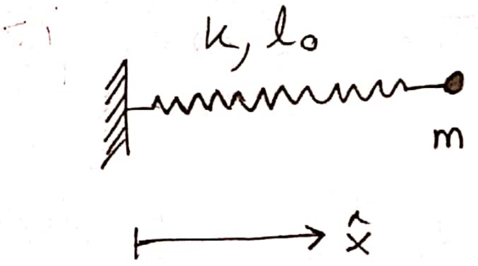
Fuerza elástica

La fuerza que ejerce un <u>resorte ideal</u> es:

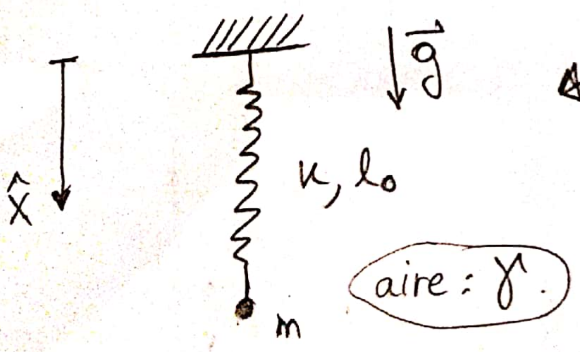


$$\boxed{\vec{F}_{elástica} = -k(x - l_0)\,\hat{x}}$$

k: cte elástica del resorte $[k] = \frac{N}{m} = \frac{kg}{s^2}$.

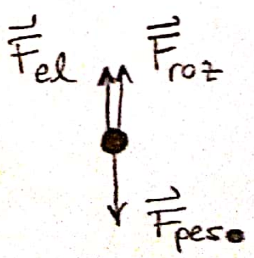
l_0: longitud natural del resorte.

Supongamos el caso en el que una masa es actuada <u>simultáneamente</u> por la fuerza peso, la fuerza elástica y la fuerza de rozamiento:



El problema es <u>unidimensional</u>: $\hat{x}$

<u>Diagrama de cuerpo libre:</u>



Las fuerzas son:

$$\begin{cases} \vec{F}_{peso} = mg\,\hat{x} \\ \vec{F}_{roz} = -\gamma\,\dot{x}\,\hat{x} \\ \vec{F}_{el} = -k(x-l_0)\,\hat{x} \end{cases}$$

Ecuación de Newton:

$$\vec{F}_{peso} + \vec{F}_{roz} + \vec{F}_{el} = m\,\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad mg\,\hat{x} - \gamma\,\dot{x}\,\hat{x} - k(x-l_0)\,\hat{x} = m\,\ddot{x}\,\hat{x}$$

$\Rightarrow$ reescribo: $\boxed{\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{k l_0}{m}}$

Este es un caso particular de ...

Ecuación de Euler: $\boxed{\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)}$

¿Cómo se resuelve?

Ecuación de Euler:

$$\boxed{\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)}$$

Si $f(t) = 0 \longrightarrow$ homogénea.

$f(t) \neq 0 \longrightarrow$ inhomogénea

<u>Solución general</u>: $x(t) = \underbrace{x_H(t)}_{\text{homogénea}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{particular}}$.

$$\boxed{\ddot{x}_H + b\dot{x}_H + cx_H = 0}$$

$$\boxed{\ddot{x}_p + b\dot{x}_p + cx_p = f(t)}$$

(Típicamente la solución particular tiene la forma de $f(t)$).

<u>Solución de la ecuación homogénea</u>:

Propongo $x_H(t) \sim e^{\lambda t}$ (le permito a $\lambda \in \mathbb{C}$).

Como es una ec. de segundo grado, la solución $x_H(t)$ será una combinación lineal de soluciones del tipo $e^{\lambda t}$.

Cuando meto en la ec. homogénea $\longrightarrow \lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

$$\Rightarrow \lambda_\pm = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}$$

$$\to X_H(t) = A e^{\lambda_+ t} + B e^{\lambda_- t} \quad \text{con } A, B \in \mathbb{C}.$$ (D)

Hay dos casos:

$\boxed{1}$ $b^2 < 4c$ $\longrightarrow$ $\lambda_\pm = -\frac{b}{2} \pm i\omega_0$

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt{4c - b^2} \in \mathbb{R} .$$

$$X_H(t) = e^{-\frac{b}{2}t} \underbrace{\left[A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}\right]}$$

$$\begin{cases} ① \; A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \,\text{sen}(\omega_0 t) \\ ② \; C \,\text{sen}(\omega_0 t + \varphi_0') \\ ③ \; D \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \end{cases}$$

Esto se puede reescribir de tres formas equivalentes usando la identidad de Moivre:

$$e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i\,\text{sen}(\omega_0 t).$$

(A_1, A_2), (C, φ_0'), (D, φ_0) siempre hay dos constantes complejas a determinar.

Obviamente: los soluciones que nos interesan son reales y cuando impongamos C.I. siempre va a existir una solución real.

Tomando por ejemplo la forma ③ de la solución:

$$\boxed{x(t) = x_p(t) + D\, e^{-\frac{b}{2}t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

con D y φ_0 reales a determinar por las C. I.

[2] $b^2 \geq 4c \longrightarrow \lambda_\pm = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c} \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{x(t) = x_p(t) + A\, e^{\lambda_+ t} + B\, e^{\lambda_- t}}$$

con A y B reales a determinar por las C. I.

Volviendo al ejemplo del resorte + peso + rozamiento:

Habíamos encontrado que: $\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{k l_0}{m}$

Aquí:
$$\begin{cases} f(t) = g + \frac{k l_0}{m} = \text{cte} \\ b = \frac{\gamma}{m} \\ c = \frac{k}{m} \end{cases}$$

propongo $x_p(t)$ cte.

$$\boxed{x_p(t) = l_0 + \frac{mg}{k}}$$

posición de equilibrio!

cuando $|\vec{F}_{el}| = |\vec{F}_{peso}|$

Ⓕ

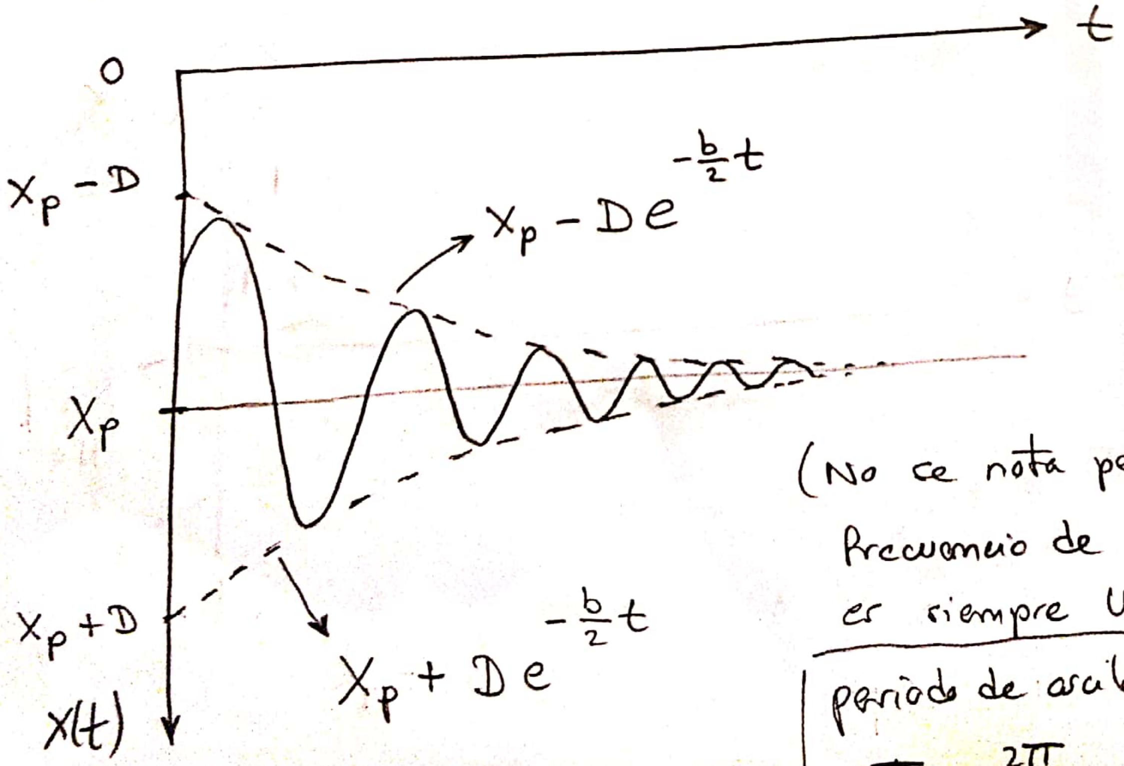
Aquí también habrá dos casos:

$\boxed{1}$ $b^2 < 4c \Rightarrow \left(\frac{\gamma}{m}\right)^2 < 4\frac{k}{m}$ (La fuerza elástica domina por sobre la de rozamiento).

Recordemos: $x(t) = x_p(t) + D\, e^{-\frac{b}{2}t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

donde: $\begin{cases} x_p = l_0 + \frac{mg}{k}. \\ b = \frac{\gamma}{m} \\ \omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt{4c - b^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}} \end{cases}$

D y φ_0 se determinan con las C.I.



(No se nota pero la frecuencia de oscilación es siempre ω_0)

período de oscilación

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

(6)

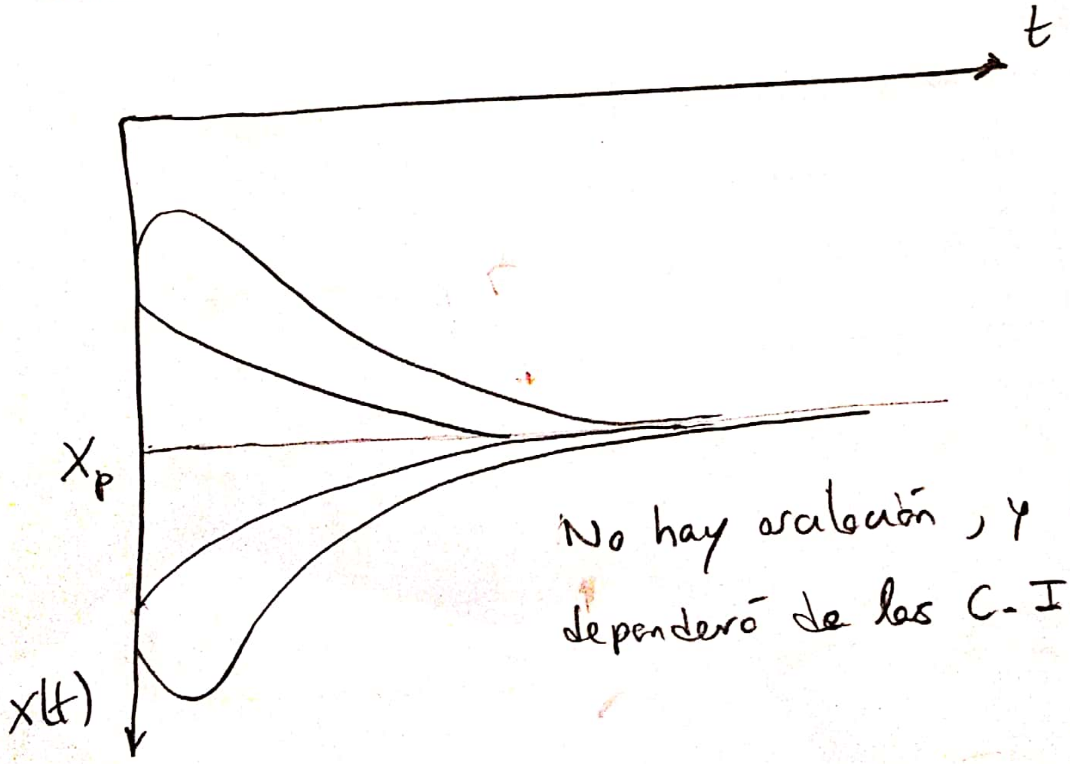
2 $b^2 \geq 4c \Rightarrow \left(\frac{\gamma}{m}\right)^2 \geq \frac{4k}{m}$ (La fuerza de rozamiento domina por sobre la elástica)

Recordemos: $x(t) = x_p(t) + A e^{\lambda_- t} + B e^{\lambda_+ t}$

donde
$$\begin{cases} x_p = l_0 + \dfrac{mg}{k} \\ \lambda_\pm = -\dfrac{b}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c} \\ \quad\;\; = -\dfrac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\dfrac{\gamma^2}{4m^2} - \dfrac{k}{m}} \end{cases}$$

A y B se determinan con las C. I.

Como $\lambda_\pm \leq 0$



No hay oscilación, y la trayectoria dependerá de las C. I.

Problema 8

Una masa m cuelga en reposo de un resorte (k, l_0). Encuentre la posición de equilibrio. Si ahora se ubica a la masa a una distancia $d_{eq}/2$ del techo y se la suelta, encuentre la posición y velocidad en función del t..

No hay rozamiento ⇒ Este es el ejemplo de recién pero con $\gamma = 0$.

La posición de equilibrio es $\boxed{d_{eq} = X_p = l_0 + \frac{mg}{k}}$

y el caso que corresponde a esta situación es el $\boxed{1}$.

$$\boxed{x(t) = d_{eq} + D\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (ver pág. F con $b = 0$, $\gamma = 0$)

Impongo las C. I. para determinar D y φ_0.

(I)

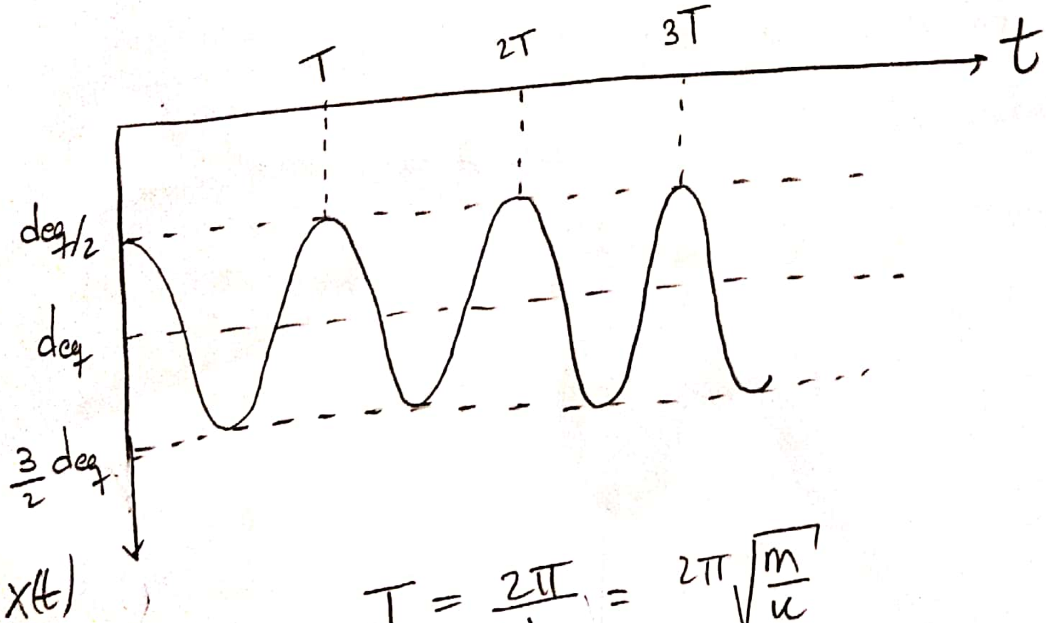
C. I.: $x(t=0) = d_{eq} + D\cos\varphi_0 \overset{!}{=} \frac{d_{eq}}{2}$

$\dot{x}(t=0) = -D\omega_0 \operatorname{sen}\varphi_0 \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_0 = 0 \text{ y } D = -\frac{d_{eq}}{2}}$$

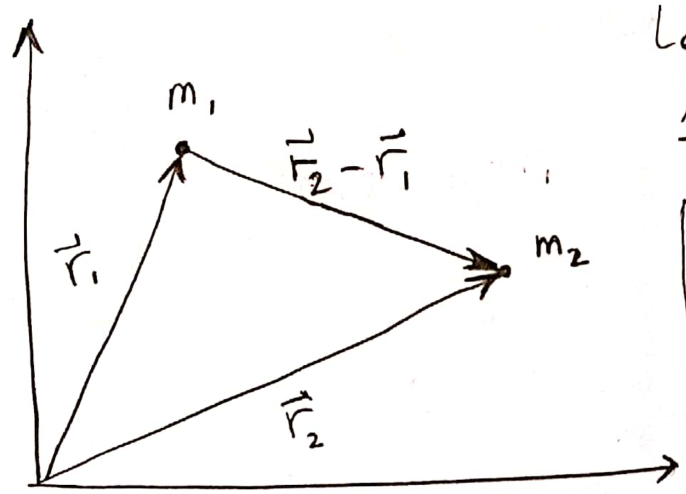
$$\Rightarrow \boxed{x(t) = d_{eq}\left(1 - \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t)\right)}$$

con $\begin{cases} d_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$



$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Fuerza gravitatoria



La fuerza gravitatoria que 1 ejerce sobre 2 es

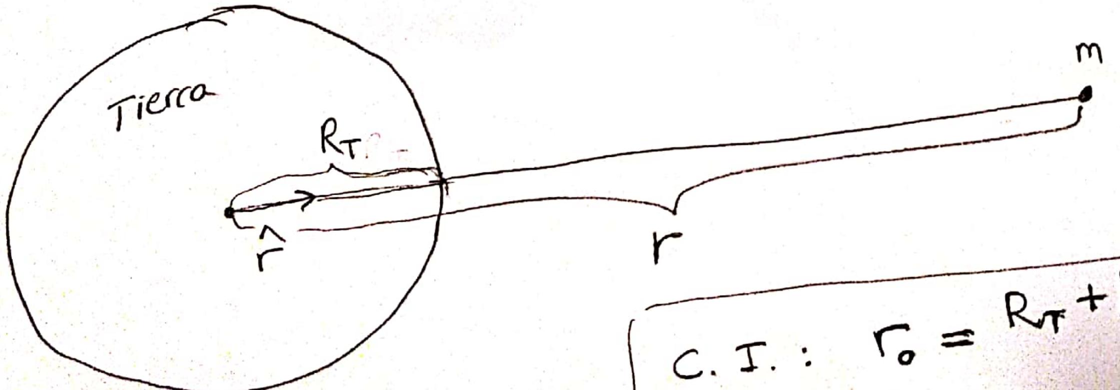
$$\boxed{\vec{F}_{21} = -G_N \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}$$

Cte de grav. universal:

$$G_N = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2}$$

Problema 5

Un cuerpo de masa m cae hacia la sup. de la tierra desde una altura h. Despreciando la resistencia del aire, encontrar el tiempo Δt que tarda en llegar a la superficie.



$$\boxed{C.I.: \quad r_0 = R_T + h \qquad \dot{r}_0 = 0}$$

La fuerza que la tierra ejerce sobre m es.

$$\vec{F}_{grav} = -G_N \frac{m M_T}{r^2} \hat{r}$$

Nota: Cuando $r = R_T + z$ con $\boxed{\frac{z}{R_T} \ll 1}$

$$\boxed{\vec{F}_{grav} = -\underbrace{\frac{G_N M_T}{R_T^2}}_{\equiv g} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}}_{\approx 1} \cdot m \cdot \hat{r} \equiv m \vec{g}.} \quad \boxed{= \vec{F}_{peso}.}$$

$$\boxed{\vec{g} = -\frac{G_N \cdot M_T}{R_T^2} \hat{r}} \qquad |\vec{g}| = \frac{G_N M_T}{R_T^2} = 9{,}8 \frac{m}{s^2}.$$

Ecs. de Newton: $\vec{F}_{grav} = m \vec{a}$.

$$\Rightarrow -G_N \frac{m M_T}{r^2} \hat{r} = m \ddot{r} \hat{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{G_N M_T}{r^2} = \ddot{r}}$$

En la dirección $\perp$ a la radial no hay fuerzas $\Rightarrow$ no hay aceleración, y las C.I. / la velocidad inicial es cero $\Rightarrow$ solo hay mov. en $\hat{r}$

Quiero el Δt que tarda en tocar la superficie desde una altura $h \Rightarrow$ integro la ecuación de Newton

Integro una vez.

$$-\frac{G_N M_T}{r^2} = \ddot{r} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \cdot \dot{r} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(\dot{r}^2)$$

$$\Rightarrow -G_N M_T \int_{h+R_T}^{r} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\int_{h+R_T}^{r} \frac{\partial}{\partial r}(\dot{r}^2)\, dr$$

$$\Rightarrow G_N M_T \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{h+R_T}\right] = \frac{1}{2}\dot{r}^2$$

(La velocidad inicial, cuando $r = h+R_T$ es cero).

$$\Rightarrow \boxed{\dot{r} = -\sqrt{2G_N M_T\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{h+R_T}\right)}}$$

Vuelvo a integrar

$$\Delta t = -\int_{h+R_T}^{R_T} \frac{dr}{\sqrt{2M_T G_N\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{h+R_T}\right)}}$$

M

Cambio variables: $w = \frac{h+R_T}{r} - 1$

$$dw = -\frac{h+R_T}{r^2}\,dr = -\frac{(1+w)^2}{h+R_T}\,dr$$

$$\Rightarrow \Delta t = -\frac{1}{\sqrt{2M_TG_N}}\int_{h+R_T}^{R_T}\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{h+R_T}}}$$

$$= -\frac{(h+R_T)^{3/2}}{\sqrt{2M_TG_N}}\int_{0}^{h/R_T}\frac{-dw}{\sqrt{w}\,(1+w)^2}$$

$$= \frac{(h+R_T)^{3/2}}{\sqrt{2M_TG_N}}\left[\frac{\sqrt{w}}{w+1} + \arctan\left(\sqrt{w}\right)\right]_0^{h/R_T}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{(h+R_T)^{3/2}}{\sqrt{2M_TG_N}}\left[\frac{\sqrt{h/R_T}}{h/R_T+1} + \arctan\left(\sqrt{\frac{h}{R_T}}\right)\right]}$$

Tiempo que tarda en caer un cuerpo desde una altura h hasta la sup. de la tierra.

Verifico: unidades y límites

→ $\Delta t(h=0) = 0$ ✓

→ $h/R_T \ll 1$ → recupera el tiempo de caída en un campo constante

$$\boxed{\text{En el límite } \frac{h}{R_T} \ll 1}:$$

arctan(x) ≈ x cuando x<<1.

$$\Delta t \approx \frac{R_T^{3/2}}{\sqrt{2 M_T G_N}} \left[\sqrt{h/R_T} + \sqrt{h/R_T} \right] = \sqrt{\frac{2 R_T^2 h}{M_T G_N}}$$

pero $\frac{R_T^2}{M_T G_N} = \frac{1}{g}$ → cte de aceleración gravitatoria.

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t \approx \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$ cuando la altura es pequeña.

Ejercicio: Mostrar que este es el tiempo de caída libre de un cuerpo desde una altura h por efecto de la fuerza peso.