Clase 07/05

(A)

Biblio. recomendada:
Gelfand & Fomin, Calculus of variations.

Funcionales

Una funcional es una correspondencia que asigna un número real a cada curva o función perteneciente a cierta clase.

Es una función de funciones J: funciones $\longrightarrow \mathbb{R}$

Ej 1   Sobre el conjunto de curvas en un plano, la funcional podría darme la longitud.

Ej 2   Sobre el conjunto de curvas que unen dos puntos A y B en un plano. Supongamos que una partícula se puede mover por estas curvas con velocidad $v(x,y)$ en el punto (x,y), la funcional podría darme el tiempo que tarda la partícula en ir de A a B.

B

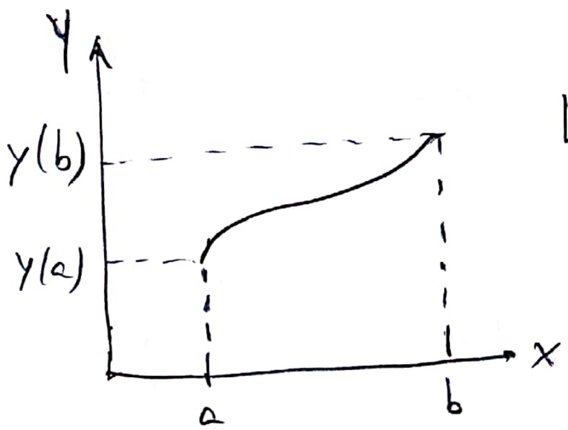
Ej 3 Sea $F(x,y,z)$ una función continua $\Rightarrow$

$$J[y] = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]\,dx$$

con $y(x)$ continua y diferenciable en $[a,b]$.

- Diferentes F's me dan diferentes funcionales J.
- Si $F(x,y,z) = \sqrt{1+z^2}$

$\Rightarrow J[y]$ es la longitud de la curva $y(x)$.



$$\text{Long} = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,dx.$$

Así como para funciones ordinarias podemos analizar continuidad, diferenciabilidad, buscar extremos, etc.

Con funcionales podemos hacer lo mismo.

Espacios de funciones

Def: Espacio lineal es un conjunto R de elementos $x, y, z, \dots$ para los cuales la suma y multiplicación por números reales cumple:

1. $x+y=y+x$
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$
3. $\exists\, 0\in R \,/\, x+0=x \quad \forall x\in R.$
4. $\forall x\in R,\ \exists(-x)\in R \,/\, x+(-x)=0$
5. $1\cdot x=x$
6. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$
7. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$
8. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

Def: Un espacio lineal es normado si a todo $x\in R$ se asocia un número no negativo $\|x\|$ ("norma de x") /

1. $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$
2. $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$
3. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

Escaneado con CamScanner

Ejemplos de espacios lineales normados:

- $C(a,b)$: Espacio de funciones continuas en $[a,b]$.

La norma se define como el máximo de su valor absoluto:

$$\|y\|_0 = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)|$$

- $D_1(a,b)$: Espacio de funciones continuas y con primera derivada continua en $[a,b]$

La norma se define como:

$$\|y\|_1 = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y'(x)|$$

Dos funciones en D_1 se consideran cercanas si $\forall x \in [a,b]$

$$|y(x) - z(x)| < \varepsilon \quad , \quad |y'(x) - z'(x)| < \varepsilon$$

- $D_n(a,b)$: Espacio de funciones continuas con derivadas continuas hasta el orden n en $[a,b]$.

La norma se define como

$$\|y\|_n = \sum_{i=0}^{n} \max_{a \leq x \leq b} |y^{(i)}(x)|$$

Continuidad de una funcional

$J : R \longrightarrow \mathbb{R}$ con R espacio lineal normado.

Def: $J[y]$ es continua en $\hat{y} \in R$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$

$$|J[y] - J[\hat{y}]| < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|y - \hat{y}\| < \delta.$$

Variación de una funcional

Def: Una funcional continua $\phi : R \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal si:

① $\phi[\alpha h] = \alpha \phi[h] \quad \forall h \in R, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

② $\phi[h_1 + h_2] = \phi[h_1] + \phi[h_2] \quad \forall h_1, h_2 \in R$.

Def: El incremento de una funcional $\Delta J[h] \equiv J(y+h) - J(y)$.

Es funcional de $h \in R$ cuando y está fijo.

Def: Una funcional continua es diferenciable si se puede escribir.

$$\Delta J[h] = \underbrace{\delta J[h]}_{\text{funcional continua lineal}} + \varepsilon \|h\| \qquad \varepsilon \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0$$

Se llama la variación de $J(y)$.

(F)

Defi: $J[y]$ tiene un extremo en $\hat{y}$ si $\exists\, \delta > 0 /$

$\Delta J[y-\hat{y}] = J[y] - J[\hat{y}]$ tiene el mismo signo $\forall y / \|y - \hat{y}\| < \delta$

$\boxed{\text{Importante}}$ La variación $\delta J[h]|_{\hat{y}} = 0$ es condición necesaria para que $J[y]$ diferenciable tenga un extremo en $\hat{y}$.

Demostración: Consideremos $J[y]$ con extremo en $\hat{y}$.

Por ser $J[y]$ diferenciable en $\hat{y} \Rightarrow$

$$\Delta J[h] = J[\hat{y}+h] - J[\hat{y}] \equiv \delta J[h] + \varepsilon \|h\|$$

Por ser $\varepsilon \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0$, $\exists\, \delta /$ cuando $\|h\| < \delta$

$\Delta J[h]$ y $\delta J[h]$ tienen el mismo signo.

Supongamos que $\delta J[h] \neq 0$: cuando $\|h\| < \delta$.

$\Rightarrow$ Por ser lineal, $\delta J[-h] = -\delta J[h] \Rightarrow$

$\delta J[h]$ cambia de signo en el intervalo $\|h\| < \delta$

$\Rightarrow \Delta J[h]$ cambia de signo en el intervalo $\|h\| < \delta$.

$\Rightarrow J[y]$ no tiene un extremo en $\hat{y}$

$\Rightarrow$ $\boxed{J[y] \text{ tiene extremo en } \hat{y} \Rightarrow \delta J[h]|_{\hat{y}} = 0}$

Ecuación de Euler

Consideramos la funcional

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

⊙ $F(x, y, z)$ una función con derivadas primeras y segundas continuas para cualquiera de sus argumentos.

⊙ $y(x)$ con derivada primera continua en $x \in [a, b]$ y condiciones de contorno fijas $y(a) = A$, $y(b) = B$.

¿Que condiciones debe satisfacer F para que $J[y]$ tenga un extremo? Vimos que una condición necesaria es $\delta J = 0$.

Calculemos δJ:

$$\Delta J[h] = J[y+h] - J[y] \quad \text{con } h(a) = h(b) = 0$$

$$= \int_a^b F(x, y+h, y'+h')\, dx - \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

H

Desarrollo de Taylor para F:

$$\Delta J(h) = \int_a^b \Big[\cancel{F(x,y,y')} + F_y(x,y,y')h + F_{y'}(x,y,y')h' + \dots$$

$$- \cancel{F(x,y,y')}\Big]dx.$$

(derivadas parciales)

$$= \int_a^b \Big[F_y(x,y,y')h + F_{y'}(x,y,y')h' + \dots\Big]dx.$$

$$\Rightarrow \delta J[h] = \int_a^b \Big[F_y(x,y,y')h + F_{y'}(x,y,y')h'\Big]dx$$

$$= \int_a^b \Big[F_y h + (F_{y'} h)' - (F_{y'})' h\Big]dx.$$

$$= \underbrace{\Big[F_{y'} h\Big]_a^b}_{=0} + \int_a^b \Big[F_y - (F_{y'})'\Big] h \, dx \overset{!}{=} 0$$

Como h es arbitrario $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0}$

(ver página siguiente)

Ecuación de Euler

(Este es el problema 2 de la guía 2)

Si $J[y]$ tiene un extremo en $\hat{y}$ $\Rightarrow$ $\hat{y}$ satisface la ecuación de Euler

I

En el recorrido de recién usamos que:

Si $\int_a^b \underbrace{\alpha(x)}_{\text{continua}} h(x)\, dx = 0$, $\forall\, h(x)$ con derivada continua en $[a,b]$ tal que $h(a) = h(b) = 0$

(Problema 1 de 6 guía 2) $\Rightarrow \boxed{\alpha(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]}$.

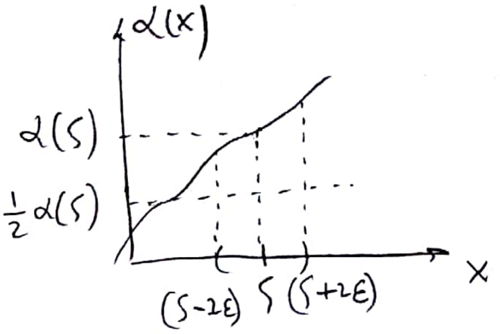
<u>Lo demostramos:</u>

<u>Supongamos lo contrario</u> $\Rightarrow \exists\, \zeta \in (a,b) \,/\, \alpha(\zeta) \neq 0$

(por ejemplo $\alpha(\zeta) > 0$)

Como α es continuo $\Rightarrow \exists\, \epsilon > 0 \,/\, |x - \zeta| < 2\epsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\alpha(\zeta) \leq \alpha(x)$



Tomo una función particular para $h(x)$:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [a,b] \setminus [\zeta - \epsilon, \zeta + \epsilon] \\ > 0 & \forall x \in (\zeta - \epsilon, \zeta + \epsilon) \end{cases}$$

(No se me ocurre ninguna función, pero seguro que existe!)

$$\Rightarrow \int_a^b \alpha(x) h(x)\, dx = \int_{\zeta-\epsilon}^{\zeta+\epsilon} \alpha(x) h(x) \geq \frac{\alpha(\zeta)}{2} \int_{\zeta-\epsilon}^{\zeta+\epsilon} h(x) > 0$$

(Contradice lo supuesto).

Problema 3

J

Sean dos puntos del plano $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$ y una curva $y = y(x)$ que une P_1 y P_2.

Probar que la longitud de la curva es mínima si la curva es una recta.

Vimos antes que la longitud estaba dada por una funcional:

$$L = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1 + y'^2}}_{F(x,y,y')} \, dx .$$

Busco extremar L $\Rightarrow$ necesito que F satisfaga la ecuación de Euler.

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{para } F(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c = cte.$$

$$\Rightarrow y' = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \equiv a \Rightarrow \boxed{y(x) = ax + b}$$

k

Las constantes a y b se obtienen de pedir que y(x) pase por P_1 y P_2.

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = a x_1 + b \\ y_2 = a x_2 + b \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

$$\Rightarrow b = y_1 - a x_1 = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x_1$$

$$= \frac{\cancel{x_1 y_1} - x_2 y_1 \cancel{- y_1 x_1} + y_2 x_1}{x_1 - x_2} \Rightarrow \boxed{b = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}}.$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x + \left(\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}\right)}$$