Ondas electromagnéticas

Clase 16/07

(A)

En 1 dimensión: Ecuación de la onda.

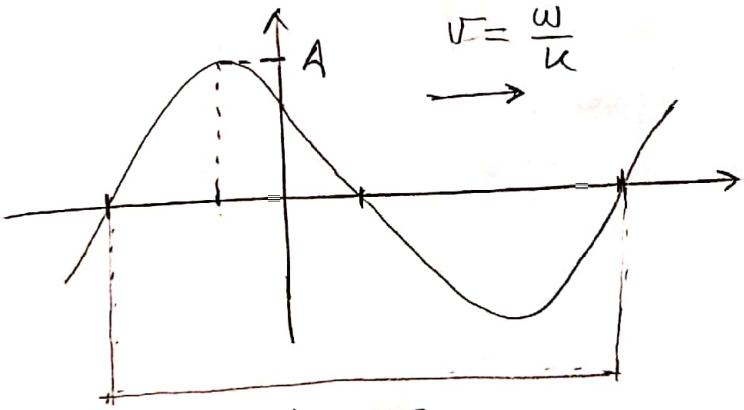
$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$$

v: velocidad de la onda.

Solución: $f(z,t) = g(z - vt) + h(z + vt)$

onda viajando a derecha — onda mov. a izquierda

Onda sinusoidal: $f(z,t) = A\cos[kz - \omega t + \varphi]$



$v = \frac{\omega}{k}$

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ longitud de onda.

$T = \frac{\lambda}{v}$ periodo.

$\nu = \frac{1}{T}$ frecuencia

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ frecuencia angular.

Notación compleja:

$$f(z,t) = \mathrm{Re}[\tilde{f}(z,t)]$$

$$\tilde{f}(z,t) = \tilde{A}\, e^{i(kz - \omega t)} \quad , \; \tilde{A} = A e^{i\varphi}$$

En 3 dimensiones: Ecuación de onda.

$$\boxed{\nabla^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$$

Solución: $f(\vec{r},t) = f(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) + f(\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t)$

con $v^2 = \dfrac{\omega^2}{k^2}$, $\vec{k}$: dirección de propagación.

También: $f(r,t) = \dfrac{1}{r} f(r - vt) \longrightarrow$ (ondas circulares en esféricas)

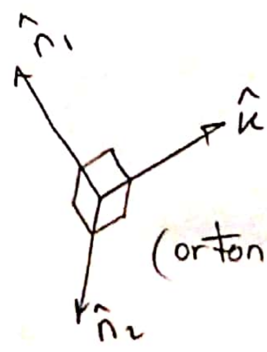
Ondas vectoriales en 3 dimensiones:

Ecuación de onda $\boxed{\nabla^2 \vec{F} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = 0}$

Cada componente es de la forma anterior

Onda sinusoidal:

$$\vec{F}(r,t) = F_1 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi)\,\hat{n}_1$$
$$+ F_2 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi + \varepsilon)\,\hat{n}_2$$
$$+ F_k \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi + \delta)\,\hat{k}$$



(ortonormales)

$\boxed{\text{Transversal: } F_k = 0}$ $\boxed{\text{Longitudinal: } F_1 = F_2 = 0}$

Ondas electromagnéticas:

Ecs. Maxwell en vacío: $\left(c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \\ -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

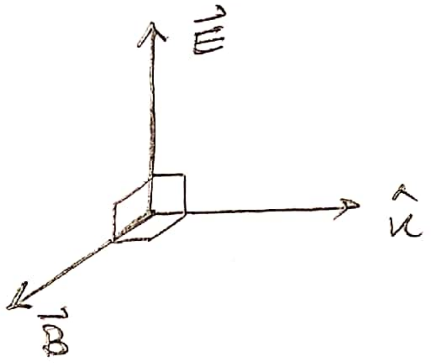
$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}$$

En este contexto una onda sinusoidal se llama monocromática

Si a una onda electromagnética monocromática le aplico Maxwell:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 &\Rightarrow E_k = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 &\Rightarrow B_k = 0 \end{aligned}\right\} \text{Las ondas EM son transversales.}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{1}{c} (\hat{k} \times \vec{E})}$$ $\vec{B}$ queda definido por $\vec{E}$



(D)

· Son perpendiculares entre sí y al sentido de propagación.

El flujo de energía está dado por el vector de Poynting.

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = c \cdot u\,\hat{k}}$$

con $\boxed{u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}|\vec{B}|^2\right)}$ densidad de energía

La onda EM monocromática más general es:

$$\boxed{\vec{E} = E_{0x}\cos(kz - \omega t + \varphi)\,\hat{x} + E_{0y}\cos(kz - \omega t + \varphi + \varepsilon)\,\hat{y}}$$

$\frac{\omega}{k} = c$, $\lambda = \frac{2\pi}{k} \rightarrow$ longitud de onda (color)

Se propaga en $\hat{z}$ y oscila transversalmente en $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

$\vec{B}$ queda definido por $\vec{E}$, así que no hace falta especificarlo.

La polarización de la onda depende de $\boxed{E_{0x}, E_{0y} \text{ y } \varepsilon}$

Tipos de ondas:

$$\vec{E} = E_{ox}\cos(kz - \omega t + \varphi)\hat{x} + E_{oy}\cos(kz - \omega t + \varphi + \varepsilon)\hat{y}$$

(supongo $0 \leq \varepsilon \leq 2\pi$)

Onda con polarización lineal:

$\boxed{\varepsilon = 0, \pi}$ (mod $2\pi n$) $\boxed{E_{ox} \text{ y } E_{oy} \text{ cualquier cosa.}}$

$$\vec{E} = E_{ox}\cos(kz - \omega t + \varphi)\hat{x} + E_{oy}\left[\cos(kz - \omega t + \varphi)\cos(\varepsilon) - \operatorname{sen}(kz - \omega t + \varphi)\underbrace{\cancel{\operatorname{sen}(\varepsilon)}}_{0}\right]\hat{y}$$

$$= \cos(kz - \omega t + \varphi)\underbrace{\left[E_{ox}\hat{x} + E_{oy}\cos(\varepsilon)\hat{y}\right]}_{\vec{n}}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \cos(kz - \omega t + \varphi)\,\vec{n}}$$ con $\hat{n} \cdot \hat{z} = 0$

$\hat{n}$: vector de polarización.

Onda con polarización circular

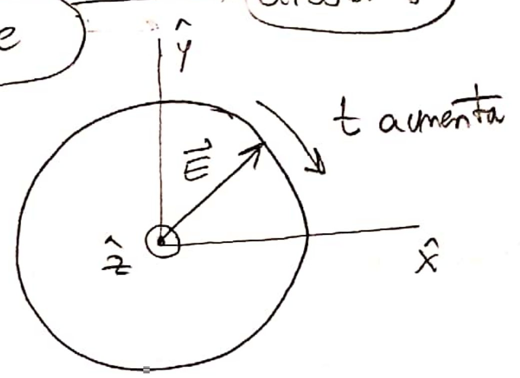
$\varepsilon = \frac{3}{2}\pi$, $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ (circular derecha)

Uso $\cos\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) = \operatorname{sen}(\alpha)$

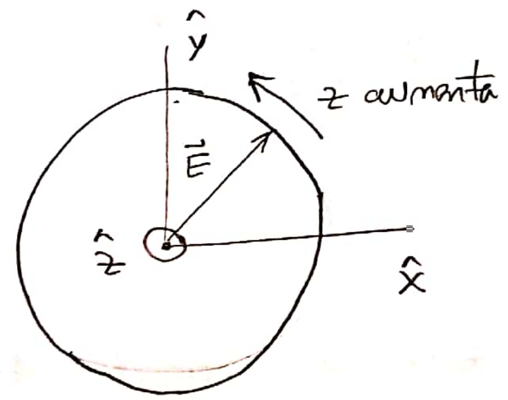
$$\vec{E} = E_0 \left[\cos(kz - \omega t + \varphi)\,\hat{x} + \operatorname{sen}(kz - \omega t + \varphi)\,\hat{y}\right]$$

$|\vec{E}| = E_0 = cte$ → circular !

Fijo z :



Fijo t :



} Por esto es circular derecha.

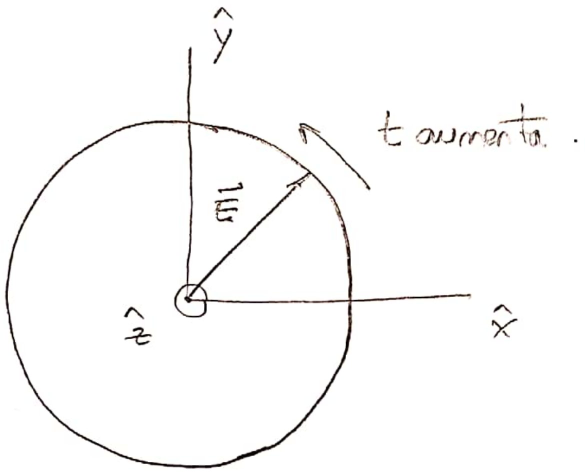
$\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ (circular izquierda)

Uso $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}(\alpha)$

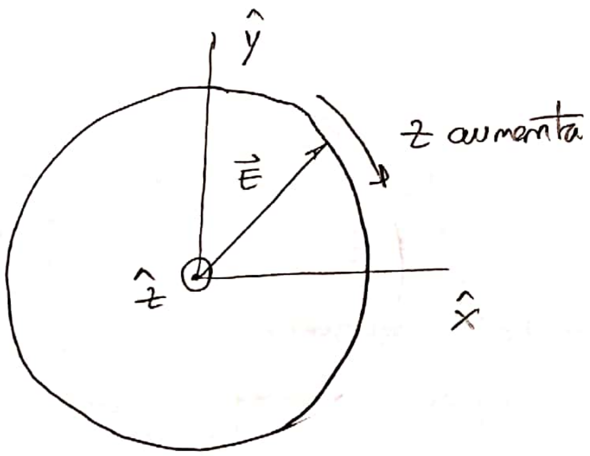
$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi)\,\hat{x} - E_0 \operatorname{sen}(kz - \omega t + \varphi)\,\hat{y}$$

$|\vec{E}| = E_0 = cte$ — circular !

Fijo z:



Fijo t:



Por esto es circular izquierda

En cualquier otro caso la onda se dice.

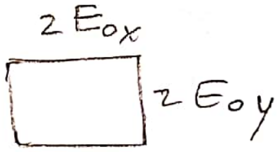
elípticamente polarizada.

$$\vec{E} = \underbrace{E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi)}_{= E_x}\,\hat{x} + \underbrace{E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi + \varepsilon)}_{E_y}\,\hat{y}$$

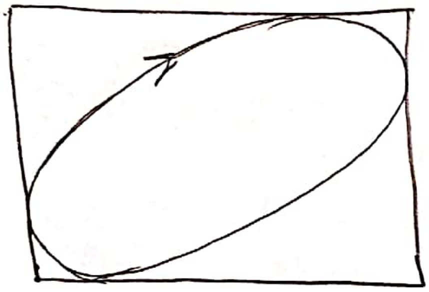
H

Satisfacen la ecuación de la elipse:

$$\boxed{\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 - 2\,\frac{E_x}{E_{ox}}\,\frac{E_y}{E_{oy}}\cos(\varepsilon) = \operatorname{sen}^2(\varepsilon)}$$

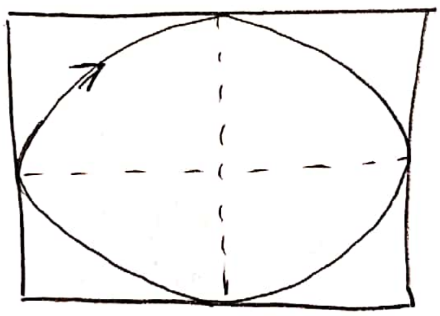
La elipse se enmarca en un rectángulo  :

(IZQ)



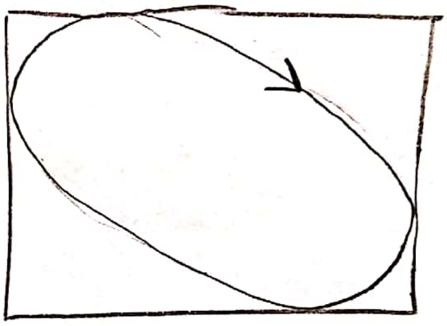
$0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$

Degenera en una recta



$\varepsilon = \frac{\pi}{2}$

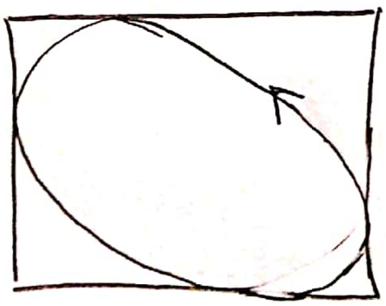
(Es circular si $E_{ox} = E_{oy}$)



$\frac{\pi}{2} < \varepsilon < \pi$

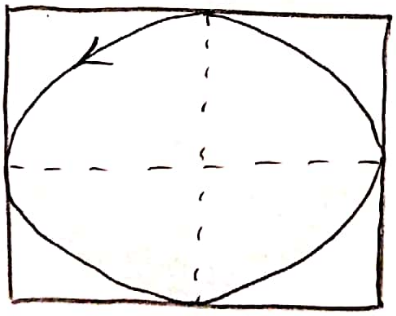
Degenera en una recta.

(DER)



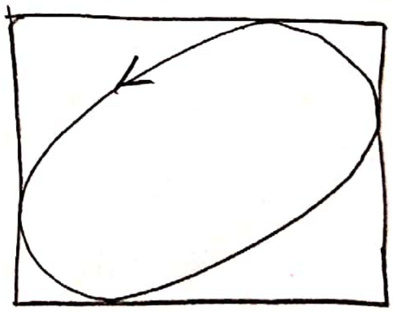
$\pi < \varepsilon < \frac{3}{2}\pi$

Degenera en una recta.



$\varepsilon = \frac{3}{2}\pi$

(Es circular si $E_{ox} = E_{oy}$)



$\frac{3}{2}\pi < \varepsilon < 2\pi$

Degenera en una recta.