Primer Parcial 04/06/2020

Temas de física para matemáticos 1c 2020

Lea detenidamente el enunciado completo antes de empezar a resolver. Justifique detalladamente cada una de sus respuestas. Resuelva los ejercicios en hojas separadas y entréguelas con su nombre y apellido y numeradas.

Problema 1:

Una masa m desliza sin rozamiento sobre una cuña de masa M y ángulo α. Ambas interactúan por medio de un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0, como muestra la figura. La cuña desliza sobre el suelo sin rozamiento y todo el sistema se encuentra en el campo gravitatorio de la tierra.

a) Plantee los diagramas de cuerpo libre para m y M y escriba cada fuerza en el sistema de referencia elegido.

b) Escriba las ecuaciones de Newton para cada masa en cada dirección, y diga cuales son los vínculos de problema.

c) Calcule la frencuencia de oscilación del sistema como función de m, M, k y α. Verifique que en los límites $\alpha \to 0$, $\alpha \to \pi/2$ y $M \to \infty$ se obtiene lo esperado. Justifique.

Problema 2:

Un péndulo de masa m y longitud l en un campo gravitarorio $\mathbf{g}$ rota con velocidad angular contante ω, como se muestra en la figura.

a) Encontrar el Lagrangiano para la coordenada generalizada θ (el ángulo que forma el péndulo con la vertical) y las ecuaciones Euler-Lagrange.

b) A qué velocidad angular crítica ω_c sucede que el punto de equilibrio $\theta_0 = 0$ pasa a ser inestable?

c) Para $\omega > \omega_c$ cual es el nuevo punto de equilibrio estable θ_0?

d) Encuentre la frecuencia Ω de pequeñas oscilaciones alrededor del punto de equilibrio estable del inciso anterior.

Problema 3:

Considere una partícula de masa m moviendose en un plano, sometida a la interacción de un potencial central de la forma ($\alpha \neq 0$)

$$V(r) = \alpha r^2 + \frac{\beta}{r^2}$$

a) Escriba el Lagrangiano del sistema, e identifique las simetrías asociadas a la conservación del momento angular l y a la energía E.

b) Encuentre el potencial efectivo en la dirección radial y grafíquelo cualitativamente en los casos:

i) $\beta > -\frac{l^2}{2m}$, $\alpha > 0$

ii) $\beta < -\frac{l^2}{2m}$, $\alpha > 0$

iii) $\beta > -\frac{l^2}{2m}$, $\alpha < 0$

iv) $\beta < -\frac{l^2}{2m}$, $\alpha < 0$

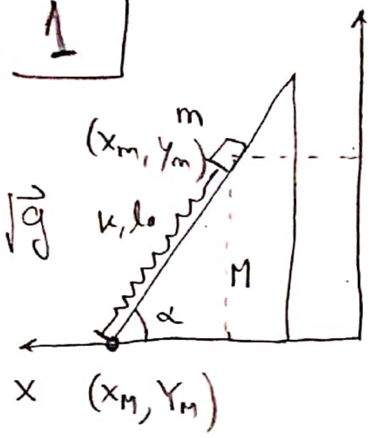
v) $\beta = -\frac{l^2}{2m}$, $\alpha > 0$

vi) $\beta = -\frac{l^2}{2m}$, $\alpha < 0$

Analice el movimiento que realizará la partícula en cada caso, dependiedo del valor de E.

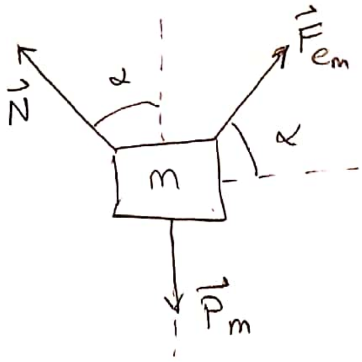
c) Determine cual de los items anteriores permite órbitas circualares, diga en que caso dichas orbitas son estables y obtenga la velocidad angular como función de r.

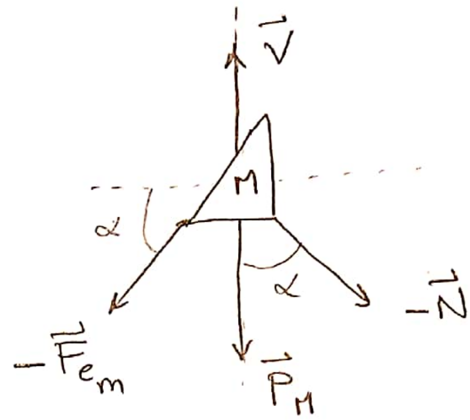
1



A

DCL :





$$\vec{N} = N \cos\alpha\, \hat{y} + N \operatorname{sen}\alpha\, \hat{x}$$

$$\vec{P}_m = -mg\,\hat{y}$$

$$\vec{P}_M = -Mg\,\hat{y}$$

$$\vec{V} = V\,\hat{y}$$

$$\vec{F}_{em} = -k\left(\sqrt{(X_M - X_m)^2 + (Y_M - Y_m)^2} - l_0\right)\left[\operatorname{sen}\alpha\,\hat{y} - \cos\alpha\,\hat{x}\right]$$

Vínculos:

$$\boxed{\begin{aligned} Y_M &= 0 \\ Y_m - Y_M &= tg(\alpha)\,(X_M - X_m) \end{aligned}}$$

Con el vínculo,

$$\vec{F}_{em} = -k\left[|X_M - X_m|\sqrt{1 + tg^2(\alpha)} - l_0\right](\operatorname{sen}\alpha\,\hat{y} - \cos\alpha\,\hat{x})$$

$$\boxed{\vec{F}_{em} = -k'\left[X_M - X_m - l_0'\right](\operatorname{sen}\alpha\,\hat{y} - \cos\alpha\,\hat{x})}$$

(B)

$$\boxed{\begin{aligned} k' &= k\sqrt{1+tg^2\alpha} = \frac{k}{\cos\alpha} \\ l_0' &= l_0 \Big/ \sqrt{1+tg^2\alpha} = l_0 \cos\alpha \end{aligned}}$$

Newton:

$\hat{x}$]

$$m\ddot{X}_m = k'(X_M - X_m - l_0')\cos\alpha + N \operatorname{sen}\alpha$$

$$M\ddot{X}_M = -k'(X_M - X_m - l_0')\cos\alpha - N \operatorname{sen}\alpha$$

$$\boxed{m\ddot{X}_m + M\ddot{X}_M = 0, \text{ conservación del momento total en } \hat{x}}$$

$\hat{y}$]

$$m\ddot{Y}_m = -mg + N\cos\alpha - k'(X_M - X_m - l_0')\operatorname{sen}\alpha$$

$$\boxed{M\ddot{Y}_M = -Mg - N\cos\alpha + k'(X_M - X_m - l_0')\operatorname{sen}\alpha + V}$$

Define V

$$\overbrace{\left(\frac{mM}{m+M}\right)}^{\mu}(\ddot{X}_M - \ddot{X}_m) = -k'(X_M - X_m - l_0')\cos\alpha - N\operatorname{sen}\alpha$$

$$m\, tg(\alpha)(\ddot{X}_M - \ddot{X}_m) = -k'(X_M - X_m - l_0')\operatorname{sen}\alpha + N\cos\alpha - mg$$

$$\boxed{\mu = \frac{mM}{m+M}} \qquad \boxed{D = X_M - X_m}$$

$\Rightarrow$ Llegué a 2 ecs. con 2 incógnitas (D y N) (c)

$$\boxed{\begin{aligned} \mu \ddot{D} &= -k'(D-l_0')\cos\alpha - N \operatorname{sen}\alpha \\ m\, tg(\alpha)\, \ddot{D} &= -k'(D-l_0')\operatorname{sen}\alpha + N\cos\alpha - mg \end{aligned}}$$

con $\mu = \frac{mM}{m+M}$, $k' = k\sqrt{1+tg^2(\alpha)}$, $l_0' = l_0 / \sqrt{1+tg^2(\alpha)}$

$$\left(\mu\cos\alpha + m\, tg(\alpha)\cdot \operatorname{sen}(\alpha)\right)\ddot{D} = -k'(D-l_0')\underbrace{(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)}_{=1} - mg\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{D} + \omega^2(D-\bar{l}) = 0$$

$$\text{con } \omega^2 = \frac{k'}{\cos\alpha\left(\mu + m\, tg^2\alpha\right)} = \frac{k/\cos\alpha}{\cos(\alpha)\left(\mu + m\, tg^2\alpha\right)}$$

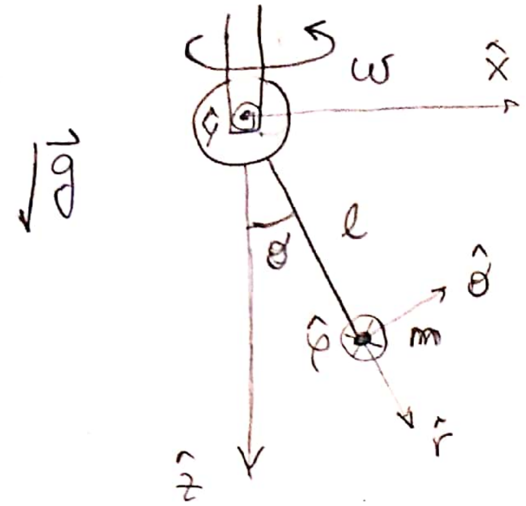
$$= \boxed{\frac{k}{\cos^2(\alpha)\left(\mu + m\, tg^2(\alpha)\right)} = \omega^2}$$

$$\omega^2 \xrightarrow[\alpha \to 0]{} \frac{k}{\mu} \checkmark \qquad \omega^2 \xrightarrow[M \to \infty]{} \frac{k}{m} \checkmark$$

$$\omega^2 \xrightarrow[\alpha \to \frac{\pi}{2}]{} \frac{k}{m} \checkmark$$

2

a)



$$T = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \omega^2\right)$$

$$V = -mgl\cos\theta .$$

Nota 1: $z = r\cos\theta$

$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$.

$y = -r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$.

vínculos: $r = l$

$\varphi = \omega t + \varphi_0$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} l^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2\theta + mgl\cos\theta}$$

Euler - Lagrange . $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0$

$$\boxed{m l^2 \omega^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta - mgl \operatorname{sen}\theta = m l^2 \ddot{\theta}}$$

b) Puntos de equilibrio: $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow$

$$(ml^2\omega^2\cos\theta - mgl)\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\boxed{\theta_0 = \arccos\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)} \qquad \boxed{\theta_0 = 0, \pi}$$

Son (in) estables si al apartarlos un poquito del punto de equilibrio (no) vuelven a la posición inicial. Ⓔ

$\Rightarrow$ Estudio <u>pequeñas oscilaciones</u>:

En $\boxed{\theta \approx 0}$: $\text{sen}\,\theta \approx \theta$, $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

$$m l^2 \ddot{\theta} = (m l^2 \omega^2 - m g l)\,\theta .$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)\theta = 0} \longrightarrow$$

Es <u>estable</u> si

$$\frac{g}{l} - \omega^2 > 0$$

(sino es inestable)

$$\Rightarrow \boxed{\omega < \omega_c = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

c) Para $\omega > \omega_c$ hay un nuevo punto de eq. estable.

Desarrollo alrededor de $\boxed{\theta \approx \theta_0 = \arccos\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)}$

$$m l^2 \ddot{\theta} = (m l^2 \omega^2 \cos\theta - m g l)\,\text{sen}\,\theta$$

$$\approx \left[-m l^2 \omega^2 \left[\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta\right] - m g l \cos\theta\right]_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0)$$

$$= \left[m l^2 \omega^2 (2\cos^2\theta_0 - 1) - m g l \cos\theta_0\right](\theta - \theta_0)$$

$$= \left[m l^2 \omega^2 \left(\frac{2 g^2}{l^2 \omega^4} - 1\right) - m g l \cdot \frac{g}{l\omega^2}\right](\theta - \theta_0)$$

Ⓕ

$$\Rightarrow (\ddot{\theta} - \theta_0) + \left(\omega^2 - \frac{g^2}{\ell^2\omega^2}\right)(\theta - \theta_0) = 0$$

$\Rightarrow$ Es estable si $\omega > \omega_c = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

d) La frecuencia de pequeñas oscilaciones es

$$\boxed{\Omega^2 = \sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{\ell^2\omega^2}}}$$

Comentario: La energía no se conserva: la fuerza de vínculo que garantiza que $\varphi = \omega t + \varphi_0$ hace trabajo.

Pero! No hay trabajo de las fuerzas de vínculo sobre desplazamientos virtuales.

$\Rightarrow$ Puedo plantear el $\mathcal{L}$ y tendrá simetrías y cantidades conservadas, pero No serán la Energía.

Como $\mathcal{L}$ no depende de t, se conserva

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\theta}^2 \underbrace{- \frac{m}{2}\ell^2 \sin^2\theta\, \omega^2 - mg\ell\cos\theta}_{V_{ef}(\theta)} \neq E$$

3 $V(r) = \alpha r^2 + \frac{\beta}{r^2}$

a) $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \left(\alpha r^2 + \frac{\beta}{r^2}\right)$

$$\theta \to \theta' + \varepsilon \to p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \boxed{m r^2 \dot{\theta} = l}$$

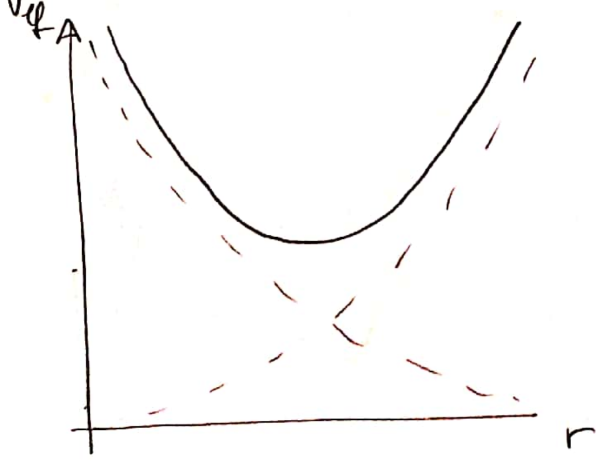
$$t \to t' + \varepsilon \longrightarrow \mathcal{H} = \boxed{\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r) = E}$$

b) $$V_{ef} = \underbrace{\left(\frac{l^2}{2m} + \beta\right)}_{\equiv \gamma} \frac{1}{r^2} + \alpha r^2 = \frac{\gamma}{r^2} + \alpha r^2$$

<u>Extremos</u>: $$\frac{\partial V_{ef}}{\partial r}(r_0) = -\frac{2\gamma}{r_0^3} + 2\alpha r_0 = 0 \Rightarrow \boxed{r_0 = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/4}}$$

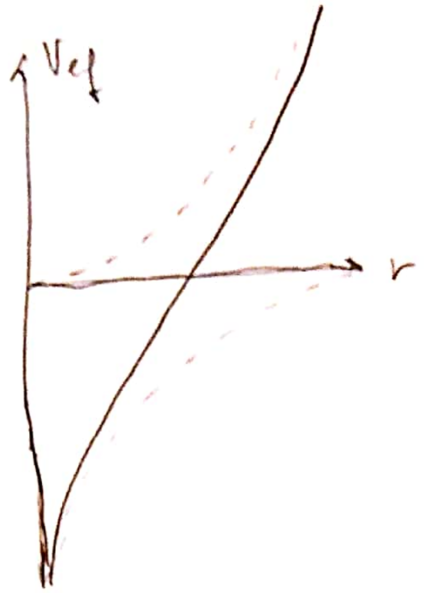
$$\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2}(r_0) = \frac{6\gamma}{r_0^4} + 2\alpha = 8\alpha$$

i) <u>$\gamma > 0$, $\alpha > 0$</u>

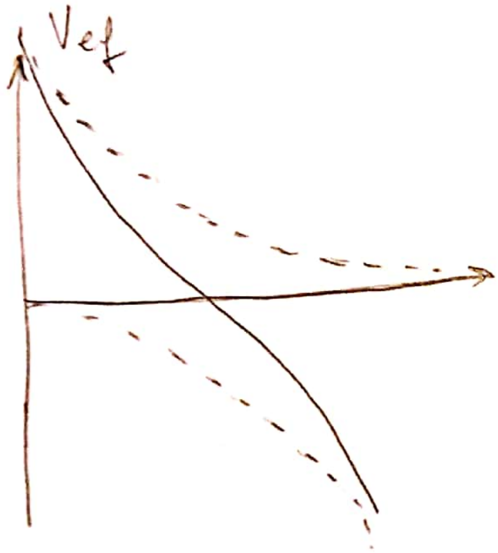


(H)

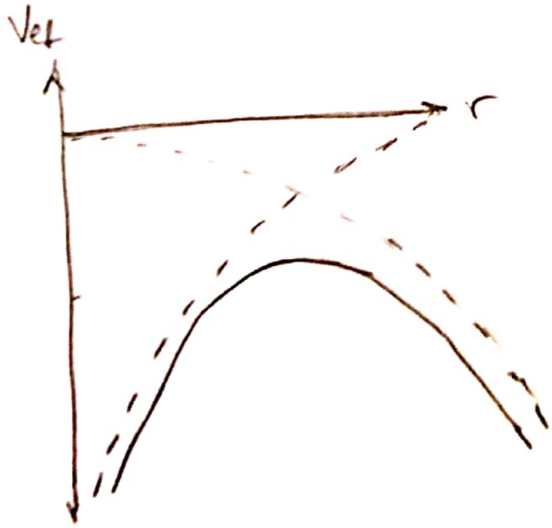
ii) $\gamma < 0, \alpha > 0$



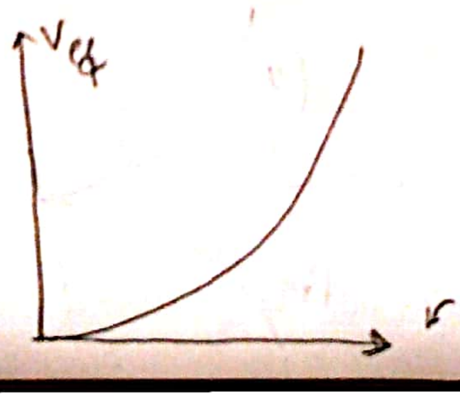
iii) $\gamma > 0, \alpha < 0$



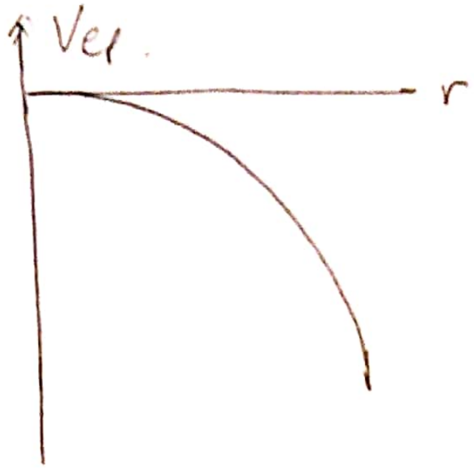
iv) $\gamma < 0, \alpha < 0$



v) $\gamma = 0, \alpha > 0$



vi) $\gamma = 0$, $\alpha < 0$



I

c) Órbitas circulares: i) estables, iv) inestables.

Pide $\dot{\theta}(r)$

$$r_0^4 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left(\beta + \frac{l^2}{2m}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\beta + \frac{m^2 r_0^4 \dot{\theta}_0^2}{2m}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\dot{\theta}_0 = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{m}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha r_0^4}\right)}}$$