Práctica del 28/5/2020: introducción al problema de los dos cuerpos

1 de junio de 2020

En la práctica anterior empezamos a estudiar potenciales centrales en dos dimensiones. Esto es, problemas con lagrangianos de la forma

$$\mathcal{L}(r, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}|) \tag{1}$$

donde el potencial depende sólo de la distancia al centro de fuerzas $\boldsymbol{r_0}$. Por simplicidad, vamos a tomar el sistema de referencia con origen en el centro de fuerzas, $\boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{0}$. Lo que hicimos fue analizar primero las simetrías para simplificar el problema; en particular, es evidente que este lagrangiano no depende de la coordenada angular θ ni la temporal t, que tienen asociadas las cantidades conservadas $\boldsymbol{p_\theta}$ y E, el momento angular y la energía. Esto fue suficiente para llevar el problema de dos dimensiones (r y θ) a uno unidimensional, de r. La idea era estudiar algunas características salientes de la dinámica: los puntos de retorno, la velocidad radial máxima, el período, los tipos de órbitas. En esta clase vamos a partir de todo esto que ya planteamos para estudiar el problema de dos cuerpos; en particular, veremos que dicho problema se reduce fácilmente al anterior haciendo un simple cambio de coordenadas

Nótese que lo que estamos haciendo cuando reducimos el problema de dos dimensiones al de uno, *no es lo mismo* que lo que hacíamos con las condiciones de vínculo. Los vínculos son restricciones geométricas en el espacio del problema, mientras que lo que hacemos con el potencial central tiene que ver con la naturaleza de la ecuación diferencial. Es importante tener esto en cuenta para concluir que *no se pueden introducir las cantidades conservadas en el lagrangiano*. En cambio, sí es válido y muy útil hacerlo en la energía: esto es lo que nos permite hacer la reducción dimensional del problema. Esta se escribe

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + V(r) \tag{2}$$

Pero el momento angular conservado $p_\theta = m r^2 \dot{\theta}$ relaciona la velocidad angular $\dot{\theta}$ con la distancia r de manera fija a todo tiempo, lo cual nos permite escribir una energía que sólo depende de la coordenada r:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{ef}(r) \tag{3}$$

Siendo $V_{ef} = V(r) + \frac{p_\theta^2}{2mr^2}$ el potencial efectivo.

Estudiemos, ahora sí, el problema de dos cuerpos. El lagrangiano es muy parecido al (1):

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2^2 - V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) \tag{4}$$

El cambio de coordenadas que hacemos es a otras dos variables que resultan más útiles: la posición del centro de masas, por un lado, y la distancia entre las partículas,

$$\boldsymbol{R}_{CM} = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \tag{6}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R}_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \boldsymbol{r} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_{CM} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \boldsymbol{r} \tag{8}$$

Y el lagrangiano resulta

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{\boldsymbol{R}}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(r) \tag{9}$$

donde definimos la *masa reducida* $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Esta elección de coordenada es evidentemente ventajosa: no sólo porque el potencial ahora es central en la coordenada r, además el movimiento en $\boldsymbol{R}_{CM}$ y en $\boldsymbol{r}$ está desacoplado (lo cual queda en evidencia en los términos separados de la energía cinética) y, como si esto fuera poco, también sabemos que el sistema está aislado, así que podemos elegir un sistema de referencia en el centro de masas (que es inercial), es decir, $\dot{\boldsymbol{R}}_{CM} = 0$. El lagrangiano, entonces, queda en dicho sistema de referencia como el de un potencial central

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{2} \mu \dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(r) \tag{10}$$

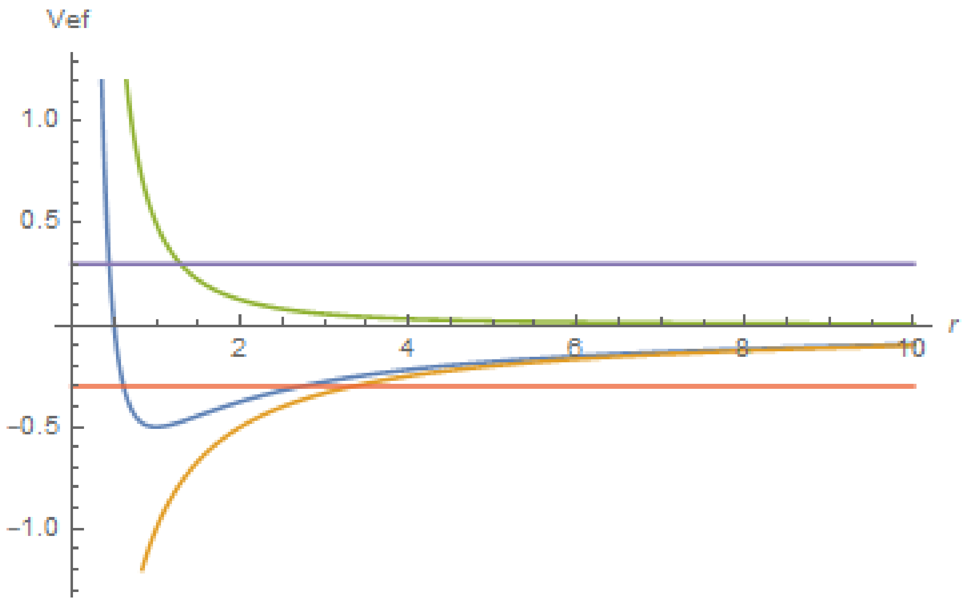
de una partícula *ficticia* de masa μ y posición $\boldsymbol{r}$. Después de resolver este problema podemos usar las ecuaciones (7) y (8) para volver al de las dos partículas. Una manera de interpretar intuitivamente la masa ficticia es como la expresión más simple, con unidades de masa, que cuando las masas son muy distintas se aproxima a la masa más pequeña (sea esta m_1 o m_2). Esto tiene sentido porque en este caso límite la dinámica es solo de la masita liviana, mientras que la pesada se queda prácticamente quieta.

Hay una última diferencia entre este problema y el de la clase pasada: en este caso, $\boldsymbol{r}$ es un vector tridimensional, y no bidimensional. Sin embargo, esto es sólo una dificultad aparente, gracias a la conservación del momento angular. Elijamos un sistema de coordenadas de manera tal que $\boldsymbol{p_\theta} = p_\theta \hat{z}$. Entonces,

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = p_\theta \hat{z} \tag{11}$$

Por la naturaleza del producto vectorial, esto significa que tanto $\boldsymbol{r}$ como $\boldsymbol{p}$ son perpendiculares al eje z *para todo tiempo*, lo que es decir, están en el plano xy, en cualquier tiempo t; o sea, la dinámica ocurre en un plano y el problema sigue siendo bidimensional.

Estudiemos un poco mejor, ahora sí, este problema. Para empezar, ganemos intuición (una vez más) mirando el gráfico del potencial efectivo. Esto es sumamente útil si tenemos en cuenta la expresión (3) de la energía mecánica total. Aquí, en naranja se muestra el potencial físico, gravitatorio; en verde, el potencial centrífugo; en azul, el potencial efectivo. Las líneas horizontales corresponden a valores de energía mecánica. El potencial físico, en este caso, es puramente gravitatorio ($V(r) \sim -\frac{1}{r}$).



Vemos que la línea horizontal más baja se cruza con el potencial en dos puntos (caso ligado). En estos puntos, pues, la energía es puramente potencial, lo cual implica (por conservación de la energía mecánica) que la energía cinética es cero; o sea, la velocidad es cero. Sin embargo, estos no son puntos de equilibrio: la derivada del potencial, que es la fuerza, es distinta de cero, y acelera a la partícula siempre hacia el pozo: es una *fuerza restitutiva* (efectiva, en este caso). La partícula, entonces, no puede salir de este pozo de potencial, el intervalo de r delimitado por estos dos puntos, denominados *puntos de retorno*. En efecto, entonces, estos puntos de retorno se obtienen analíticamente resolviendo la ecuación que iguala el potencial efectivo con la energía:

$$V(r) + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} = E \tag{12}$$

Lo cual es equivalente a introducir la condición $\dot{r} = 0$ en la energía total (3). Es tentador muchas veces pensar que dicha condición corresponde a los equilibrios, ya que uno se imagina a los equilibrios como escenarios en los que las cosas están quietas. Sin embargo, la condición de equilibrio (en la coordenada r) es *también*, en realidad, una condición en la derivada segunda; es decir, $\ddot{r} = 0$, que no haya fuerzas actuando sobre el objeto. Pero las ecuaciones de Newton nos dicen que $m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{ef}}{\partial r}$, así que los equilibrios son los valores de r tales que la derivada del potencial efectivo allí es cero: los extremos del potencial. En el gráfico el único extremo es un mínimo. En particular, es sencillo notar a ojo que los mínimos se corresponden a equilibrios *estables*, y los máximos a *inestables*.

Recordemos nuevamente que estamos haciendo un análisis de la coordenada radial. Todavía no sabemos lo que le pasa a la coordenada angular, pero sigue siendo parte del problema. En este sentido, los equilibrios en r se corresponden a órbitas circulares (claro, de radio constante). Una órbita circular estable, como la del potencial que estamos viendo ahora, será una órbita que, ante una perturbación pequeña en r, no será demasiado distinta de un círculo. Ahora bien, ¿qué podemos decir de cómo son estas órbitas en general? Sin preocuparnos todavía por la forma funcional, podríamos preguntarnos de manera general si las órbitas son cerradas o abiertas.

Una órbita cerrada es aquella que se repite al cabo de una cierta cantidad de tiempo. Como las ecuaciones de movimiento tienen una solución única dadas condiciones iniciales de posición y velocidad, podemos notar que la condición recién mencionada equivale a la de que

$$\boldsymbol{r}(t+\tau) = \boldsymbol{r}(t) \tag{13}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t+\tau) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) \tag{14}$$

para todo t. Sin embargo, basta con hallar un solo t debido a que la unicidad de las soluciones nos garantiza que la solución entre t y $t+\tau$ sea igual a la solución entre $t+\Delta t$ y $t+\tau+\Delta t$, para cualquier Δt. En coordenadas polares, esto es

$$r(t+\tau) = r(t); \;\; \theta(t+\tau) = \theta(t) + 2k\pi \tag{15}$$

$$\dot{r}(t+\tau) = \dot{r}(t); \;\; \dot{\theta}(t+\tau) = \dot{\theta}(t) \tag{16}$$

Pero además sabemos que r y $\dot{\theta}$ están relacionadas a través del momento angular p_θ, así que si una de las dos es periódica la otra también; r y $\dot{r}$ están también relacionadas a través de la energía E (ecuación 3). Por lo tanto, la condición de órbita cerrada es la ecuación (15). Ahora bien, sabemos que tanto r como θ son variables periódicas en el caso ligado, llamemos a sus períodos τ_r y τ_θ, respectivamente; lo que no sabemos es si es posible encontrar una periodicidad τ que sea común a ambos. Pero las periodicidades de r son $n\tau_r$ y las de θ son $m\tau_\theta$, con $n, m \in \mathbb{N}$, así que la condición de periodicidad común se puede expresar:

$$n\tau_r = m\tau_\theta \tag{17}$$

O bien, $\tau_r = q\tau_\theta$, con q racional y positivo. Resulta ser que hay dos potenciales para los cuales esto siempre ocurre: $\sim \frac{1}{r}$ y $\sim r^2$. En cualquier otro caso, sin embargo, la condición es no trivial. En general, vamos a tener algún potencial que puede ser más o menos complicado. Puede ser interesante, si es complicado, linealizar las fuerzas y ver cuál es la condición de órbitas cerradas en ese caso, que es lo que tendrán que hacer para resolver el problema 10 de la guía 3. La idea es que cuando se linealiza queda una fuerza tipo oscilador armónico, con algo que cumpla el rol de la constante elástica y, por ende, de la frecuencia, que es lo que nos va a permitir imponer la condición (17).

Ahora vayamos un poco más allá y veamos qué más información podemos sacar si integramos las ecuaciones. Pensemos en el problema 12 de la guía 3, donde nos dan el potencial

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha > 0 \tag{18}$$

Nos conviene escribir directamente la energía, que es una integral primera en r, es decir una ecuación diferencial de primer orden,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^2} \tag{19}$$

Si definimos $\beta = \frac{l^2}{2m} - \alpha$, entonces

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\beta}{r^2} \tag{20}$$

Despejando $\dot{r}$,

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\frac{\sqrt{Er^2 - \beta}}{r} \tag{21}$$

donde hay que considerar ambos signos, que corresponden a que la partícula puede estar yendo hacia adentro o hacia afuera. Podemos escribir también, en general, la expresión para cualquier potencial efectivo,

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{ef}(r)\right]} \tag{22}$$

Asumiendo una condición inicial $r(t_0) = r_0$, se puede integrar

$$\Delta t = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{ef}(r')\right]}}dr' \tag{23}$$

Para el potencial del problema 12,

$$\Delta t = \pm\sqrt{\frac{m}{E}}\int_{r_0}^{r} \frac{r'}{\sqrt{r'^2 - \beta/E}}dr' \tag{24}$$

Integrando queda, entonces,

$$\Delta t = \pm\sqrt{\frac{m}{E}}\Big(\sqrt{r^2 - \beta/E} - \sqrt{r_0^2 - \beta/E}\Big) \tag{25}$$

Despejando r se obtiene,

$$r = \left[\frac{E}{m}\Delta t\Big(\Delta t \pm 2\sqrt{\frac{r_0^2 - \beta/E}{E/m}}\Big) + r_0^2\right]^{1/2} \tag{26}$$

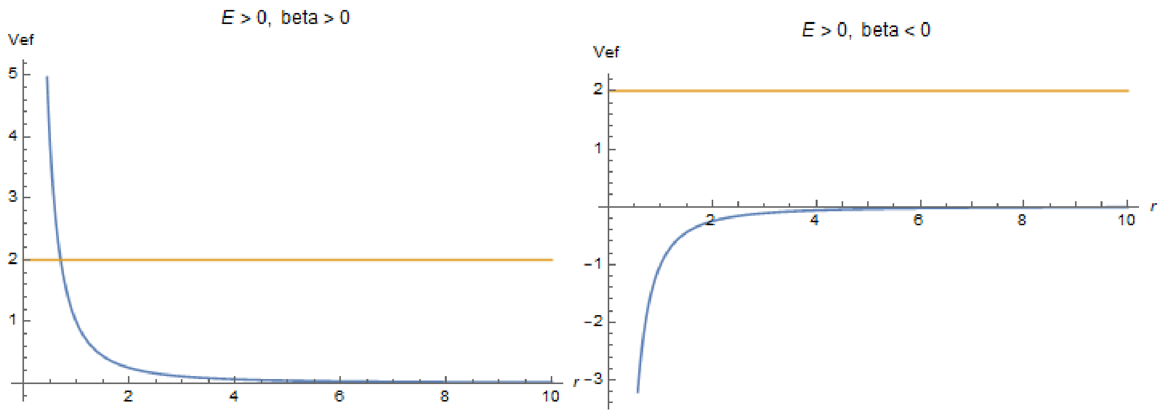
El problema nos propone analizar tres casos:

$$E > 0, \;\; \beta > 0 \tag{27}$$

$$E > 0, \;\; \beta < 0 \tag{28}$$

$$E < 0, \;\; \beta > 0 \tag{29}$$

Mientras que E impone límites a la energía potencial (efectiva), β (que si se fijan en la definición, está asociado al momento angular) altera la forma del potencial efectivo en sí. En ambos casos, cuando fijamos la energía o el momento angular, tengan en cuenta que lo que estamos haciendo, en definitiva, es fijar las condiciones iniciales. ¿Por qué? Porque como E se conserva, imponer condiciones iniciales en la ecuación de la energía (20) es fijar *esa* energía para el resto de la eternidad; de la misma manera, como $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$, imponer condiciones iniciales es fijar el momento angular (y en consecuencia β). Comparemos, ahora sí, los primeros dos casos gráficamente:



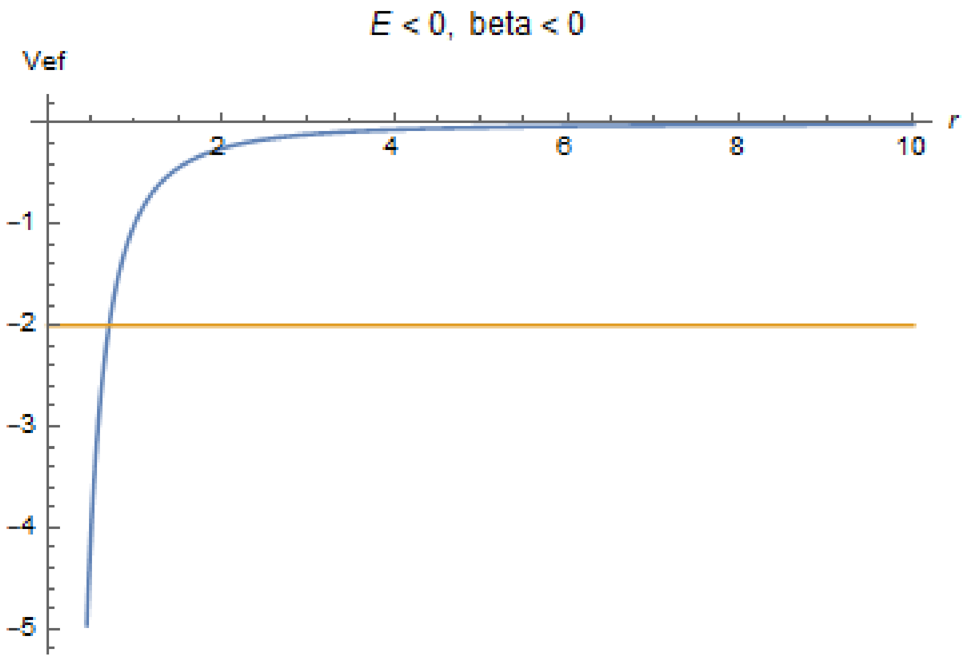
En el primer caso se ve que el potencial queda limitado por la energía, lo cual corresponde a una barrera de potencial en un r lo suficientemente pequeño. En el segundo, en cambio, se ve un pozo infinito que no está limitado de ninguna manera: el movimiento no está ligado. Deberíamos poder deducir esto de las ecuaciones (25) y (26). En el primer caso, veamos que, en la ecuación (25), no existe Δt si $r < \sqrt{\frac{\beta}{E}}$, porque el radicando de $\sqrt{r^2 - \beta/E}$ se hace negativo (esto corresponde a la condición de que $E > V_{ef}$, es precisamente esa, y queda claro mirando la ecuación (23)). En el segundo caso, en cambio, como β/E es negativo, el radicando siempre es positivo y Δt siempre existe. Pensemos, en particular en este caso, en qué Δt se llega a $r = 0$:

$$\Delta t\Big|_{r=0} = \pm\sqrt{\frac{m}{E}}\Big(\sqrt{-\beta/E} - \sqrt{r_0^2 - \beta/E}\Big) \tag{30}$$

Esta expresión es positiva sólo si se toma signo $-$, lo cual corresponde, de acuerdo a (21), a tomar velocidades negativas. Esto es porque el segundo término de la expresión (30), que está restando, siempre es más grande que el segundo (planteen la desigualdad y van a darse cuenta de que esto es así, por el r_0^2 de diferencia). Esto tiene sentido, ya que como el movimiento es no ligado, si lanzamos a la partícula con velocidad positiva en el segundo caso, esta se alejará hacia el infinito sin volver jamás: no existe $\Delta t > 0$ tal que $r = 0$. Si lanzamos a la partícula con velocidad negativa, en cambio, esta llegará a $r = 0$ en un tiempo finito

$$\Delta t\Big|_{r=0} = \frac{1}{E}\left(\sqrt{mEr_0^2 - m\beta} - \sqrt{-m\beta}\right) \tag{31}$$

El tercer caso no es físico, debido a que la energía es menor que el potencial. Analicemos, en cambio, $E < 0$, $\beta < 0$ (pozo y energía negativa). El gráfico tiene esta pinta:



Esto corresponde a un movimiento ligado por arriba y, de hecho, sea cual sea la velocidad inicial, la partícula terminará en $r = 0$. Si la velocidad inicial es negativa vale la ecuación (31), con la salvedad de que, en este caso, $E < 0$ (esto nos restringe r_0 de la manera que ya sabemos). Si es positiva, hay que encontrar el tiempo que tarda, primero, en llegar al punto de retorno y, desde ahí, cuánto le toma llegar a $r = 0$. De la ecuación (25), teniendo en cuenta que el retorno ocurre en $r_{max} = \sqrt{-\beta/E}$, a la partícula le toma

$$\Delta t_{r_0 \to r_{max}} = \sqrt{\frac{m}{E}}\left(\sqrt{-2\beta/E} - \sqrt{r_0^2 - \beta/E}\right) \tag{32}$$

llegar al retorno y

$$\Delta t_{r_{max} \to 0} = \frac{1}{E}\sqrt{-m\beta}(\sqrt{2} - 1) \tag{33}$$

en llegar a 0 desde allí. Por lo tanto, el tiempo total que tarda la partícula si tiene velocidad inicial positiva es

$$\Delta t = \sqrt{\frac{m}{E}}\left(\sqrt{-2\beta/E} - \sqrt{r_0^2 - \beta/E}\right) + \frac{1}{E}\sqrt{-m\beta}(\sqrt{2} - 1) \tag{34}$$