Quiero comenzar revisitando el problema 6. Nos pedían calcular la velocidad de escape del planeta tierra. Se parte de la ecuación de Newton con la fuerza gravitatoria (nos quedamos sólo con la componente $\hat{r}$ porque sabemos que la dinámica es radial):

$$m\ddot{r} = -\frac{mMG}{r^2} \tag{1}$$

Como lo que nos interesa es conocer la velocidad, escribimos el término izquierdo en términos de la velocidad:

$$m\frac{d\dot{r}}{dt} = -\frac{mMG}{r^2} \tag{2}$$

Uno, de buenas a primeras, podría pensar que para calcular la velocidad de escape hay que tomar el camino largo de encontrar primero la trayectoria y, recién después de eso, buscar la velocidad que haga que la trayectoria *no vuelva más*. Sin embargo, y aunque quizá no sea tan obvio, la mejor variable con la que uno puede trabajar en este caso es la posición r:

$$m\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = -\frac{mMG}{r^2} \tag{3}$$

En definitiva, lo que ocurre es que hay una manera de expresar la aceleración como una variación respecto de r, y no de t:

$$\frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{d}{dr}\Big(\frac{1}{2}\dot{r}^2\Big) \tag{4}$$

Queda, entonces:

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\Big) = -\frac{mMG}{r^2} \tag{5}$$

Se puede integrar entre r final y el r inicial , y queda:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}_f^2 - \frac{mMG}{r_f} = \frac{1}{2}m\dot{r}_i^2 - \frac{mMG}{r_i} = cte \tag{6}$$

Esta ecuación que antes pasamos por alto y usamos para despejar la velocidad de escape es la **ley de conservación de energía** para el sistema del problema 6, que es una masa en presencia del campo gravitatorio de la tierra, donde se considera $M \gg m$. Si quisiéramos encontrar la velocidad de escape, nos alcanza con conocer tan solo dos estados del sistema, sin preocuparnos por el instante de tiempo en el que acontecen: deberíamos imaginarnos un escenario inicial en el cual la partícula está en la superficie de la tierra con alguna velocidad (la que queremos encontrar), y un escenario final en el que la partícula ha llegado al infinito, pero *con lo justo*, o sea, llega al infinito, pero allí se frena. Matemáticamente, estas condiciones son:

$$\dot{r}_i = v_{esc}$$

$$r_i = R_T$$

$$\dot{r}_f = 0$$

$$r_f = \infty \tag{7}$$

Reemplazando en la ecuación (6):

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{mMG}{R_T} = 0 \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2MG}{R_T}} \tag{8}$$

Está bien, pero ¿qué ganamos con la conservación de la energía? Lo que ganamos es gran generalidad, y ahí yace su potencia descriptiva. En el fondo, lo que hacemos es pasar de una ecuación de segundo orden (Newton) a una de primer orden (conservación de la energía). Y hay mucha información del sistema que es más accesible de esta manera, aunque no me voy a adentrar mucho más cuál esa información, y cómo se obtiene, porque vamos a tener tiempo de verlo en algunas clases.

Pensemos en un problema un poquitito más complicado: no despreciemos de una la masa de la tierra. Tratemos de hallar el efecto de masa finita en la velocidad de escape. Si partiéramos de Newton, sería un bajón. Pero la conservación de la energía, directamente nos dice:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}M\dot{R}^2 - \frac{mMG}{|\vec{R} - \vec{r}|} = cte \tag{9}$$

Si asumimos que la tierra está inicialmente quieta:

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{mMG}{R_T} = \frac{1}{2}M\dot{R}_f^2 \tag{10}$$

Nos falta usar otra conservación: la conservación del momento lineal *total* (el de cada partícula por separado no se conserva):

$$M\dot{\vec{R}}_f + m\dot{\vec{r}}_f = M\dot{\vec{R}}_i + m\dot{\vec{r}}_i \tag{11}$$

$$M\dot{\vec{R}}_f = m\vec{v}_{esc} \tag{12}$$

O sea:

$$\dot{R}_f^2 = \Big(\frac{mv_{esc}}{M}\Big)^2 \tag{13}$$

Reemplazando en la ecuación (10):

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{mMG}{R_T} = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v_{esc}^2 \tag{14}$$

Despejando v_{esc}:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2MG}{(1 - \frac{m}{M})R_T}} \tag{15}$$

Acá se ve claramente que si $M \gg m$, la corrección es despreciable. Se ve que cuanto más grande es la mása chiquita m comparada con la masa grande M, más le costaría escaparse, necesitando velocidad infinita si $m = M$. Esto nos dice, también, que si m fuera, de hecho, más grande que M, le sería imposible escapar. Esta sería la respuesta a la pregunta que jamás nos hicimos, porque, para ser justos, es una pregunta un poco extravagante a primera vista: ¿cuál es la velocidad de escape de la tierra respecto de alguien de nosotros? Jamás podría. Su atracción es demasiado grande como para deshacerse de nosotros por completo (al menos por sí sola, estamos hablando de un sistema aislado).

Comentario al paso: ¿podría decirse que la expresión exacta (15) es una fórmula más precisa que la aproximación (8)? La respuesta, si nos referimos a una situación realista, es que no. Habría incontables otras correcciones para hacer que son más relevantes que esta. Pensemos en dos: la primera, el efecto que produciría un planeta (o satélite) lejano, como la luna, pero no en el infinito. La segunda, el efecto del aire en la atmósfera.

Nuevamente, ni nos preocupemos por Newton. Escribo todas las energías cinéticas y potenciales. Nota: asumimos de nuevo que la tierra no se mueve, y la luna tampoco. Además, por este motivo tampoco hace falta escribir el término de interacción entre tierra y luna. Recuerden que la energía está definida salvo una constante, y como este sería un término constante, lo podemos eliminar:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{mMG}{r} - \frac{m\mu G}{|\vec{r} - \vec{\rho}|} = cte \tag{16}$$

Asumamos que el planeta está en la dirección en la que sale disparado el cohete, por simplicidad:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{mMG}{r} - \frac{m\mu G}{\rho - r} = cte \tag{17}$$

Ahora podemos considerar que la partícula logra escaparse cuando llega al punto en el que la atracción gravitacional del otro planeta es tan fuerte como la de la tierra:

$$\frac{m\mu G}{(\rho - r)^2} = \frac{mMG}{r^2} \Rightarrow \frac{\mu}{(\rho - r)^2} = \frac{M}{r^2} \tag{18}$$

Se puede ver que la solución para $r < \rho$ es:

$$r_{esc} = \frac{M - \sqrt{\mu M}}{M - \mu}\rho \tag{19}$$

No vamos a terminar de resolver esto, pero lo que queda es bien simple, aunque quede una expresión medio fea. Se ve cómo agregar interacciones a este modelo no dificulta *demasiado* el cálculo de la velocidad de escape si se usa la ley de conservación de la energía (al menos asumiendo algunas hipótesis razonables para simplificar y no complicar muchísimo el problema).

¿Y si hay rozamiento? Ahí ya la energía no se conserva. Depende de la *historia* del sistema en la transición de un estado a otro, ya no podemos desentendernos del tiempo. Ya no podemos hacer lo que hicimos al principio y usar, así como así, la posición r como variable independiente. Ya no es cierto que dando condiciones iniciales de posición y velocidad, la velocidad esté unívocamente definida en todo punto.

Para cerrar me gustaría repasar el concepto de trabajo con tres preguntas conceptuales. Estas son:

1) Un bulto apoyado en el piso de un ascensor sube desde la planta baja hasta el primer piso. Como consecuencia de ello, su energía mecánica aumenta. ¿Cuáles son las fuerzas no conservativas que realizan trabajo?

2) Una persona asciende una altura h por una escalera marinera. En consecuencia su energía mecánica experimenta una variación $\Delta E = mgh$. ¿Cuáles son las fuerzas no conservativas que realizaron trabajo? (Note que las fuerzas de la escalera sobre la persona no hacen trabajo porque no hay desplazamiento de las manos ni de los pies).

3) ¿Puede un sistema variar su energía mecánica merced al trabajo de fuerzas internas no conservativas?

Con respecto a la primera, como se mencionó en la teórica, es la fuerza normal la que hace el trabajo no conservativo. Esto es, si sólo consideramos las fuerzas sobre el bulto.

El punto dos es casi igual al uno, salvo por una sutil diferencia: la fuerza normal que siente la persona al impulsarse contra la escalera con el pie no hace trabajo ya que, como dice el paréntesis, no hay desplazamiento de pies (y en el caso de que se ayude con el pasamanos, tampoco de manos). La pierna, cadera, y probablemente buena parte del cuerpo son las que en realidad están haciendo el trabajo. Propongo un experimento: estando sentados, hagan un movimiento de tobillos hacia arriba y abajo. Es claro que no necesitan de ningún apoyo para hacer esto. Podrían hacerlo aunque estuvieran flotando en el espacio exterior (al menos mientras se les provea de oxígeno, en el corto plazo, luego de alimentos, etc.). Ahora pónganse de pie, y repitan el movimiento procurando mantener la punta del pie apoyada en el suelo. Con ganas, y con más ganas: el resto de su cuerpo, como por arte de magia, se ha elevado. Al mantener apoyada la punta de los pies, están imponiendo un *vínculo* a la dinámica, pero el resto de la mecánica es (casi) la misma. La fuerza normal que hace el suelo sobre sus pies es la responsable en los hechos de ese vínculo, y fundamental, por cierto, para el milagroso ascenso, pero no es la que hace el trabajo mecánico. Subir las escaleras es un proceso análogo.

Cualquier ser vivo es testimonio de la veracidad de la tercera pregunta. ¿Qué otros ejemplos, quizá no vivos, se les ocurren?