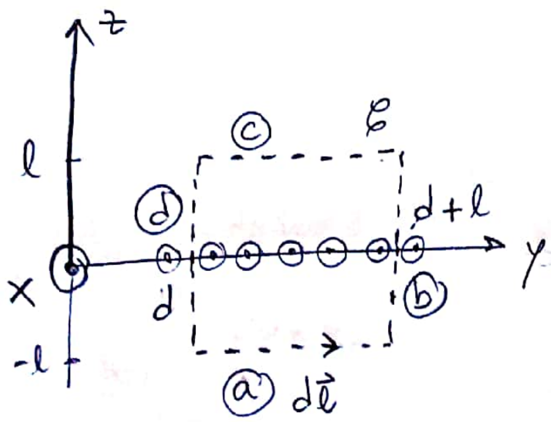
Hasta ahora: $\boxed{\vec{B} = B_y(z)\,\hat{y}}$

Simetría 3: Rotación 180° alrededor de cualquier eje $/\!/ \, \hat{x}$.



$$\Rightarrow \boxed{B_y(z) = -B_y(-z)}$$

Tomo curva "Amperiana" cuadrada:



(a) $d\vec{l} = dy\,\hat{y}$, $\vec{B} = B_y(-l)\,\hat{y}$ $(d \le y \le d+l)$

(b) $d\vec{l} = dz\,\hat{z}$, $\vec{B} = B_y(z)\,\hat{y}$ $(-l \le z \le l)$

(c) $d\vec{l} = -dy\,\hat{y}$, $\vec{B} = B_y(l)\,\hat{y}$ $(d \le y \le d+l)$

(d) $d\vec{l} = -dz\,\hat{z}$, $\vec{B} = B_y(z)\,\hat{y}$ $(-l \; z \le l)$

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{d}^{d+l} B_y(-l)\,\hat{y}\cdot dy\,\hat{y} + \int_{-l}^{l} B_y(z)\,\hat{y}\cdot dz\,\hat{z}$$

$$+ \int_{d}^{d+l} B_y(l)\,\hat{y}\cdot(-dy\,\hat{y}) + \int_{-l}^{l} B_y(z)\,\hat{y}\cdot(-dz\,\hat{z}) = -2B_y(l)\cdot l$$

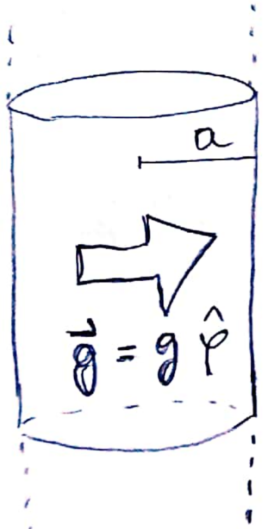
$$\mu_0 I_{conc} = \mu_0 g \cdot l$$

$\Rightarrow$ x <u>Ampère</u>: $\quad -2B_y(l)\cdot l = \mu_0 g l$.

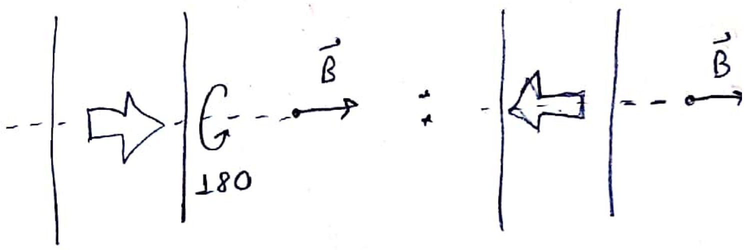
$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 g}{2}\,\hat{y} & z>0 \\ \dfrac{\mu_0 g}{2}\,\hat{y} & z<0 \end{cases}}$$

$\longrightarrow$ (consistente con la regla de la mano derecha)

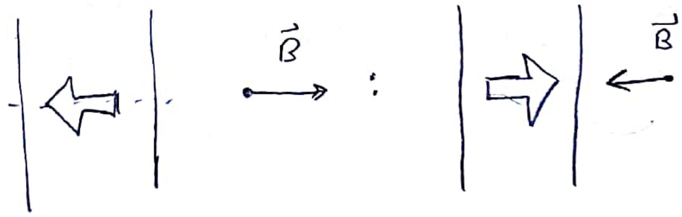
Solenoide ∞



<u>Simetría 1</u>: rotación:



inversión corriente:



$\vec{B}$ cambió de orientación $\Rightarrow$ $B_r = 0$

(uso cilíndricas)

<u>Simetría 2</u>: traslación en $\hat{z}$ $\rightarrow$ $\vec{B}$ no depende de z.

<u>Simetría 3</u>: Rotación en $\hat{\varphi}$ $\rightarrow$ $\vec{B}$ no depende de φ.

$\Rightarrow$ En ppio, $\quad \vec{B} = B_\varphi(r)\,\hat{\varphi} + B_z(r)\,\hat{z}$

Ampère 1

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B_\varphi(R)\,R\,d\varphi = 2\pi R\, B_\varphi(R)$$

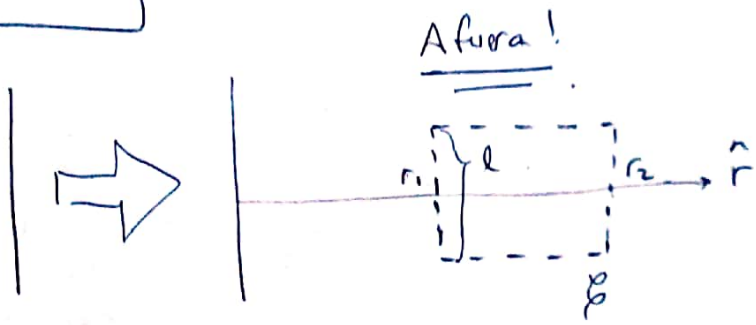
pero! $I_{conc} = 0$

$\Rightarrow \boxed{B_\varphi = 0}$

R puede estar adentro.

$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = B_z(r)\,\hat{z}}$

Ampère 2



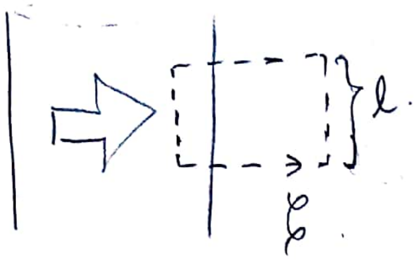
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \left[B_z(r_2) - B_z(r_1)\right] l = \mu_0 I_{conc} = 0$$

$\Rightarrow B_z = cte$, pero además, en el ∞ espero que sea 0!.

$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = 0 \quad \text{cuando} \quad r > a}$

Ampère 3

I



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_z(r) \cdot l = \mu_0 I_{conc}$$

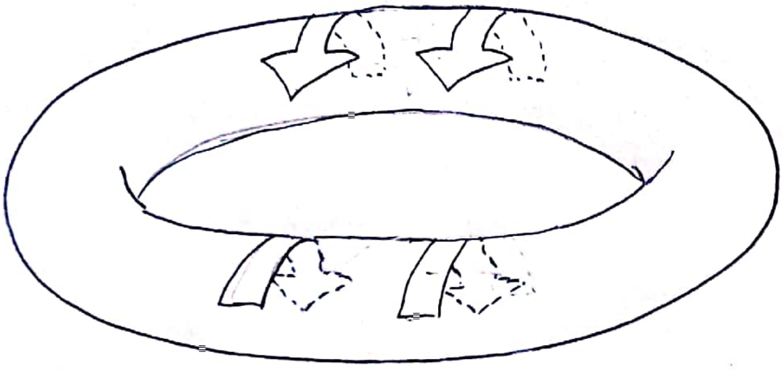
$$= \mu_0 \, g \cdot l \quad (\text{para } r < a).$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \begin{cases} 0 & \text{Afuera.} \\ \mu_0 g \hat{z} & \text{adentro.} \end{cases}}$$

Otro vez consistente con la regla de la mano derecha.

Toroide

Es una dona:



Usar que:

$$\boxed{\vec{B} = B_\varphi(r) \, \hat{\varphi}}$$

En todo el espacio.